Geometri Transformasi

Sejak zaman Euclid (300 SM) sampai abad 17 M, geometri dipelajari dari perspektif syntesis, sebagai suatu ilmu. Selama abad 17 sejumlah ide baru dalam matematika dikembangkan dan diterapkan dalam mempelajari geometri, dengan efek yang bersifat revolusi. Misalnya dengan menerapkan notasi-notasi dan konsep aljabar ke feometri. Fermat (1601 – 16650 dan Rene Descartes (1596 – 1650) menciptakan geometri analitik. Diferensial geometri dikembangkan sebagai suatu konsep dan menggunakan notasi dari kalkulus yang dikembangkan oleh Newton dan Leibniz diaplikasikan pada gwomwtri. Alam abad 18 dan 19 , sejumolah geometri non Euclid dikebangkan, mengakibatkan beberapa orang menjadi ragu apakah geometri akan terpisah sesuai dengan teori-teorei yang bersaing satu dengan yang lain. Di tahun 1782, seorang ahli matematika berusia 23 tahun, Felix Klein (1849 – 1925) mengusulkan suatu prinsip pemersatu untuk mengklasifikasikan berbagai geometri dan menjelaskan hubungan-hubungan diantara mereka. Inti dari gagasan atau konsep Klein itu adalah Geometri Transformasi.

Geometri transformasi adalah pemetaan satu- satu, dengan menggunakan hinpunan titik-titik sebagai input dan *returning points* sebagai output. Untuk sederhananya, hinpunan-himpunan input dinamakan *obyek* dan outputnya yang bersesuaian dinamakan *image*. Tergantung dari konteks, transformasi-transformasi dapat dipandang sebagai diterapkan pada obyek-obyek geomeri yang umum dikenal, misalnya garis, polygon, atau polihedra ataupun pada ruang dimana obyek-obyek itu ada.

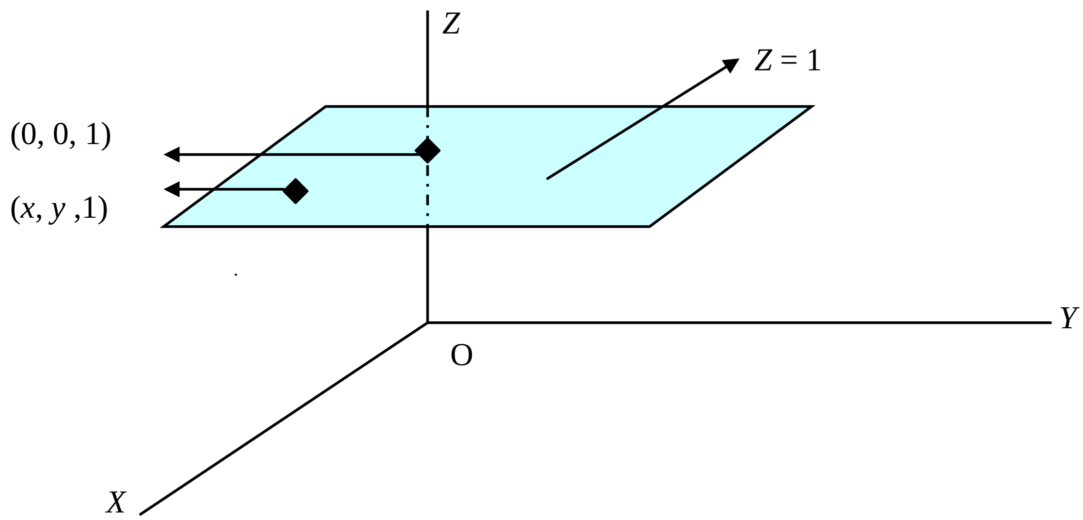
Geometri Transformasi menawarkan pandangan yang dalam terhadap hakekat dari banyak topic tradisional, termasuk kongruensi, kesebangunan, dan symetri. Geometri transformasi juga berfungsi sebagai basis bagi banyak aplikasi kontemporer dalam seni, arsitek, engenering, film dan televisi.Yang lebih berarti lagi adalah bagaimana Felix Klein memberi definisi tentang suatu geometri: “Suatu geometry adalah suatu studi tentang sifat-sifat dari suatu himpunan S yang tetap tidak berubah bilamana element-elemen S ditransformasikan oleh sekelompok transformasi. Definisi ini menetapkan geometri transformasi sebagai suatu cara memahami hubungan-hubungan diantara semua geometri, Euclid dan non Euclid.

Suatu Model analitik dari Bidang Euclid

Menyajikan titik dan garis

Untuk membahas model analitik dari bidang Euclid, harus dipilih beberapa bidang di Ruang berdimensi 3. Banyak siswa telah terbiasa dengan bidang *x*-*y*, atau *z* = 0.

Tetapi masih ada pilihan yang lebih baik, yaitu bidang **z = 1.**



Setiap titik di bidang ini mempunyai koordinat (x, y, 1).

Garis pada bidang Euclid disaikan dalam bentuk slope – intercept pada bidang Euclid disajikan dalam bentuk slope – intercept

$y = mx + b$ atau dalam bentuk umum adalah $ax + by = c$

Bentuk ini dapat disajikan dengan menggunakan notasi matrix (oleh Arthur Cayley, 1821 – 1895).
Dalam notasi matrix suatu bentuk persamaan aljabar : $u_1\ x + u_2\ y + u_3 = 0$ ditulis sebagai vektor-vektor baris

$$[u_1 \quad u_2 \quad u_3\ ]$$

Titik-titik ditulis sebagai vektor kolom

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan mengkombinasi kedua notasi ini, kita peroleh suatu bentuk persamaan matrix

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

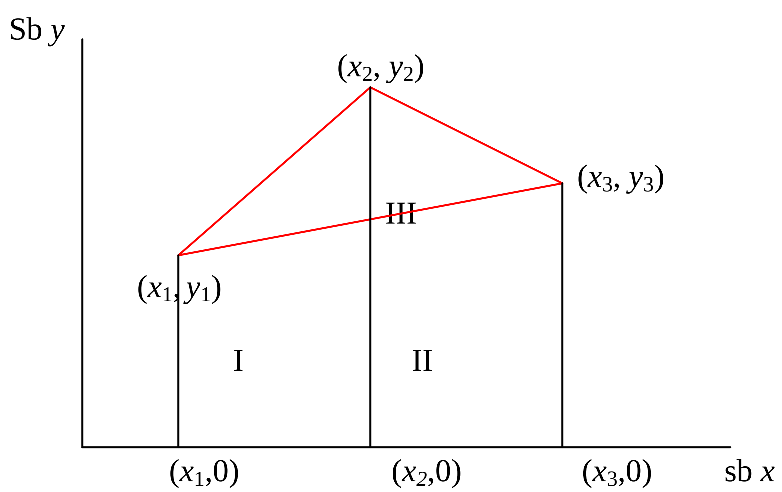
Jika entri-entri yang berkorespondensi pada baris dan kolom dikalikan dan hasilnya dijumlahkan, maka diperoleh suatu bentuk aljabar. Sebagai contoh, persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

adalah ekivalen dengan persamaan $1x + 3y + 2 = 0$. Persamaan-persamaan seperti ini sering digunakan untuk menjawab pertanyaan "titik-titik apa pada bidang yang terletak pada garis ini?"

Luas dan koliner

Bagaimana luas daerah yang ditentukan oleh tiga titik yang tidak koliner?



Luas daerah segitiga dapat dinyatakan dalam bentuk luas tiga daerah trapesium

Titik-titik trapesium 1: $(x_1, 0, 1)$, $(x_1, y_1, 1)$, $(x_2, y_2, 1)$, $(x_2, 0, 1)$

Titik-titik trapesium 2: $(x_2, 0, 1)$, $(x_2, y_2, 1)$, $(x_3, y_3, 1)$, $(x_3, 0, 1)$

Titik-titik trapesium 3: $(x_1, 0, 1)$, $(x_1, y_1, 1)$, $(x_3, y_3, 1)$, $(x_3, 0, 1)$

Luas segitiga adalah = [luas trapesium 1] + [luas trapesium] 2 – [Luas trapesium 3]

$= ½[(x_2 – x_1)(y_1 + y_2) + (x_3 – x_2)(y_2 + y_3) – (x_3 – x_1)(y_1 + y_3)]$

$= ½ [x_2y_1- x_1y_2 + x_3y_2 – x_2 y_3 –x_3y_1 + x_1y_3]$

Dengan menggunakan pendekatan matriks, koordinat-koordinat dari titik-titik pada segitiga dapat ditulis sebagai vektor-vektor kolom dalam matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks ini ditulis sebagai

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinan ini diekspansikan dan menghasilkan bentuk

$[x_1 y_2 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3]$

Yang dapat disusun kembali sebagai berikut:

$[- x_2 y_1 + x_1 y_2 - x_3 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3]$

Dengan membandingkan hasil ini dengan luas daerah segitiga, ternyata luas daerah segitiga tadi dapat ditulis sebagai berikut:

$$\text{Luas} = (1/2)\ \text{abs} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 4.3.1:

Jika diketahui tiga titik yang non koliner pada bidang, maka luas daerah dari segitiga ditentukan oleh ketiga titik itu dinyatakan dengan rumus

$$\text{Luas} = (1/2)\ \text{abs} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan garis

Gambar 1 dan teorema 1 memberi ide yang bermanfaat untuk melihat pada masalah yang ada hubungannya, yaitu menemukan persamaan suatu garis melalui dua titik yang diketahui di bidang Euclid. Gambar 1 mengemukakan bahwa luas daerah segitiga berkaitan dengan tiga titik yang koliner akan sama dengan nol. Kedua, Teorema 1 mengemukakan bahwa, dalam keadaan tertentu determinan

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

juga dapat sama dengan nol. Dengan demikian, jika diketaui dua titik

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{, maka semua titik lainnya } \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

yang koliner dengan kedua titik yang diketahui itu harus memenuhi persamaan matriks:

$$\left[\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right] = 0$$

Contoh: Tentukan persamaan suatu garis yang memuat titik-titik (2, 4, 1) dan (3, 1, 1).

