Bab I

Dalam menciptakan the Elements, Euclid berkerja lebih jauh dari pada sekedar menyajikan suatu ensiklopedia matematika. Ia menciptakan system berpikirnya yang pertama berdasarkan definisi-definisi formal, axioma-axioma, proposisi-proposisi, dan atruran-aturan inferensi atau logika. Untuk melakukan hal itu, Euclid menetapkan suatu standar untuk mendemostrasikan matematika yang bertahan sampai saat ini. Standar itu adalah **bukti.**

Geometri yang Euclid kembangkan itu didasarkan pada istilah-istilah yang terdefinisi dan asumsi-asumsi, yang dinamakan postulat atau axioma. Dengan menggunakan definsi dan axioma sebagai blok-blok penyangga, Euclid mendemonstrasikan kebenaran dan beratus-ratus pernyataan-pernyataan lainnya yang dinamakannya proposisi. Table 1.2.2 mengilustrasikan pendekatannya yang menggunakan contoh-contoh yang terpilih dari unsur-unsur geometri ini dari Elemen Euclid versi *on-line* David Joice.

Elemen	Buku	Contoh (nomor Euclid)
Definisi	1	1. Sebuah titik adalah sesuatu yang tidak punya bagian 2. Suatu **garis** sesuatu yg punya panjang dan tidak punya lebar 3. Ujung-ujung suatu garis adalah titik-titik 4. Suatu **garis lurus** adalah garis-garis yang terletak merata dengan titik-titik terletak padanya. 11. Suatu sudut **tumpul** adalah suatu sudut yang lebih besar dari sudut siku2. 12. Suatu sudut **lancip** adalah suatu sudut yang kurang dari sudut siku2. 21. Selanjutnya bangun-bangun bersisi tiga, suatu segitiga siku-siku adalah suatu segitiga yang mempunyai suatu sudut siku-siku; suatu segitiga tumpul adalah suatu segitiga yang mempunyai suatu sudut tumpul, dan suatu segitiga lancip adalah segitiga yang ketiga sudutnya lancip. 22. Dari bangun-bangun bersisi empat, **suatu persegi** adalah sesuatu bangun yang sisi-sisinya sama panjang dan sudut-sudutnya siku-siku; Suatu **oblong**, adalah bersudut siku-siku, tetapi tidak mempunyai semua sisi yang sama panjang; suatu **rhombus (belahketupat)** adalah bangun bersisi empat yang keempat sisinya sama panjang tetapi sudut-sudutnya tidak siku-siku; sebuah **rhomboid** adalah bangun bersisi empat dengan sudut dan sisi yang saling berhadapan adalah sama, tetapi tidak sama panjang sisinya dan tidak bersudut siku-siku. Bangun bersisi empat yang lain dari yang disebutkan ini disebut **trapezium**. 23. Garislurus-garislurus yang sejajar adalah garis lurus yang terletak pada bidang yang sama dan diperpanjang sampai tak hingga pada kedua arah, tidak berpotongan pada arah yang manapun.
Axioma	1.	1. Membuat suatu garislurus dari satu titik ke titik lainnya

		2. Membuat suatu **garis** (**ruas garis**) secara kontinyu pada suatu garis lurus. 3. Menggambarkan sembarang lingkaran dengan sembarang titik pusat dan jari-jari. 4. Semua sudut siku-siku sama satu dengan lainnya. 5.Jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus lainnya dan membuat sudut-sudut dalam sepihak trerhadap garis itu kurang dari dua sudut siku-siku, jika diperpanjang ta hingga, akan berpotongan di sisi garis dimana kedua sudut yang jumlahnya kurang dari dua sudut siku-siku itu terletak.
Common Notion	1	1. Benda-benda yang masing-masingnya sama dengan suatu benda lain, adalah sama satu dengan lainnya. 2. Jika hal-hal yang sama ditambahkan dengan hal-hal yang sama, maka keseluruhannya juga sama. 3. Jika sejumlah yang sama dikurangi dari hal-hal yang sama, maka sisanya juga akan sama. 4. Hal-hal yang saling menutupi satu dengan lainnya adalah sama satu dengan lainnya. 5. Keseluruhan adalah lebih besar dari sebagiannya.
Proposisi.	1	6. Jika pada suatu segitiga dua sudut sama, maka sisi-sisi di hadapan sudut-sudut itu juga sama. 16. Dalam setiap segitiga, jika salah satu sisi diperpanjang, maka sudut luarnya lebih besar dari setiap sudut dalam yang dihadapannya. 17. Dalam setiap segitiga, jumlah dari sembarang dua sudut adalah kurang dari dua sudut siku2. 18. Dalam setiap segitiga, sudut yang terletak dihadapan sisi terpanjang, adalah sudut terbesar. 19. Dalam setiap segitiga, sisi dihadapan sudut terbesar adalah sisi terpanjang. 20. Dalam setiap segitiga jumlah dari setiap dua sisi adalah lebih besar dari sisi ketiga