Jawab: Dengan menuliskan titik-titik tadi sebagai vektor kolom – vektor kolom, dan dengan menambahkan suatu kolom ketiga yang mewakili semua titik yang koliner dengan titik-titik yang diketahui tadi, kita peroleh suatu persamaan matrix

$$\left[\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ y & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right] =0$$

Selanjutnya determinan kita expansikan dan sederhanakan, dan akan diperoleh

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ y & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4x + 3y + 2 - x - 2y - 12 \quad \rightarrow \quad 3x + y - 10 = 0, \text{ atau}$$

[redacted] $$1 \quad -10 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Teorema 4.1.2 Jika diketahui dua titik

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka persamaan garis yang memuat kedua titik ini ditentukan oleh persamaan matrix

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Perpotongan dua garis

Cara matrix dapat digunakan untuk menemukan titik persekutuan dua garis yang berpotongan pada bidang. Diketahui persamaan-persamaan garis $u_1 x + u_2 y + u_3 = 0$ dan $v_1 x + v_2 y + v_3 = 0$. Koordinat-koordinat dari titik persekutuan dapat ditentukan dengan menggunakan kombinasi linear atau substitusi dan selanjutnya dinyatakan dalam notasi matrix sebagai berikut:

$$x = \frac{(u_2 v_3 - u_3 v_2)}{(u_1 v_2 - u_2 v_1)} = \frac{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} \quad \text{dan} \quad y = \frac{(u_3 v_1 - u_1 v_3)}{(u_1 v_2 - u_2 v_1)} = \frac{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}$$

Suatu kekurangan dari pendekatan ini adalah bahwa dua persamaan ini harus diingat dan dievaluasi secara benar. Suatu pendekatan yang lebih baik akan memerlukan hanya satu persamaan untuk menyajikan kedua koordinat dari titik potong. Dengan menuliskan parameter-parameter garis sebagai elemen-elemen baris dalam persamaan matrix

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

akan menghadirkan suatu penyajian/representasi yang lebih mudah. Dengan melakukan ekspansi menurut baris terakhir, maka persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$a\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} u & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

Dengan membagi oleh determinan pada suku terakhir, diperoleh persamaan berikut:

$$a\frac{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} - b\frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} + c\frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} = 0 \qquad *$$

Ingat bahwa $x = \dfrac{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}$ dan $y = \dfrac{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}$, maka persamaan diatas dapat disederhanakan sebagai $ax + by + c = 0$, dan ditulis dalam bentuk matrix

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Dalam hal ini, bentuk ini lebih daripada bentuk matrix umum untuk persamaan suatu garis, karena parameter-parameter garis [a b c] adalah sembarang, x dan y adalah koordinat-koordinat titik potong dari garis-garis yang diketahui $u_1 x + u_2 y + u_3 = 0$ dan $v_1 x + v_2 y + v_3 = 0$. Hasil ini diformalkan dalam teorema berikut dan sekaligus contohnya.

Teorema

Jika diketahui persamaan-persamaan garis $u_1 x + u_2 y + u_3 = 0$ dan $v_1 x + v_2 y + v_3 = 0$, maka titik potong ini

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ditentukan oleh persamaan

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Yang diperoleh dengan mengekspansi dan menyederhanakan persamaan

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Contoh: Tentukanlah koordinat dari titik potong dari $1x + 1y + 1 = 0$ dan $1x - 1y + 2 = 0$.
Persamaan matrixnya adalah :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Dengan mengexpansikan serta menyederhanakan, maka diperoleh

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 3a - b - 2c = 0, \text{ dan ini dapat dituliskan sebagai}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

Karena vektor kolom $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ bukan menyatakan titik pada bidang euclid z = 1, maka tiap elemen dalam vektor ini dibagi 2, akan menghasilkan titik pada bidang euclid

$$\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, setiap garis yang memuat titik ini harus memenuhi persamaan matrix

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Jadi, oleh karena $1x + 1y + 1 = 0$ dan $1x - 1y + 2 = 0$ melalui titik ini, maka demikian juga semua garis lain $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ akan memenuhi persamaan matrx ini juga.

Suatu perbedaan penting sekarang dapat dibuat antara penggunaan notasi berbentuk

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

1. Bila nilai-nilai yang direpresentasikan oleh vektor baris $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ diketahui, dan nilai-nilai yang direpresentasikan oleh vektor kolom $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ tidak diketahui, misalnya

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Maka notasi ini disamakan ”suatu persamaan garis” dan biasanya digunakan untuk menjawab pertanyaan ” Titik-titik manakah yang terletak pada aris ini?”

2. Bila situasinya dibalik dan nilai-nilai direpresentasikan oleh vektor baris $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ Tidak diketahui sedangkan nilai-nilai yang direpresentasikan oleh vektor kolom

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$ diketahui, misalnya

$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, maka notasi ini disebut ”suatu persamaan dari titik” dan biasanya digunakan untuk menjawab pertanyaan ”Garis-garis manakah yang melalui titik ini?”

Expresi-expresi yang simetris ini diperoleh dengan mengganti istilah-istilah *titik* dan *garis* dikenal dengan nama *dualitas*.

Menyajikan Transformasi-transformasi Linear di Dimensi 2 dengan matrix

Dari semua transformasi dalam geometri, isometri adalah paling mendasar. Isometri artinya berukuran sama. Jika suatu isometri diterapkan ke suatu obyek, maka obyek tersebut berserta bayangannya mempunyai ukuran linear dan ukuran sudut yang sama. Transformasi dikatakan mengawetkan sifat-sifat ini, dan sifat-sifat itu dikatakan invariant di bawah transformasi itu. Mengawetkan ukuran linear dan ukuran sudut menjamin bahwa keliling dan jumlah sudut dan luas juga diawetkan. Akibatnya, obyek dan imagenya dalam isometri ini adalah identik atau kongruen.

Isometri dalam geometri Euclid terdiri dari 3 kategori dan komposisinya: translasi, rotasi, dan refleksi. Dari semua isometri, translasi adalah yang paling mudah untuk dipahami. Dengan adanya operasi translasi setiap titik yang terdapat pada obyek akan berpindah pada jarak yang sama dan dalam arah yang sama sesuai dengan vektor. Di bawah operasi rotasi, setiap titik dipindahkan melalui suatu sudut putar relatif terhadap pusat perputaran. Refleksi memetakan setiap titik ke seberang garis refleksi sejauh suatu jarak yang sama terhadap jarak titik itu ke garis refleksi.

Definisi:
Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan. Suatu *pemetaan* atau *fungsi* dari A ke B adalah suatu aturan yang memasangkan setiap $x \in A$ tepat satu $y \in B$ dan ditulis $y = f(x)$.

Definisi: Suatu pemetaan dari A ke B adalah *onto* jika untuk tiap $y \in B$, terdapat paling sedikit satu $x \in A$ sedemikian sehingga $y = f(x)$.

Definisi: Suatu pemetaan dari A ke B adalah *satu – satu* jika bilamana $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$

Definisi: Jika f: $A \rightarrow B$ adalah suatu pemetaan *satu-satu*, maka $f^{-1} : B \rightarrow A$ adalah *Invers* dari *f, jika* $(f^{-1} * f)(x) = x$ untuk semua $x \in A$ dan $(f^{-1} * f)(y) = y$ untuk semua $y \in B$.

Definisi: Bidang Euclid terdiri dari semua himpunan dari semua titik X sedemikian sehingga $X = (x_1, x_2, 1)$ dimana x_i merupakan anggota dari himpunan bilangan real, ditulis $x_i \in \Re$.

Definisi:Misalkan V adalah suatu Ruang vektor pada $\Re$ dan T adalah fungsi dari V ke V. T adalah suatu transformasi linear dari V, jika $T(u+v) = T(u) + T(v)$ untuk semua vector $u \in V$ dan $v \in V$ dan $T(ku) = kT(u)$ untuk semua vektor $u \in V$ dan skalar $k \in \Re$.

Representasi Transformasi Linear dengan Matrix

Definisi: Suatu *Transformasi Linear T(X) yang dapat dibalik (invertible)* pada bidang Euclid adalah suatu pemetaan *satu-satu, onto* dari titik-titik dari bidang Euclid *onto bidang Euclid.* $\boldsymbol{T}(X) = A{*}X$, dimana $|A|$ titi $\neq 0$ dan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & {}_{33} \end{bmatrix} \text{ dimana } a_{ij} \in \Re$$

Oleh adanya suatu transformasi linear, setiap titik pada bidang (yang memuat) image diasosiasikan dengan satu titik tunggal pada bidang (yang memuat) obyek.Tidak ada satu titikpun yang diabaikan, tidak ada satu titikpun yang dihilangkan. Bidang Euclid tetap lengkap sebelum dan setelah transformasi. Misalnya, gambar berikut ini menunjukkan suatu suatu system koordinat tegaklurus pada bidang Euclid sebelum dan setelah transformasi. Tentu saja, ketika transformasi linear seperti ini diterapkan pada bidang, semua titik yang ada pada bidang akan mengalami transformasi yang sama.

Transformasi-transformasi linear dapat dikomposisikan, satu menyusul yang lain, dalam suatu sekwens (urutan). Sebagai contoh suatu translasi *T* dapat diikuti oleh suatu rotasi *R*. Dalam notasi fungsi, komposisi yang sama dituliskan sebagai