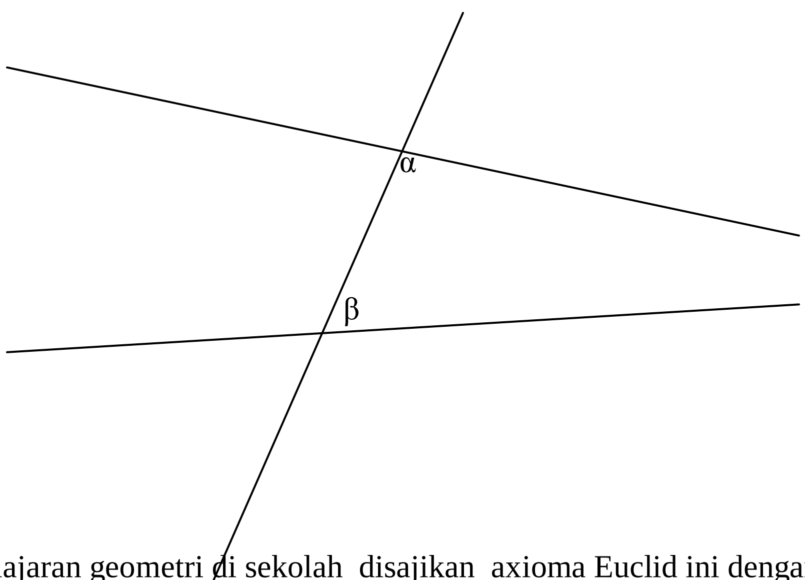
Sistem Axiomatik

Secara umum, sistem-sistem axiomatik akan memuat unsur-unsur berikut: istilah tak terdefinisi (primitif), definisi, axioma-axioma, proposisi-proposisi, dan aturan –aturan inferensi atau logika. Definisi-definisi digunakan untuk menciptakan suatu kosa kata teknis untuk menggambarkan sifat-sifat dari suatu obyek, bilangan, konsep dan hubungan-hubungannya. Contohnya, Euclid mendefinisikan suatu sudut lancip sebagai suatu sudut yang kurang dari sudut siku-siku. Dalam mendefinisikan istilah sudut siku-siku, ia katakan: jika suatu garis lurus memotong sebuah garis lurus lainnya sehingga membuat dua sudut yang bersisian mempunyai besar yang sama, masing-masing sudut yang sama itu disebut sudut siku-siku, dan garis lurus yang meotong garis lainnya itu dinamakan tegak lurus pada garis itu. Definisi ini selanjutnya, menggunakan istilah bersisian dan tegaklurus. Sekalipun istilah – istilah inipun dapat juga didefinisikan, perulangan yang sering dari penggunaannya lama kelamaan memaksa orang untu menggunakan konsep mendasar sama seperti *titik* atau *garis*. Pada saat seperti inilah, matematika maupun bahasa mulai kendor. Misalnya, dalam upaya untuk coba mendefinisikan *titik* dan *garis* Euclid mulai mengandalkan pengertian-pengertian yang agak kabur dan pada kualitas-kualitas yang juga belum didefinisikan: Suatu titik adalah sesuatu yang tidak memiliki bagian, dan suatu garis adalah sesuatu yang panjang tetapi tidak memiliki lebar. Para ahli matematika moderen sadar bahwa hal/keadaan seperti ini adalah sesuatu yang sudah jelas dari logika matematika dan lalu mengakomodasikan situasi ini dengan mengidentifikasikan istilah *titik* dan *garis* sebagai sesuatu yang tidak didefinisikan. Istilah-istilah ini masih digunakan dalam definisi-definisi, tetapi tidak ada upaya yang dilakukan untuk untuk mendefinisikan istilah-istilah ini, sehingga mengakhiri rangkaian definisi pada suatu situasi dimana tidak diperlukan lagi definisi yang lebih jauh.

Aksioma adalah pernyataan-pernyataan yang tidak dibuktikan dan yang diasumsikan benar.

Axioma Euclid.