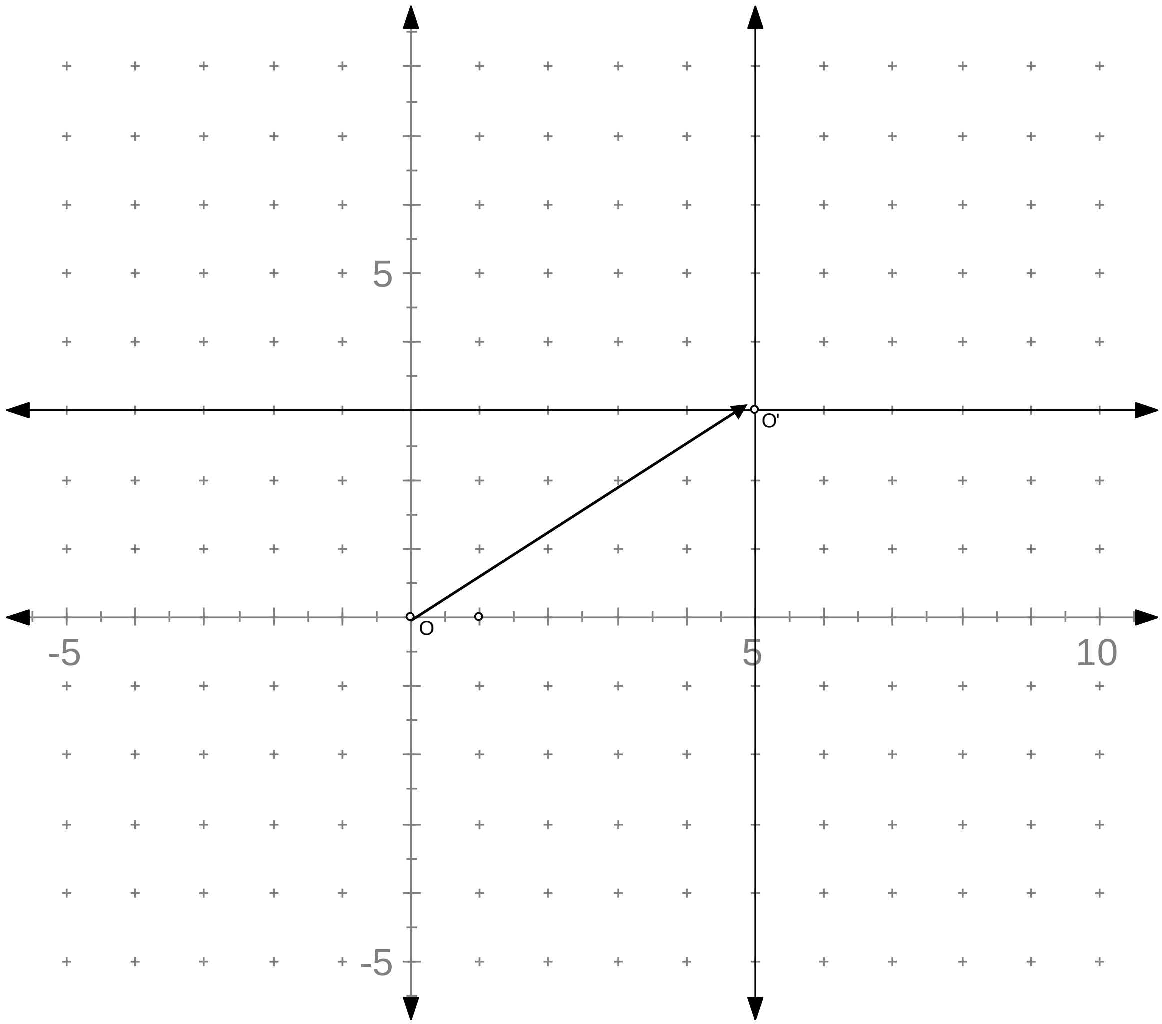
$$RT\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teorema:

Komposisi dari dua transformasi limear pada suatu bidang adalah suatu transformasi linear juga pada bidang itu.

Menurut definisi tentang ruang vektor, T adalah suatu transformasi linear pada bidang jika $T(u + v) = T(u) = T(v)$ dan $T(ku) = kT(u)$ untuk semua titik

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } k \text{ adalah bilangan real.}$$



Kita definisikan dua transformasi linear T_1 dan T_2 sebagai berikut:

$$T_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ c_1 & d_1 & f_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } T_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & e_2 \\ c_2 & d_2 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Komposisi T_1T_2 dapat dihitung sebagai

$$T_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ c_1 & d_1 & f_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & e_2 \\ c_2 & d_2 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 & a_1e_2 + b_1 f_2 + e_1 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 & c\ e_2 + d_1 f_2 + f_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Masing-masing yang menunjukkan perkalian dan jumlah adalah sebuah bilangan real, tidaka ada yang sama. Karena penjumlahan dan perkalian dalam bilangan real adalah tertutup, maka masing-masing entri ini adalah bilangan real, jika dihitung. Jadi komposisi

$T_1T_2\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ dapat ditulis kembali sebagai

$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$, dimana $\boldsymbol{a, b, c, d, e, f} \in \Re$

Jika kita misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

satu-satunya syarat yang harus dipenuhi adalah $|A| \neq 0$. Untuk menunjukkan kebenaran hal ini diperlukan manipulasi sejumlah symbol.

Pengalaman-pengalaman dengan transformasi linear dalam dunia nyata menyarankan bahwa paling sedikit beberapa transformasi linear dapat dibalik. Misalnya, orang dapat menggeser atau memutarkan suatu obyek, kemudian mengembalikannya ke posisi semula. Dalam matematika, pengertian pengembalian ini (*reversibility*) ekivalen dengan invers dari suatu fungsi f dan ditulis f^{-1}.

Jika

$$A = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ adalah suatu transformasi linear, A^{-1} ditulis

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Teorema:

Diketahui suatu transformasi linear T , terdapat suatu transformasi invers yang berkorespondensi dengan T, yaitu T^{-1} sedemikian sehingga $TT^{-1} = T^{-1}T = I$, dimana I adalah transformasi identitas.

Dalam Aljabar linear kita tahu bahwa suatu matrix A mempunyai suatu invers jika $|A| \neq 0$.

Bayangan suatu titik oleh suatu transformasi linear.

Dengan menggunakan notasi matrix, bayangan dari suatu titik dikarenakan suatu transformasi linear yang diketahui didefinisikan sebagai berikut.

Definisi: Diketahui suatu transformasi linear

$$A = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bayangan dari titik

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

oleh transformasi A disajikan sebagai

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by+e \\ cx+dy+f \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Contoh: Persamaan matrix

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Digunakan untuk menemukan bayangan dari suatu titik dikarenakan suatu transformasi linear. Persamaan ini juga ditulis sebagai $AX = X'$. Misalnya, bayangan dari titik

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oleh transformasi linear

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dihitung sebagai $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan ditulis sebagai

$$\mathrm{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teorema:

Diketahui suatu transformasi linear

$$T = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dan suatu titik

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Invers dari operasi T dinyatakan oleh

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} & \frac{bf-de}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & \frac{-af+ce}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan perkalian, diperoleh $TT^{-1} = T^{-1}T$ = I.

Contoh: Diketahui Transformasi linear

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan rumus (*) pada teorema diperoleh $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$TT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bayangan suatu garis oleh suatu transformasi linear.

Menemukan bayangan dari suatu garis pada suatu transformasi linear memerlukan pertimbangan tambahan dan menimbulkan hasil yang menarik.

Teorema 4.2.4

Bayangan dari garis $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$ oleh transformasi linear

$$A = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diberikan oleh persamaan $uA^{-1} = ku'$

Suatu garis u dapat disajikan dalam bentuk matrix sebagai

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Bayangan dari garis $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$ oleh transformasi linear S dapat direpresentasikan sebagai $uS = u'$. Karena S adalah transformasi linear, ia harus mempunyai bentuk umum yang sama seperti matrix transformasi untuk titik-titik

$$A = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Argumentasi berikut ini adalah mengenai menurunkan **S**, *matrix transformasi garis*, yang dinyatakan dalam **A** (*matrix transformasi titik*).

1. Karena u dan u' adalah garis-garis, $uX = 0$ dan $u'X' = 0$
2. Karena itu $uX = u'X'$
3. Karena X' adalah bayangan dari X *(oleh A)*, maka $AX = X'$

4. Subsitusi 3 ke 2, akan menghasilkan $u(X) = u'(AX) \rightarrow (u)X = (u'A)X$
5. Karena itu $u = u'A$
6. Kalikan kedua ruas persamaan dari sebelah kanan oleh A^{-1} menghasilkan $uA^{-1} = ku', k \in \Re$, himpunan bilangan real.
7. Jadi, matrix *transformasi garis S,* adalah invers dari matrix *transformasi titik*, A (***transformasi terhadap garis = transformasi terhadap tiap titik pada garis itu***)

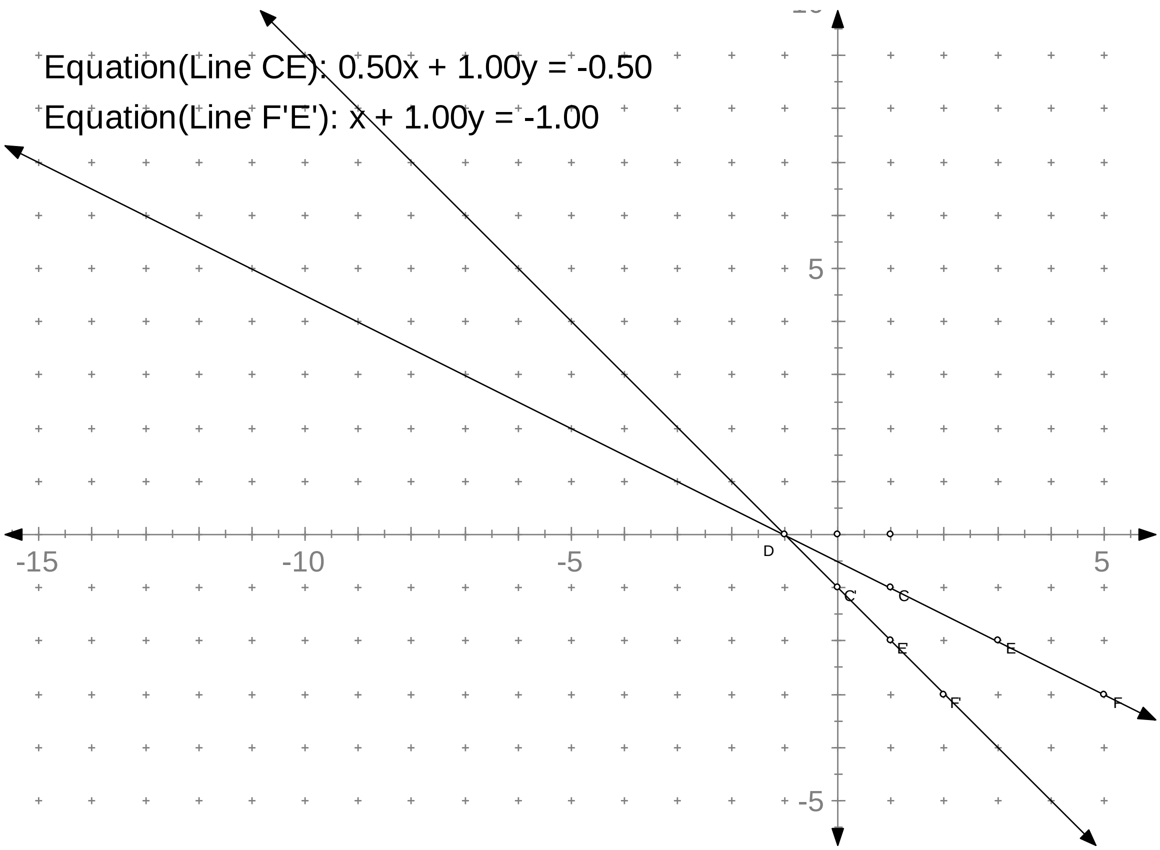
Contoh: Diketahui transformasi linear

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan suatu garis $u = [\;\; 2 \;\; 1]$, tentukanlah bayangan u di bawah tansformasi linear ini. Menurut teorema, bayangan dari u oleh transformasi ini ditentukan oleh

$$[\;\; 2 \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow k[\;\; 1 \;\; 1]$$

Dengan kata lain, garis dengan persamaan $x + 2y + 1 = 0$ dipetakan **onto** menjadi garis dengan persamaan $x + y + 1 = 0$, atau suatu perkalian darinya.



Isometri-isometri Langsung: Translasi dan Rotasi

Merepresentasi Translasi

Persamaan matrix untuk **translasi terhadap sebuah titik** adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+e \\ y+f \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Gambar 4.3.1 memperlihatkan dua daerah dari matrix translasi. Masing-masing daerah menyajikan makna berbeda mengenai hakekat transformasi yang dibahas dan detail-detail yang khusus mengenai gerakan/perpindahan yang diakibatkan. Dalam hal ini matrix identitas 2×2 di bagian pojok kiri atas menunjukkan bahwa pergerakan itu sama sekali tidak mengubah bentuk atau orientasi dari obyek-obyek di bidang. Unsur-unsur dalam kolom yang diarsir diasosiasikan dengan perpindahan dari koordinat *x* dan koordinat *y* dari titik-titik pada bidang. Seperti yang terlihat pada vektor

$$\begin{bmatrix} x+e \\ y+f \\ 1 \end{bmatrix}$$

Koordinat-*x* dari setiap titik digeserkan sejauh *e* unit dan koordinat *y* digeser sejauh *f* unit. Inilah yang orang harapkan pada suatu transformasi translasi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$ **Gambar 4.3.1**

Secara konseptual, invers dari translasi yang direpresentasikan sebagai

$$\begin{bmatrix} x+e \\ y+f \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah translasi

$$\begin{bmatrix} x-e \\ y-f \\ 1 \end{bmatrix}$$

yaitu lawan dari menggusur sebuah obyek sejauh dan dalam arah tertentu haruslah sebuah gusuran yang berlawanan arah dengan jarak yang sama. Hal ini menyimpulkan bahwa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e \\ 0 & 1 & -f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 4.3.1

Diketahui suatu translasi

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformasi inversnya adalah:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e \\ 0 & 1 & -f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh: 4.3.1 Diketahui matrix translasi

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers dari translasinya adalah:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix-matrix ini jika dikalikan, akan menghasilkan matrix identitas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invarians pada Translasi

Pengalaman-pengalaman dalam keseharian memperlihatkan bahwa ukuran-ukuran panjang, keliling, sudut, dan luas tidak berobah oleh adanya translasi (invarian). Sifat-sifat lainnya tidak demikian. Misalnya, jika anda menggusur sebuah obyek di atas meja, anda menggusur keseluruhan obyek. Jika suatu titik pada obyek itu tetap (invarian), dengan memindahkan sisa lain dari obyek itu akan mengakibatkan apakah benda itu sobek atau melar. Analisis geometri menyimpulkan bahwa translasi tidak memiliki satu titik invarian pun. Pendekatan analitis yang didasarkan pada aljabar matrix pun memberikan hasil yang sama.

Teorema 4.3.2.

Translasi-translasi yang bukan identitas tidak memiliki titik invarian.

Berdasarkan definisi, titik invarian tidak bergerak dalam suatu transformasi. Dengan kata lain,

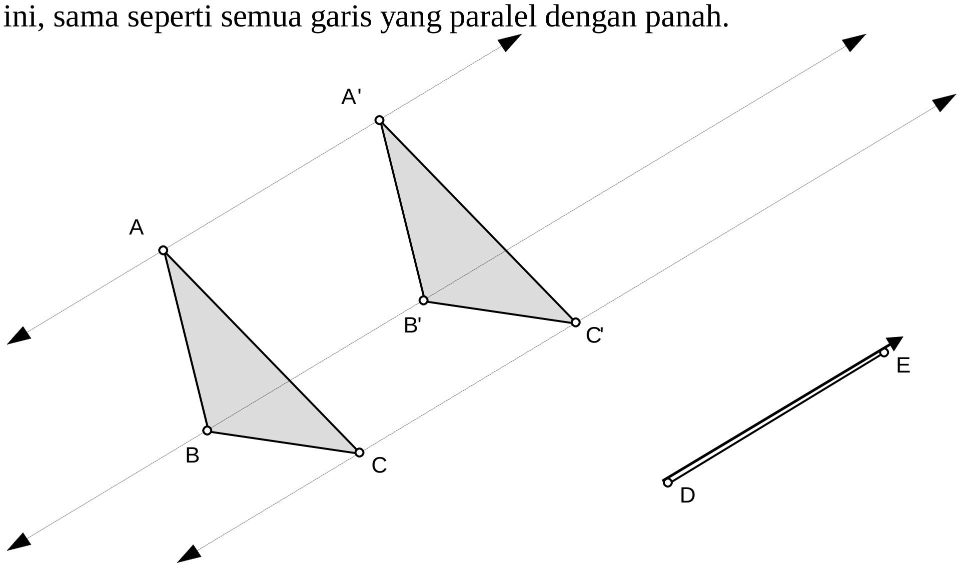
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dalam pengertian translasi, hal ini berarti

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan ekspansi dan menyederhanakan suku-suku, kita peroleh $x + e = x$ dan $y + f = y$, dan ini berarti $e = 0$ dan $f = 0$. Akibatnya, translasi yang bukan identitas tidak memiliki titik invariant.

Pada beberapa transformasi linear, garis-garis dipetakan pada dirinya sendiri. Dalam hal ini dikatakan bahwa *garis-garis itu invariant* pada transformasi. Misalnya, suatu transformasi dapat menggusur titik-titik sepanjang suatu garis yang diketahui dengan jarak tertentu. *Titik-titik tersebut tidak invariant*, namun garis *yang ditentukan oleh titik-titik itu invariant*. Pada gambar berikut, image dari ΔABC pada translasi yang ditetapkan oleh panah adalah $\Delta A'B'C'$. Garis putus-garis putus yang diperoleh dengan cara menghubungkan setiap titik dengan bayangannya adalah invariant dalam translasi ini, sama seperti semua garis yang paralel dengan panah.



Gambar 4.3.2.

Manakala suatu transformasi linear telah benar-benar dipahami, pendekatan secara geometris biasanya lebih mudah serta cepat dalam mengidentifikasikan garis-garis invariant. Bila transformasi tidak dipahami dengan baik, diperlukan pendekatan analitis untuk mengidentifikasikan garis-garis invariant. Teorema berikut ini menetapkan suatu metode untuk mengidentifikasikan garis-garis invarian yang berasosiasi dengan suatu transformasi linear.

Teorema 4.3.3:

Setiap translasi mempunyai garis-garis invariant

Garis-garis invariant tidak berpindah dalam suatu transformasi, karena itu $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \end{bmatrix}$, dimana $k \in \Re$ untuk memungkinkan ada bentuk-bentuk ekivalen bagi garis yang sama. Teorema 4.2.4 dan contoh 4.3.1 menyimpulkan bahwa

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -e \\ 0 & 1 & -f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

Jika bentuk ini diexpansikan kemudian disederhanakan suku-sukunya, maka diperoleh:

1. $u_1 = ku_1$
2. $u_2 = ku_2$
3. $u_1(-e) + u_2(-f) + u_3 = ku_3$

Jika k = 1, observasi 3 dapat disederhanakan menjadi $u_2 f = -u_1 e$, atau

$$u_2 = \left(\frac{-e}{f}\right)u_1$$

Hasil ini membawa kita pada bentuk solusi berikut

$$\begin{bmatrix} u_1 & \left(\frac{-e}{f}\right)u_1 & u_3 \end{bmatrix}$$

Bentuk ini ditulis kembali sebagai berikut

$$u_1 x + \left(\frac{-eu_1}{f}\right)y + u_3 = 0$$

Dan ditulis lagi dalam bentuk kemiringan, dan titik potong sumbu *y*, sebagai:

$$y = \left(\frac{f}{e}\right)x + \left(\frac{f}{u_1 e}\right)u_3$$

ini menjadi jelas bahwa semua garis invariant mempunyai kemiringan yang sama dengan kemiringan dari panah. Pilihan u_3 adalah independen terhadap u_1, yang mengarah pada tak hingga titik-titik potong sb y dalam bentuk

$$\left(\frac{f}{ue_1}\right)u_3$$

Dengan demikian panah dan semua garis yang sejajar dengannya invariant pada translasi.

Catatan: Untuk menunjukkan bahwa translasi selalu mempunyai garis-garis invarian
Periksalah gradiennya.

Contoh. Diketahui matrix translasi

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah semua garis invariant pada transformasi ini. Dengan menggunakan Teorema 4.3.2

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

Setelah expansi dan menyederhanakan suku-suku, diperoleh

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & (-7u_1 + 3u_2 + u_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_1 & ku_2 & ku_3 \end{bmatrix}$$