1. Menarik satu garis dari sembarang titik ke sembarang titik lainnya
2. Membuat suatu garis lurus tak hingga panjangnya pada suatu garis
3. Menggambarkan suatu lingkaran dengan sembarang titik pusat dan jari-jari
4. Bahwa semua sudut siku-siku adalah sama besar
5. Bahwa, jika suatu garis memotong dua garis sedemikian sehingga membuat ***sudut-sudut dalam*** pada suatu sisi yang sama kurang dari dua sudut siku – siku, kedua garis lurus semula jika diperpanjang tak hingga, akan berpotongan pada sisi garis semula dimana kedua sudut dalam itu terletak.



Di banyak pelajaran geometri di sekolah disajikan axioma Euclid ini dengan bahasa yang dapat dipahami (axioma 1 – 4) sedangkan axioma 5 digunakan bentuk yang dikemukakan oleh John Play Fair, dimana bentuk itu ekivalen dengan axioma ke 5 tadi.

1. Melalui dua titik selalu dapat ditarik satu garis
2. Suatu segmen dengan panjang apapun dapat dikonstruksikan pada sebuah garis

3. Dapat digambar sebuah lingkaran dengan titik pusat yang diketahui dan dengan sembarang jari-jari
4. Semua sudut siku-siku sama
5. Melalui suatu titik yang tidak terletak pada satu garis, dapat ditarik hanya satu garis yang parallel dengan garis semula..

Selain axioma, ditemukan juga proposisi-proposisi yaitu pernyataan-pernyataan yang dapat dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan aturan-aturan inferensi yang diterima.

Mengenai aksioma, serta argumentasi ilmiah, muncul pertanyaan, "persyaratan apa yang harus dimiliki agar suatu pernyataan disebut sebagai suatu axioma, dan berdasarkan aturan apakah proposisi-proposisi disimpulkan dari aksioma-aksioma?"

Hal ini memunculkan konsep **system axioma**, yang memuat tiga konsep utama yaitu *:*

i) *Consistency: jika tidak ada axioma ataupun proposisi dari system itu yang bertentangan satu dengan yang lain*

ii) *Independency: Suatu axioma dikatakan independent terhadap axioma-axioma lainnya, jika axioma itu tidak dapat diturunkan dari axioma-axioma lainnya*

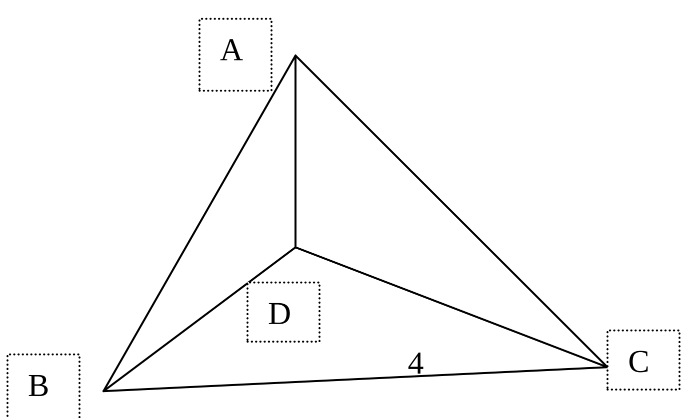
iii) *Completeness: Suatu system axioma dikatakan lengkap jika dari setiap pernyataan yang disajikan secara tepat dapat dibuktikan atau tidak dapat dibuktikan berdasarkan axioma-axioma dalam system itu. Dengan kata lain, tidak mungkin lagi ditambahkan axioma lain yang independent ke dalam system axioma itu*

Menyatakan suatu system axioma dengan menggunakan

model Geometri Terbatas

Suatu geometri terbatas memuat sekumpulan terbatas titik-titik dan sekumpulan istilah berkaitan dan axioma-axioma. Gambar berikut ini menunjukkan suatu model untuk GEOMETRI EMPAT TITIK. Oleh karena ini merupakan Geometri terbatas, maka garis-garis seperti pada Geometri Euclid tidak ada (tidak dikenal). ***Akan tetapi kita boleh mendefinisikan suatu kumpulan titik dan menyebutnya sebagai kumpulan garis-garis***.

Dalam hal ini, garis-garis terdiri dari pasangan-pasangan titik-titik, disajikan sebagai garis-garis dalam gambar berikut dan disajikan dalam kolom-kolom huruf dalam model.