Dengan memilih $k = 1$, diperoleh hubungan

$$u_2 = \left(\frac{7}{3}\right)u_1$$

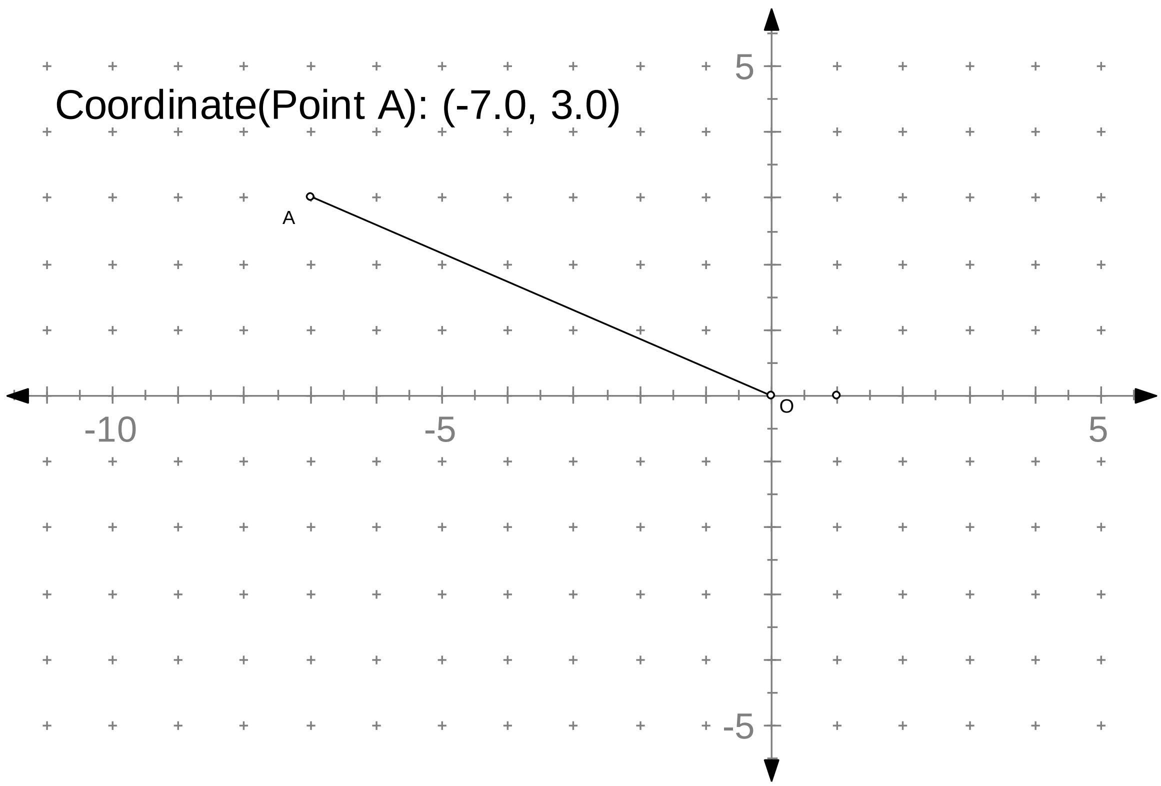
Dan ini menghasilkan garis-garis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} u_1 & \left(\frac{7}{3}\right)u_1 & u_3 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan bentuk aljabar dan untuk $u_1 = 1$, persamaan garis adalah:

$$x + \left(\frac{7}{3}\right) y + u_3 = 0 \quad \text{atau} \quad y = \left(\frac{-3}{7}\right) x + \left(\frac{-3}{7}\right) u_3$$

Dengan demikian semua garis yang paralel terhadap panah (slide arrow) adalah invariant.



Sejumlah sifat-sifat geometri yang lain dari titik dan garis juga diawetkan dalam suatu transformasi linear, termasuk jarak antara titik-titik, luas daerah poligon. Inilah yang diharapkan dalam suatu translasi.

Teorema 4.3.4

Jarak invariant dalam translasi

Jarak antara dua titik pada bidang Euclid (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dinyatakan dalam

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dengan menghitung jarak antara bayangan-bayangan dari titik-titik ini, (x_1', y_1') dan (x_2', y_2') maka akan diperoleh

$$d = \sqrt{\left([x_2 + e] - [x_1 + e]\right)^2 + \left([y_2 + f] - [y_1 + f]\right)^2}$$

Jika persamaan ini disederhanakan, maka akan diperoleh

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dengan demikian, jarak diawetkan dalam transformasi

Teorema 4.3.5

Luas invariant dalam translasi

Berdasarkan Teorema 4.1.1. luas daerah yang ditentukan oleh tiga titik sembarang yang tidak segaris pada bidang, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ adalah

$$\text{Luas} = (1/2)\ \text{abs}\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

Setelah translasi, luas daerah yang ditentukan oleh bayangan dari ketiga titik ini adalah:

$$\text{Luas} = (1/2)\ \text{abs}\left(\begin{vmatrix} (x_1 + e) & (x_2 + e & (x_3 + e) \\ (y_1 + f) & (y_2 + f) & (y_3 + f) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

Ternyata kedua luas ini ekivalen.

Contoh: Diketahui matrix translasi

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dan titik-titik (1,1), (2,5) dan (6,2). Tunjukkanlah bahwa luas yang ditentukan oleh titik-titik ini tidak berubah oleh adanya translasi T. Berdasarkan persamaan 4.1.1, luas daerah yang ditentukan oleh ketiga titik ini adalah

$$\left(\frac{1}{2}\right) abs\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 9.5$$

Bayangan dari titik-titik yang diketahui oleh T diperoleh dari

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 13 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luas daerah segitiga yang ditentukan oleh ketiga titik ini adalah

$$\left(\frac{1}{2}\right) abs\left(\begin{vmatrix} 8 & 9 & 13 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 9.5$$ Jadi luas daerah kedua segitiga itu sama.

Merepresentasi Rotasi

Persamaan matrix untuk rotasi terhadap sebuah titik dengan pusat titik asal dan melalui suatu sudut θ adalah

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dimana sudut putar yang berlawanan dengan arah jarum jam adalah positif. Matrix 2×2 pada pojok kiri atas berikut ini akan mereorientasikan obyek di bidang. Kolom ketiga pada matrix itu menyatakan titik pusat rotasi, yaitu titik asal koordinat.

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 4.3.6

Diketahui rotasi pada titik asal

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers dari R adalah

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh:

Tentukan bayangan dari titik (1,3) oleh rotasi 30^0 berlawanan dengan putaran jarum jam berpusat di titik asal. Rotasi ditentukan oleh

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^0 & -\sin 30^0 & 0 \\ \sin 30^0 & \cos 30^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bayangan dari titik yang diketahui adalah

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Operasi invers dapat diaplikasikan pada bayangan dari titik untuk mengembalikannya pada lokasi semula adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Invariant pada suatu rotasi

Secara geometri paling sedikit ada satu titik invariant dalam suatu rotasi, yaitu titik pusat rotasi. Karena tiap titik lainnya mengalami perubahan posisi yang ditentukan oleh jarak dari titik pusat perputaran dan sudut putar, tidak ada lagi titik-titik lain yang invariant. Fakta ini secara mudah dapat diperlihatkan secara analitis.

Teorema 4.3.7.Titik pusat koordinat sebagai pusat rotasi adalah invariant terhadap rotasi

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bayangan dari titik asal (0,0) dalam rotasi disajikan oleh

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk menunjukkan bahwa titik asal adalah satu-satunya titik invariant (bila θ bukan suatu kelipatan π , expansikan persamaan matrix

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $x\cos\theta - y\sin\theta = x$ dan $x\sin\theta + y\cos\theta = y$. Dengan menyelesaikan kedua persamaan ini untuk memperoleh *y*,

$$y = \frac{x(\cos\theta - 1)}{\sin\theta} = \frac{-x\sin\theta}{\cos\theta - 1}$$

Dengan menyamakan kedua persamaan ini dan melakukan perkalian menyilang akan diperoleh persamaan $x(\cos\theta - 1)^2 = -x(\sin\theta)^2$. Karena $(\cos\theta - 1)^2$ dan $(\sin\theta)^2$ dua-duanya positif, satu-satunya nilai x yang memenuhi persamaan adalah x = 0. Substitusikan nilai ini ke dalam persamaan untuk memperoleh y, ditemukan bahwa y = 0. Jadi satu-satunya titik invariant adalah titik asal koordinat.

Secara geometri. Setiap garis di bidang direorientasikan dalam suatu rotasi, sehingga tidak akan pernah ada garis invariant selain dari perputaran dengan sudut putar adalah kelipatan 180^0. Hal ini dipertegas dalam teorema berikut.

Teorema 4.3.8

Rotasi-rotasi (dimana θ bukanlah kelipatan π) tidak mempunyai garis invariant.

Sendainya ada garis invariant, maka garis ini tidak berpindah dalam suatu transformasi, karena itu harus berlaku $[u_1 \quad u_2 \quad u_3] = k[u'_1 \quad u_2' \quad u_3'], k \in \Re$ agar memungkinkan bentuk-bentuk eqivalen bagi garis yang sama. Teorema 4.3. 6 menyimpulkan bahwa

$$[u_1 \quad u_2 \quad u_3]\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = k[u'_1 \quad u_2' \quad u_3']$$

Dengan expansi dan penyederhanaan terhadap suku-suku, diperoleh hasil-hasil berikut:

1. $u_1\cos\theta - u_2\sin\theta = ku_1$
2. $u_1\sin\theta + u_2\cos\theta = ku_2$
3. $u_3 = ku_3$

Jika $u_3 \neq 0, k = 1$. Maka hasil 1 dapat disederhanakan menjadi

$$u_2 = \left(\frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\right)u_1, \text{dengan } \theta \neq n\pi$$

Dengan demikian diperoleh solusi-solusi berbentuk

$$\left[u_1 \quad \left(\frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\right)u_1 \quad u_3\right]$$

Koefisien suku kedua jelas bukan suatu konstanta, sehingga obyek yang digambarkan ini bukanlah suatu garis. Jadi tidak ada garis yang diawetkan dalam suatu tranformasi yang merupakan rotasi.

Rotasi-rotasi adalah transformasi-transformasi yang umum dalam kehidupan keseharian. Pengalaman kami menyarankan bahwa jarak dan luas diawetkan juga dalam rotasi. Teorema-teorema berikut ini memformalkan kesan-kesan tersebut.

Teorema 4.3.9

Jarak adalah invariant pada rotasi

Contoh:

Tentukan jarak antara titik (1,0) dan (0,1) dan bayanganya pada suatu rotasi 90^0 searah dengan perputaran jarum jam. Dengan menggunakan rumus jarak, jarak antara (1,0) dan (0,1) adalah $\sqrt{2}$. Bayangan dari titik-titik ini oleh rotasi ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan rumus jarak terhadap titik-titik ini juga akan menghasilkan $\sqrt{2}$. Jadi jarak antara titi-titik sebelum dan sesudah rotasi tetap sama.

Teorema 4.3.10

Luas adalah invariant terhadap rotasi.

Contoh: Diketahui matrix rotasi

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan titik (1,1), (2, 5) dan (6, 2). Periksalah apakah luas daerah yang ditentukan oleh ketiga titik ini awet oleh adanya rotasi oleh R. Berdasarkan persamaan 4.1, daerah yang ditentukan oleh titik-titik ini ditentukan oleh

$$\left(\frac{1}{2}\right) abs\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 9.5$$

Bayangan dari titik-titik yang diketahui oleh adanya rotasi R, ditentukan oleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luas daerah segitiga yang ditentukan oleh titik-titik ini adalah

$$\left(\frac{1}{2}\right) abs\left(\begin{vmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 9.5$$

Jadi daerah yang ditentukan oleh kedua segitiga ini adalah sama.

Isometri-isometri tidak langsung

Merepresentasi refleksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Matriks refleksi}$$

Persamaan matrix untuk refleksi sebuah titik terhadap sumbu x ditentukan oleh:

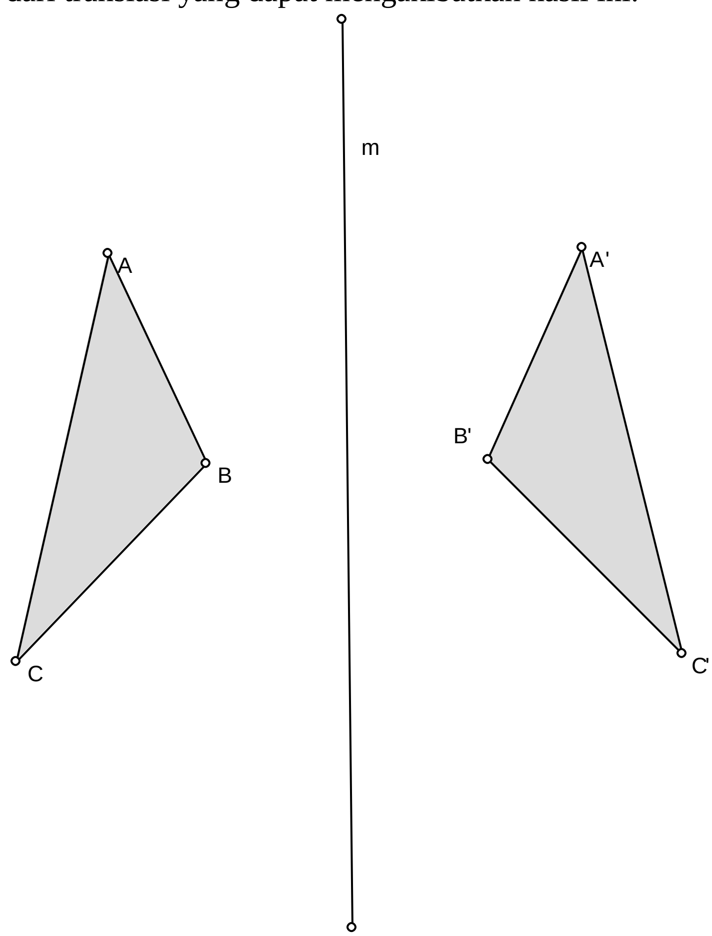
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan adanya transformasi ini, setiap titik dipetakan onto ke titik yang mempunyai koordinat x yang sama, tetapi koordinat y nya berlawanan tanda. Akibatnya, setiap titik di atas sumbu *x* dipetakan ke titik yang berkorespondensi di bawah sumbu *x*, dan sebaliknya.

Contoh: Tentukan bayangan dari titik (1, 3) oleh refleksi terhadap sumbu *x*. Persamaan matriks nya adalah:

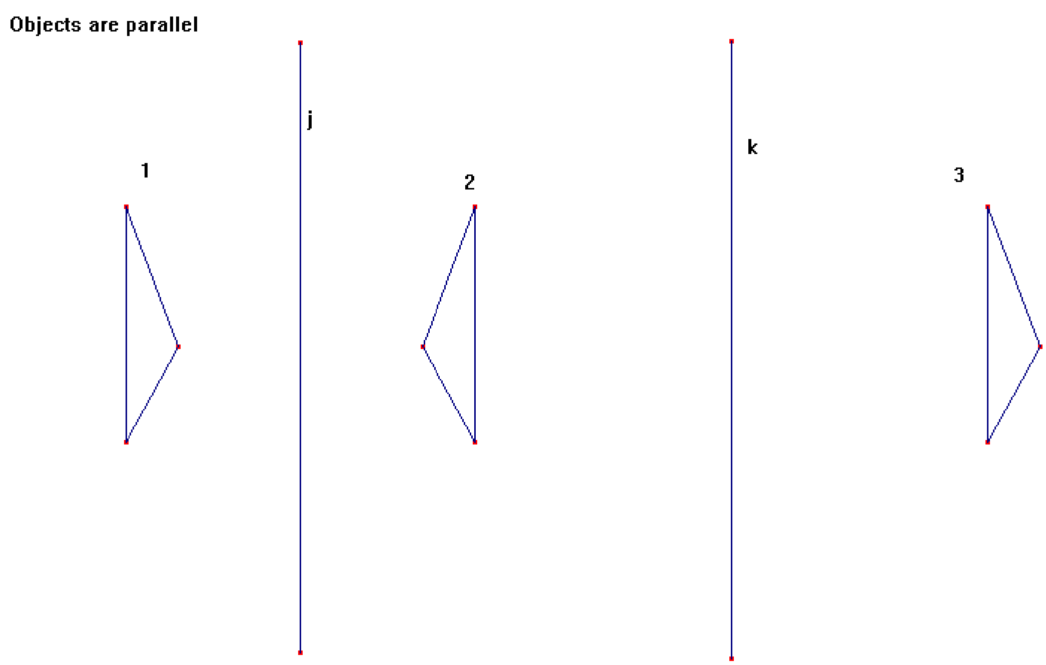
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Secara geometri, oleh refleksi, sebuah obyek dan bayangannya akan kongruen.
Akan tetapi ada suatu orientasi yang terbalik. Dimulai dari A, bergerak keliling obyek searah dengan putaran jarum jam, urutan titik-titik sudut adalah *A*-*B*-*C*. Dimulai dari *A'*, dan mengulangi prosedur, urutan titik-titik sudut adalah : *A'*-*C'*-*B'*. Tidak ada kombinasi dari translasi yang dapat mengakibatkan hasil ini.



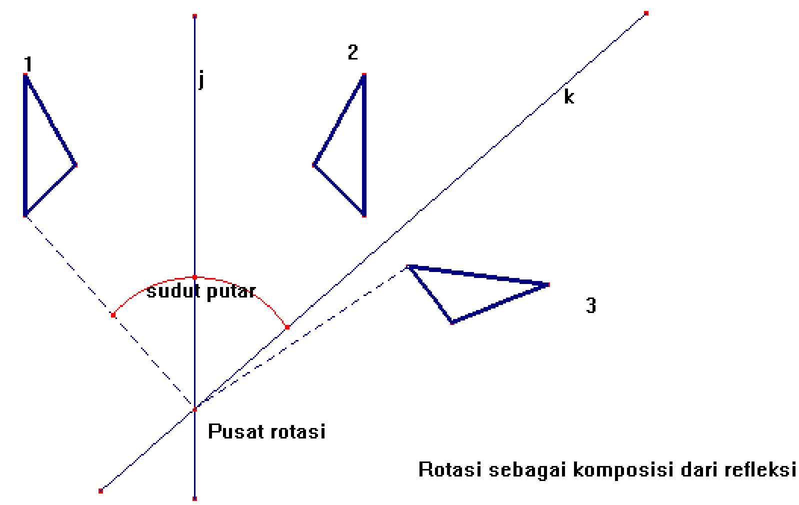
Gambarlah sebuah segitiga kedua yang dipotong oleh sumbu refleksi. Tentukanlah bayangan obyek ini oleh transformasi.

Perbedaan yang jelas antara transformasi refleksi dengan translasi dan rotasi sangat nyata. Misalnya, baik translasi maupun rotasi dapat diselesaikan dengan menggunakan komposisi dari refleksi-refleksi. Gambar berikut menunjukkan dua garis refleksi yang paralel, *j* dan *k* ,dan deretan dari tiga segitiga. Jika segitiga 1 dipandang sebagai obyek, refleksinya terhadap garis *j* adalah segitiga 2. Refleksi dari segitiga 2 terhadap garis *k* adalah segitiga 3. Jelas bahwa segitiga 3 adalah translasi dari segitiga 1. Dengan menggunakan logika yang sama, segitiga 1 dapat dioandang sebagai bayangan dari segitiga 3 oleh karena dua refleksi yang berturut-turut, mula-mula pada garis *k* dan kemudian terhadap garis *j*. Terdapat suatu hubungan sederhana antara panjang dari vektor dengan jarak antara garis-garis refleksi. Untuk menemukan hubungan itu, lakukanlah sebagai suatu latihan.



Gambarlah suatu segitiga kedua yang dipotong oleh garis refleksi *j*.Tentukanlah bayangan dari segitiga itu oelh adanya komposisi dari transformasi-transformasi.

Gambar berikut ini menunjukkan dua garis refleksi yang berpotongan *j* dan *k*, dan serangkaian tiga buah segitiga. Pandang segitiga pertama sebagai obyek, refleksinya terhadap garis *j* adalah segitiga 2. Refleksi dari segitiga 2 terhadap garis *k* adalah segitiga 3. Sangat jelas segitiga 3 adalah rotasi dari segitiga 1. Dengan menggunakan logika yang sama, segitiga 1 dapat dipandang sebagai bayangan dari segitiga 3 oleh adanya dua refleksi yang berturutan, mula-mula terhadap garis *k*, kemudian terhadap garis *j*. Sama seperti pada pencerminan terhadap dua garis yang paralel, ada suatu relasi sederhana dan sudut yang dibentuk oleh dua garis refleksi. Untuk menemukan hubungan itu, lakukanlah sebagai suatu latihan.



Gambarlah suatu segitiga kedua yang dipotong oleh garis refleksi *j*. Temukanlah bayangan dari segitiga itu oleh adanya komposisi dari transformasi-transformasi.

Kenyataan bahwa translasi-translasi dan rotasi-rotasi keduanya dapat ditulis sebagai komposisi dari refleksi-refleksi, sementara tidak ada kombinasi antara translasi dan/atau refleksi yang yang sama dengan suatu refleksi, menempatkan refleksi sebagai suatu ”atom” dari isometri. Semua isometri dapat ditulis sebagai suatu komposisi dari refleksi-refleksi. Untuk alasan ini, secara matematika, refleksi lebih fundamental daripada translasi dan rotasi.

Refleksi-refleksi juga lebih menarik dan menyenangkan dalam arti personal

Dengan berpikir secara geometri, jelas bahwa setiap refleksi adalah invers dari dirinya sendiri. Transformasi dengan merefleksikan suatu titik yang diketahui terhadap suatu garis akan ”ditiadakan” dengan cara merefleksikan titik itu lagi . Teorema berikut ini menyajikan suatu notasi.

Teorema:

Diketahui suatu refleksi terhadap sumbu – *x*

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers dari F adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti dari teorema ini dibiarkan sebagai latihan.