Unsur Primitif (Undefined Terms): ***Titik, Garis, pada***

Axioma 1: Terdapat tepat empat titik

Axioma 2: Dua titik yang berbeda terletak pada satu garis

Axioma 3: Tiap garis terletak tepat pada dua titik

Model:

Ttitik : A , B , C , D

Garis :						
	A	A	A	B	B	C
	B	C	D	C	D	D

Setiap kolom (yang memuat titik-titik) menyatakan suatu garis

Model ini menghadirkan suatu konteks yang cocok untuk mendemonstrasikan konsep ***konsistensi***. Untuk tujuan ini, maka setiap axioma akan dicari pembenarannya satu demi satu.

Tepat terdapat 4 titik. (axioma 1)

Jika ada dua titik, maka hanya ada satu garis yang memuat kedua titik itu. (axioma 2)

Dipilih garis sembarang, jelas bahwa garis itu memuat dua titik.(axioma 3)

Cukup sulit untuk memperlihatkan sifat ***independency***, secara konseptual ataupun secara prosedural. Ada dua pandangan yang diperlukan untuk memperlihatkan independensi ini. **Pertama**, jika suatu kumpulan axioma konsisten adalah independent, dan jika satu axioma diabaikan sementara axioma lainnya tetap tidak berubah, maka axioma yang tersisa masih tetap independent dan harus didemonstrasikan dalam suatu model yang konsistent, sekalipun model yang sama digunakan untuk mengilustrasikan system semula.

Kedua, jika suatu kelompok axioma dependent, dan jika satu axioma diabaikan sedangkan yang lainnya tetap tidak berubah maka axioma yang tersisa pun harus dependent.

Dalam hal Geometri Empat Titik ini, untuk mendemonstrasikan ***independensi*** dari tiga axioma ini akan mencakup abaikan satu axioma satu per satu.

Contoh 1. Tunjukkan bahwa axioma-axioma untuk Geometri Empat Titik adalah independent

Abaikan axioma 1.

Axioma 1. Terdapat tepat dua titik

Axioma 2 Dua titik yang berbeda terletak tepat pada satu garis

Axioma 3 Tiap garis memuat tepat dua titik.

Model:

Titik A dan B

Garis A

B

Verifikasi

Dua titik terletak tepat pada satu garis

Hanya ada satu garis yang memuat kedua titik itu.

Abaikan axioma 2.

Axioma 1 Terdapat 4 titik

Axioma 2 Dua titik berbeda ***tidak*** terletak tepat pada satu garis

Axioma 3 Tiap garis tepat memuat dua titik.

Model:

Titik: A, B, C, D

Garis A	C
B	D

Verifikasi

Terdapat tepat empat titik

Dua titik (B dan C) tidak terdapat pada sembarang garis

Dan setiap garis memuat tepat dua titik

Abaikan axioma 3

Axioma 1: *Terdapat tepat 4 titik*

Axioma 2 *Dua titik yang berbeda tepat terletak pada satu garis*

Axioma 3 *Setiap garis tidak memuat tepat dua titik*

Verifikasi

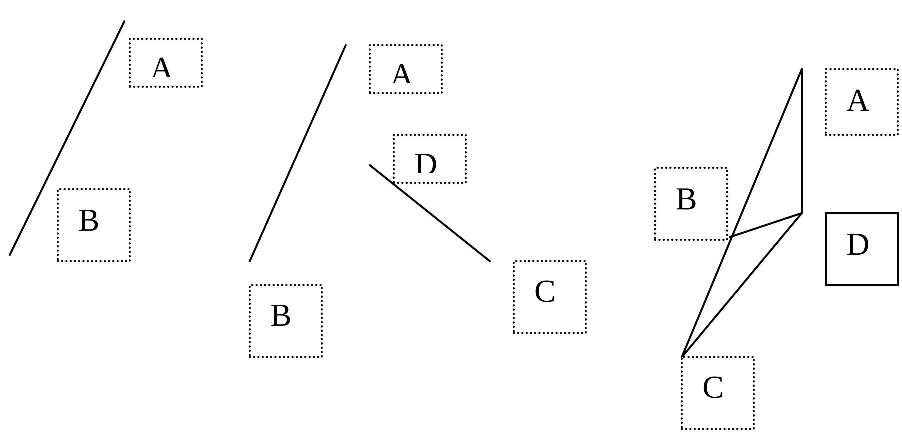
Tititk	: A,	B,	C,	D
Garis	: A	A	B	C
	B	D	D	D
	C			

Verifikasi

Ada tepat 4 titik

Tiap dua titik terletak tepat pada satu garis

Tiap garis memuat tepat dua titik



Geometri Netral

Dasar geometri Euclid diungkapkan dalam axioma-axioma berikut ini:

1 Menarik satu garis dari sembarang titik ke sembarang titik lainnya
2 Membuat suatu garis lurus tak hingga panjangnya pada suatu garis
3 Menggambarkan suatu lingkaran dengan sembarang titik pusat dan jari-jari
4 Bahwa semua sudut siku-siku adalah sama besar
5 Bahwa, jika suatu garis memotong dua garis sedemikian sehingga membuat **sudut-sudut dalam** pada suatu sisi yang sama dari garis kurang dari dua sudut siku – siku, kedua garis lurus semula jika diperpanjang ta hingga, akan berpotongan pada sisi garis semula dimana kedua sudut dalam itu terletak.

Sementara semua geometri Euclid didasarkan pada axioma-axioma ini, dan kemudian hari ditemukan ada sejumlah terbatas axioma-axioma yang tidak dinyatakan, ternyata banyak proposisi yang dapat dibuktikan hanya dengan menggunakan axioma – axioma 1 sampai 4. Sebagai contoh, proposisi 1 – 28 pada buku The Elements tidaklah mengacu pada axioma ke 5 (langsung atau tidak langsung).

Bagi banyak para ahli geometri, pendekatan ini menyarankan bahwa axioma 5 mungkin bergantung (dependen) pada ke empat axioma yg pertama, sehingga dapat dibuktikan menjadi suatu proposisi. Upaya pencarian terhadap bukti tersebut memotivasi, menantang, bahkan membuat orang (mahasiswa) yang belajar geometri menjadi frustrasi hampir selama 2 ribu tahun. Pada akhirnya, usaha mencari bukti tersebut menghasilkan ditemukannya Geometri-Geometri non Euclid, dimana setiap geometri tersebut melakukan modifikasi dari axioma-axioma 1 – 4, dan mengabaikan axioma ke 5.

Geometri Netral juga tidak menggunakan postulat ke 5 Euclid ataupun ingkaran dari postulat ke 5 itu. Dengan melakukan modifikasi-modifikasi, banyak proposisi dalam geometri netral adalah benar secara geometri Euclid maupun non Euclid. Sebagai akibatnya, Geometri Netral menyiapkan kerangka kerja yang cocok yang dengannya kita dapat membandingkan dan mempertentangkan sifat-sifat geometri Euclid dan non Euclid. Hal ini juga merupakan suatu awal yang netral dalam mempelajari geometri Euclid.

Definisi 1.3.1.

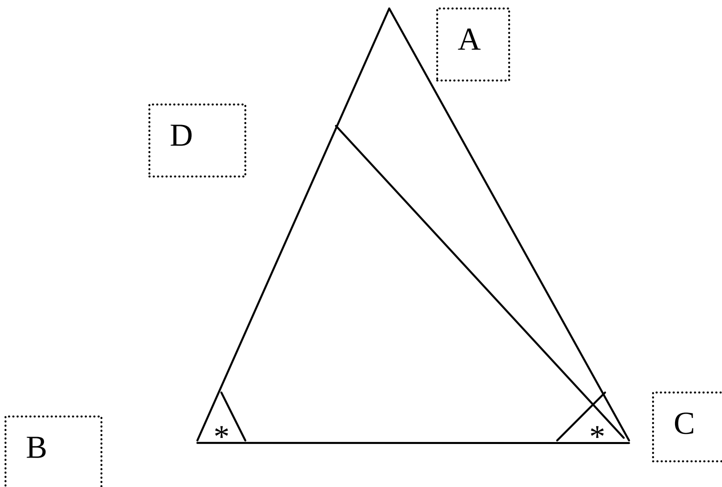
Suatu geometri bidang dikatakan **netral** jika ia tidak mengikut sertakan postulat parallel ataupun akibat logis dari postulat ini.

Teorema 1.3.1.

Jika dalam suatu segitiga dua sudutnya sama, maka sisi-sisi di hadapan sudut-sudut itu juga sama satu dengan yang lainnya. (Proposisi 6. Lihat gambar 1.3.1)

Proposisi 6 menyajikan suatu pembuktian secara ***kontradiksi*** (yang pertama) dalam buku Elements.

Gambar 1.3.1. menunjukkan suatu bukti sebagaimana diilustrasikan pada Website David Joice tentang Element dari Euclid. Ilustrasi pada 1.3.1 bersifat interactive, memungkinkan pembaca untuk memposisikan kembali titik-titik *A, B, C*, dan *D*. Argumen yang dikemukakan oleh Euclid disajikan berikut ini:



Gambar 1.3.1

Misalkan, segitiga *ABC* mempunyai dua sudut sama yaitu sudut *ABC* dan sudut *ACB*.