Invarian pada Refleksi

Eksistensi titik-titik dan garis-garis invariant pada suatu refleksi dapat diselidiki secara geometri maupun secara analitis. Dengan cara berpikir geometri, jelaslah bahwa titik-titik ysng terletak pada garis refleksi tidak berpindah oleh adanya transformasi ini. Mereka invariant. Oleh karena dalam transformasi ini, setiap titik yang terletak pada garis refleksi adalah tetap, garis ini dinamakan *point wise invariant*. Demikian juga, semua garis yang tegaklurus terhadap garis refleksi adalah invariant, sekalipun tidak *point wise invariant.* Sebagai contoh, dalam kasus refleksi terhadap sumbu x, bayangkan semua titik pada garis $x =$ 1, melncur melalui satu dengan lainnya ketika mereka melewati sumbu x untuk menempati posisinya yang baru, semuanya koliner. Jadi, ketika titik-titik secara individual tidak invariant, tetapi garis dimana titik-titik itu terletak tidak mengalami perpindahan. Garis ini invariant. Penting untuk diingat bahwa kedua pasangan garis invariant ini orthogonal satu terhadap lainnya.

Teorema:

Titik-titik paada sumbu x adalah invariant pada refleksi

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk semua titik invariant (x , y, 1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan ekspansi dan menyederhanakan persamaan, diperoleh $x = x$ dan $y = y$. Interpretasi dari temuan ini adalah x tidak terbatas, tetapi tidak terbatas, tetapi $y = 0$.

Dengan kata lain, semua titik berbentuk (*x, 0,* 1) adalah invariant. Semua titik seperti itu terletak pada sumbu *x*.

Teorema: Sumbu *x* an semua garis yang tegaklurus padanya adalah invariant pada refleksi

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Garis-garis invariant tidak berpindah dalam suatu transformasi, sehingga

$[u_1 \;\; u_2 \;\; u_3\,] = k\,[\,u_1' \;\; u_2' \;\; u_3']$

Dengan $k \in \Re$ untuk memberi peluang bagi bentuk ekivalen dari garis yang sama. Sehingga,

$$[u_1 \;\; u_2 \;\; u_3\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = k\,[\,u_1 \;\; u_2 \;\; u_3]$$

Dengan mengekspansi dan menyederhanakan suku-suku, diperoleh hasil berikut ini:

1. $u_1 = k\,u_1$
2. $-u_2 = k\,u_2$
3. $u_3 = k\,u_3$.

Jika k = 1, maka observasi 2 dapat disederhanakan menjadi $u_2 = 0$. Dan ini menghasilkan

$$[u_1 \;\; 0 \;\; u_3\,] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Ini juga dapt ditulis sebagai $x = -u_3/u_1$. Ini adalah persamaan dari garis yang tegaklurus pada sumbu x. Oleh karena $u_3$tidak terbatas, maka persamaan ini merepresentasikan semua garis yang tegaklurus pada sumbu x . Jika k = 1, analisis yang sama akan mengarah pada bentuk

$[0 \;\; u_3 \;\; 0\;] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ yang juga dapat ditulis sebagai $y = 0$. Persamaan ini adalah sumbu x

Teorema: Jarak adalah invarian dalam transformasi refleksi

Teorema: Luas adalah invarian dalam transformasi refleksi

KOMPOSISI DAN ANALISIS TRANFORMASI

Transformasi-transformasi yang dipelajari sampai pada bagian ini adalah yang spesial: Rotasi dengan titik pusat rotasi adalah titik asal koordinat, dan bukan rotasi pada sembarang titik P; refleksi terhadap sumbu *x* , dan bukan refleksi terhadap sembarang garis *r*, *dst.* Matriks-matriks yang berkaitan dengan hal-hal spesial ini jika dibandingkan dengan yang lainnya, adalah matriks – matriks yang sederhana. Dalam bab ini kita selidiki penggunaan matriks-matriks sederhana sebagai *building block* dalam mengkonstruksi transformasi-transformasi yang lebih kompleks dan matriks-matriksnya. Strategi yang umum digunakan adalah mengungkapkan transformasi yang diinginkan sebagai suatu komposisi dari matriks-matriks sederhana, serta inversnya. Misalnya, rotasi pada bidang dengan titik pusat rotasi (*e*, *f*) dapat diperoleh melalui komposisi dari tiga gerakan pada bidang Euclid:

T: Translasikan titik pusat rotasi ke titik asal.

R: Rotasi pada pusat rotasi yang sekarang adalah titik asal

T^{-1}: Translasikan titik pusat rotasi ke lokasinya semula yaitu (*e*, *f*).

Untuk suatu kumpulan titik X, komposisi dari matrik-mariks itu dapat ditulis sebagai berikut: $T^{-1}RTX = X^{-1}$, atau

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e \\ 0 & 1 & -f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan perkalian dari kiri ke kanan, diperoleh :

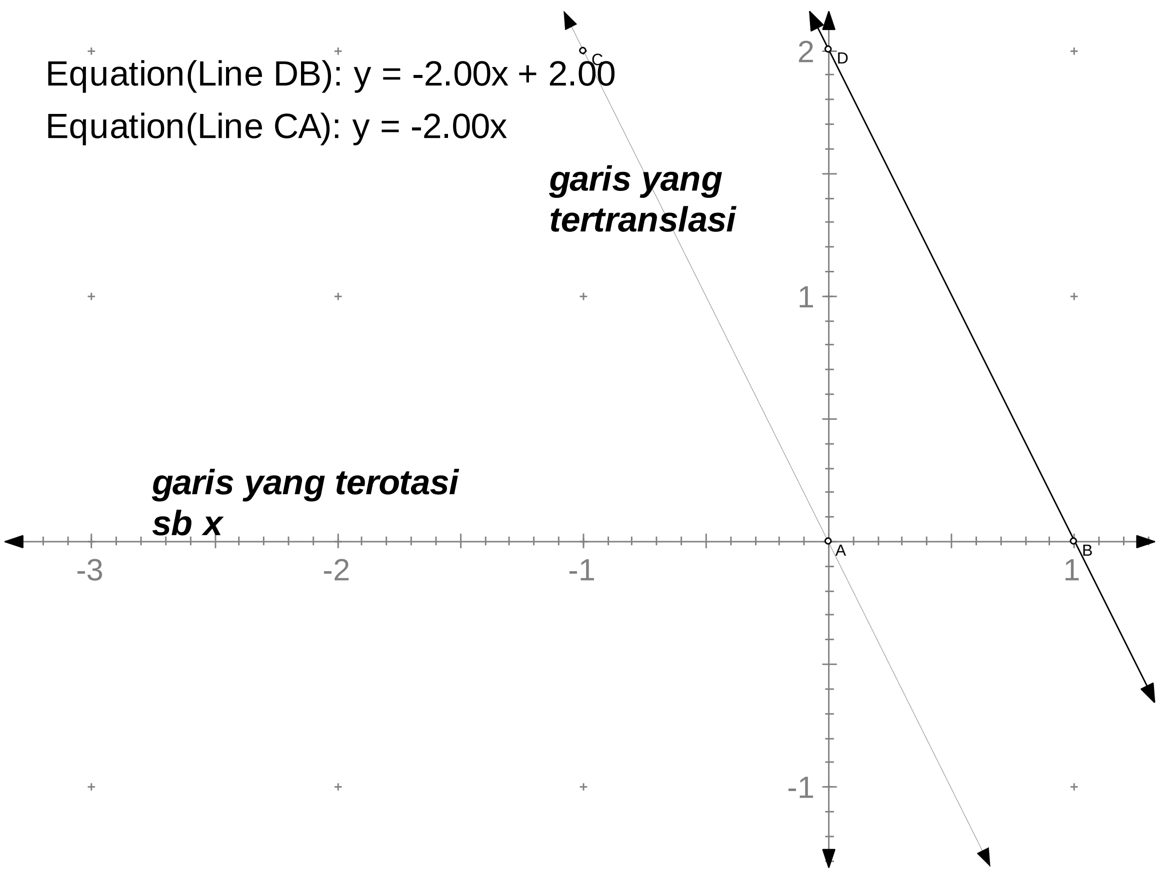
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & e(1-\cos\theta) + f\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -e\sin\theta + f(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ini adalah rumus umum untuk rotasi dengan pusat (e,f), dan diformalkan dalam teorema berikut. Karena kolom ketiga terlihat rumit, banyak mahasiswa matematika lebih suka menggunakan *komposisi matriks* untuk menyatakan rotasi.

Teorema: Diketahui titik pusat rotasi adalah (e,f), dan sudut putar adalah θ, tranformasi rotasinya diberikan oleh:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & e(1-\cos\theta)+f\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -e\sin\theta+f(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Menyajikan Refleksi sebagai komposisi dari matriks



Sudut putar

Pendekatan yang sama dapat ditempuh untuk merepresentasikan suatu refleksi terhadap suatu garis yang bukan sumbu x. Gambar di atas ini menunjukkan suatu garis dengan persamaan y =-2.0x + 2.0.

Mula-mula garis yang diketahui itu ditranslasikan oleh T sedemikian sehingga bayangannya melalui titik asal. Selanjutnya bayangan ini dirotasikan oleh R berlawanan dengan arah putaran jarum jam supaya berimpit dengan sumbu x. Setelah melakukan refleksi F terhadap sumbu x, dilakukan lagi rotasi R^{-1} dan Translasi T^{-1} untuk mengembalikan garis yang terefleksi tadi ke posisinya semula. Komposisi dari transformasi-transformasi ini dapat dinyatakan sebagai $T^{-1}R^{-1}F\ R\ T\ X = X'$. Persamaan matriks nya adalah:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\-\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\\1\end{bmatrix}$$

Dimana sudut putar adalah θ = artan (2)

Suatu matriks transformasi ditentukan untuk refleksi terhadap garis l [a b c], dimana l memotong sumbu y di titik - c/b dengan kemiringan $-a/b$, $b \neq 0$.

Teorema: Diketahui garis l [a b c], matriks transformasi R_1 untuk refleksi pada l ditentukan oleh

$$R_1 = \begin{bmatrix}\dfrac{-(a^2-b^2)}{a^2+b^2} & \dfrac{-2ab}{a^2+b^2} & \dfrac{-2ac}{a^2+b^2}\\ \dfrac{-2ab}{a^2+b^2} & \dfrac{(a^2-b^2)}{a^2+b^2} & \dfrac{-2bc}{a^2+b^2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \text{ dimana } b \neq 0$$

Contoh: Tentukanlah matriks transformasi untuk suatu refleksi terhadap garis [-1 3 3]. Misalkan a = -1, b = 3 , dan c = 3, matriks transformasinya adalah

$$R_1 = \begin{bmatrix}.8 & .6 & .6\\.6 & -.8 & -1.8\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Menentukan suatu matriks untuk transformasi linear jika diketahui obyek dan bayangannya

Suatu tugas yang terkait dengan ini adalah menentukan matriks dari suatu transformasi linear jika diketahui obyek dan bayangannya dalam transformasi ini. Yaitu, diketahui suatu kumpulan titik X dan bayangannya X', kita menentukan suatu matriks A sedemikian sehingga $AX = X'$. Isu pertama yang harus diperhatikan dalam hal ini adalah " *Berapa titik yang diperlukan*?" Dengan berpikir secara analitis, pertanyaan ini dapat dinyatakan secara lain: Jika diketahui nilai-nilai dari *x , y , x', dan y',* apakah nilai-nilai *a, b,c, d , e* dan *f* akan secara unik ditentukan oleh persamaan

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sebagai contoh, jika kita ambil (x , y, 1) = (1, 1, 1) dan (x' , y', 1) = (2, 1, 1), maka persamaan ini akan menghasilkan bentuk aljabar $a + b + e = 2$ dan $c + d + f = 1$. Jelaslah bahwa ada banyak pilihan untuk nilai-nilai , *a, b, c, d, e,* dan *f* yang memenuhi persamaan-persamaan ini. Kita dapat memandang translasi T

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

memetakan (1, 1, 1) onto (2, 1, 1). Alternatif lainnya, transformasi yang disediakan oleh matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Akan memberikan hasil yang sama. Dengan demikian , jika hanya diketahui satu titik dan bayangannya, maka memang tidak cukup untuk secara unik menentukan suatu transformasi linear.

Apakah dengan diketahui dua titik dan bayangannya , maka kita cukup punya informasi untuk mengatakan bahwa hanya ada satu matriks? Persamaan matriks untuk dua titik dan bayangannya adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mengeksplore kemaungkinan ini , misalkan transformasi ini memetakan titik (1, 1, 1) onto (2, 1, 1), dan titik (0, 0, 1) onto (1, 1, 1). Pengandaian ini menghasilkan hubungan a + b = 1, dan c + d = 1. Oleh karena terdapat ta hingga penyelesaian untuk persamaan-persamaan ini, dengan hanya mengunakan dua titik tidak akan menghasilkan suatu persamaan linear.

Bagaimana jika digunakan tiga titik? Dengan asumsi ini, persamaan matriks menjadi

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan matriks berbentuk seperti ini , AX = X', dapat diselesaikan terhadap A asalkan $|X| \neq 0$. Dalam hal tiga titik itu tidak koliner, maka $|X| \neq 0$. Jika persyaratan ini terpenuhi, solusi dari persamaan matrix tadi dapat ditulis sebagai A= $X'X^{-1}$.

Contoh: Tentukanlah matris transformasi T yang memetakan himpunan titik-titik

X = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ menjadi himpunan titik-titik X^1= $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Isu pertama adalah menentukan apakah $|X| \neq 0$. Dengan pengecekan yang cepat dapat ditemukan bahwa determinan ini sama dengan -5. Langkah berikutnya adalah menentukan invers dari matriks

X = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Invers dari X adalah

X^{-1}= $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} & 1 \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$

Transformasi yang belum diketahui itu diberikan oleh A = X$'$ X^{-1}, atau

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} & 1 \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Garis-Garis Invariant dan Vector-vector Eigen

Di bagian depan dijumpai bahwa persamaan $uA^{-1} = ku^{'}$ dimodifikasi sebagai $uA^{-1} = ku$ ketika kita mencari garis-garis invarian pada suatu transformasi linear A. Sekarang kita coba mengeksplor hubungan diantara $uA^{-1} = ku^{'}$ dan hubungan matematika yang terkenal lainnya, yaitu nilai *eigen* atau *karakteristik* pada persamaan matriks. ***Persamaan eigen*** sering ditulis sebagai $uT = \lambda u$, dimana *T* adalah suatu matrix, $\lambda \in \Re$ dan $u \in V$ dan V adalah suatu ruang vektor.

Untuk suatu matrix T yang diketahui, pasangan λ dan μ yang memenuhi persamaan ini berturut-turut dinamakan **nilai eigen** dan **vektor eigen**. Secara geometris hubungan ini diinterpretasikan sebagai berikut: suatu vektor μ diskala lagi oleh λ dan hanya mengalami perubahan besaran dalam *ukuran panjang* dan/atau *arah yang berbalik.* Agar hal ini terjadi, baik μ ataupun bayangannya harus terletak pada garis yang sama, *l*. Akibatnya, garis *l* harus invariant terhadap *T*. Hal ini menyarankan bahwa prosedur untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dapat diterapkan untuk keperluan menentukan garis invariant terhadap suatu transformasi linear. Dengan membandingkan **persamaan garis** $uA^{-1} = ku$ dan **persamaan eigen** $uT = \lambda u$, jelaslah bahwa nilai-nilai yang diperoleh untuk k pada contoh-contoh di bagian 4.3 – 4.4 sesungguhnya adalah nilai-nilai eigen yang berkaitan dengan matriks transformasi A^{-1}.

Persamaan eigen $uT = \lambda u$ dapat ditulis lagi sebagai $uT - \lambda u = 0$. Dengan memfaktorkan bentuk ini dengan vektor *u*, dan mengalikan λ dengan matriks identitas *I* akan menghasilkan $\mu(T - \lambda I) = 0$. Dalam bentuk matriks, ini adalah

$$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \begin{bmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - \lambda & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Dapat diperlihatkan bahwa persamaan ini mempunyai penyelesaian yang nontrivial jika,

$$\begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - \lambda & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Determinan ini dapat disederhanakan dan diselesaikan untuk memperoleh nilai λ. Manaka nilai –nilai eigen telah ditentukan, vektor-vektor eigen dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai – nilai eigen ini pada persamaan eigen. Vektor-ektor eigen ini dapat digunakan untuk mengidentifikasikan garis-garis invarian.
Kalkulator type TI-92, Maple, Matlab dapat menemukan nilai eigen dan vektor eigen secara otomatis.

Contoh: Tentukan nilai eigen dan vektor eigen yang berkaitan dengan transformasi linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

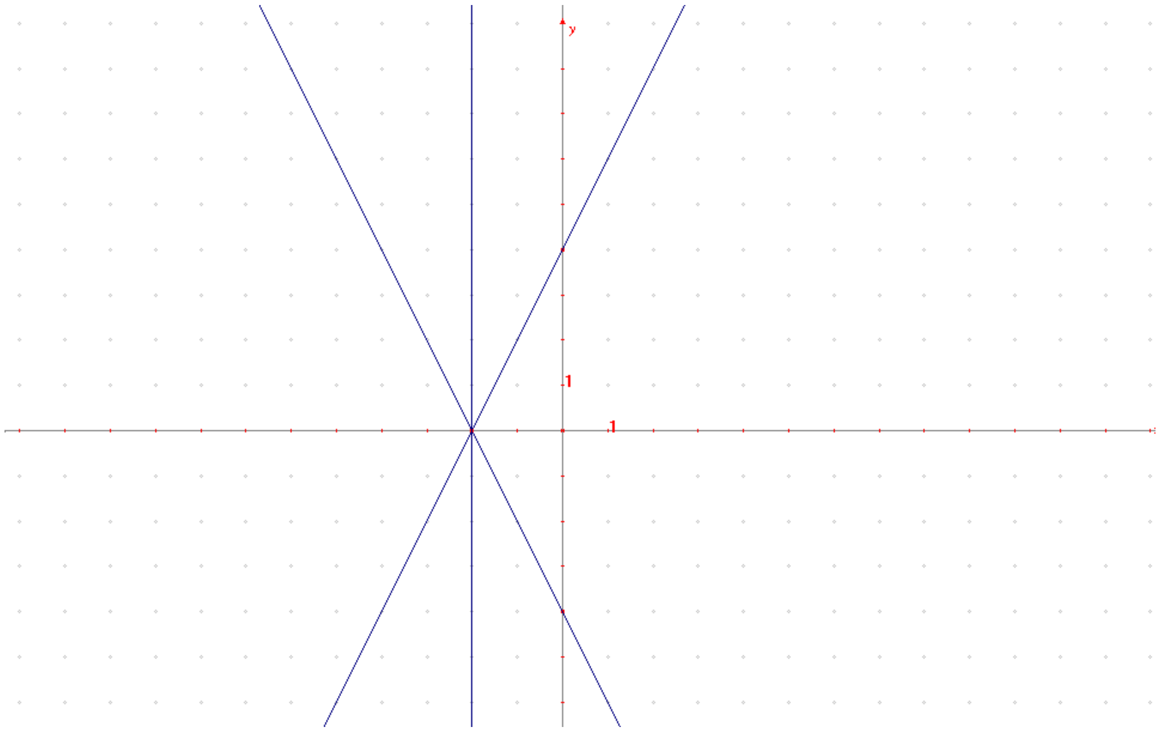
Nilai-nilai eigen yang bertalian dengan matriks ini diperoleh dari persamaan

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Jika ruas kiri diekspansikan maka akan diperoleh persamaan $(1+\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$.
Persamaan ini diselesaikan akan menghasilkan nilai $\lambda = \pm 1$.Tiap nilai eigen ini jika disubstitusikan kedalam persamaan eigen $uT = \lambda u$, yaitu

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}.$$

Jika $\lambda = 1$, persamaan ini akan menghasilkan $u_1 = u_1, -u_2 = u_2$, dan $u_3 = u_3$. Interpretasi dari hasil ini adalah bahwa untuk $u_2 = 0$ akan menyebabkan u_1 dan u_3 tidak terbatas. Vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen berbentuk $\begin{bmatrix} u_1 & 0 & u_3 \end{bmatrix}$ atau $x = -{u_3}/{u_1}$. Semua garis ini tegak lurus pada sumbu *x*. Jika $\lambda = -1$, persamaan ini akan menghasilkan $u_1 = -u_1$, dan $u_3 = -u_3$. Interpretasi dari hasil ini adalah bahwa $u_1 = u_3 = 0$, yang menyebabkan u_2 tidak terbatas. Vektor eigen berasosiasi dengan semua garis berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & u_2 & 0 \end{bmatrix}$ atau *y* = 0. Ini adalah sumbu *x*. Perlu diperiksa bahwa nilai-nilai eigen yang mungkin untuk suatu isometri adalah 1 dan -1.



y
1
1