Saya katakan bahwa sisi *AB* juga sama dengan sisi *AC*

Jika *AB* tidak sama *AC*, maka salah satu dari mereka akan lebih besar	CN
Misalkan *AB* lebih besar. Pada *AB* buatlah *BD* sama dengan *AC*, dan hubungkanlah *DC*.	I.3, Post.1

Karena *DB* sama dengan *AC*, dan *BC* merupakan persekutuan (lihat dua segitiga *DBC* dan *ACB*), maka dua sisi *DB* dan *BC* akan berturut-turut sama dengan *AC* dan *CB*, dan sudut *DBC* sama dengan *ACB*. Oleh karena itu, **alas** *DC* sama dengan **alas** *AB*, sehingga segitiga *DBC* sama dengan segitiga *ACB*, yang lebih kecil sama dengan yang lebih besar, dan ini sesuatu yang tidak mungkin. Oleh karena itu *AB* harus sama dengan *AC*.

Bukti proposisi 6 dapat disajikan kembali dengan bahasa yang lebih umum sebagai berikut:

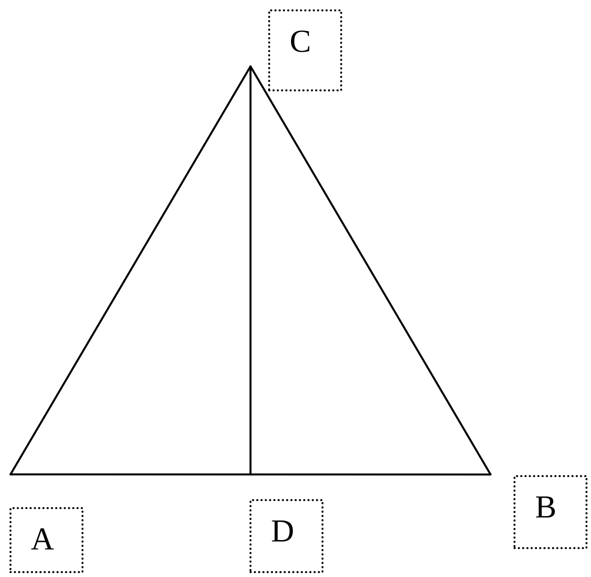
Misalkan ABC adalah suatu segitiga dengan sdt ABC = sdt ACB. Misalkan AB ≠ AC. Misalkan sisi AB lebih panjang dari AC. Tempatkan suatu titik D pada sisi AB sedemikian sehingga DB = AC. Maka segitiga DBC Kongruen segitiga ACB berdasarkan S Sd S (proposisi 4). Akibatnya sdt DCB = sdt ABC = sdt ACB. Artinya CD harus berimpit CA, atau DB = AB = AC, yang adalah suatu kontradiksi. Karena itu, jika dalam suatu segitiga terdapat dua sudut yang sama, maka sisi-sisi di depan sudut-sudut itu juga sama besar.

Teorema 1.3.2. Membagi dua sama besar suatu garis terbatas (*ruas garis*) (Proposisi 10)

Proposisi 10 mendemonstrasikan bagaimana mengkonstruksikan titik tengah dari suatu segmen (lihat gambar 1.3.2) Strategi didasarkan pada bagaimana membuktikan bahwa segitiga *ACD* kongruen segitiga *BDC*. Akibatnya *AD = BD*

Membagi sama besar suatu garis terbatas (ruas garis)

Misalkan AB merupakan suatu ruas garis terbatas



Yang harus dilakukan adalah membagi dua sama besar garis terbatas ini.

Konstruksilah segitiga samasisi pada segmen tersebut, dan bagi sama besar sudut *ACB* oleh garis lurus *CD* (Berdasarkan I.1 dan I.9)

Saya katakan bahwa segmen *AB* dibagi dua sama besarnya di titik *D*

Karena *CA* sama dengan *CB*, dan *CD* sekutu, karena itu berturut-turut kedua sisi *CA* dan *CD* sama dengan *CB* dan *CD*, dan sudut *ACD* sama dengan sdt *BCD*, Karena itu **alas** *AD* sama dengan **alas** *BD* (I.Def.20 dan I.4)

Oleh karena itu garis terbatas *AB* dibagi dua sama besar di titik *D*.

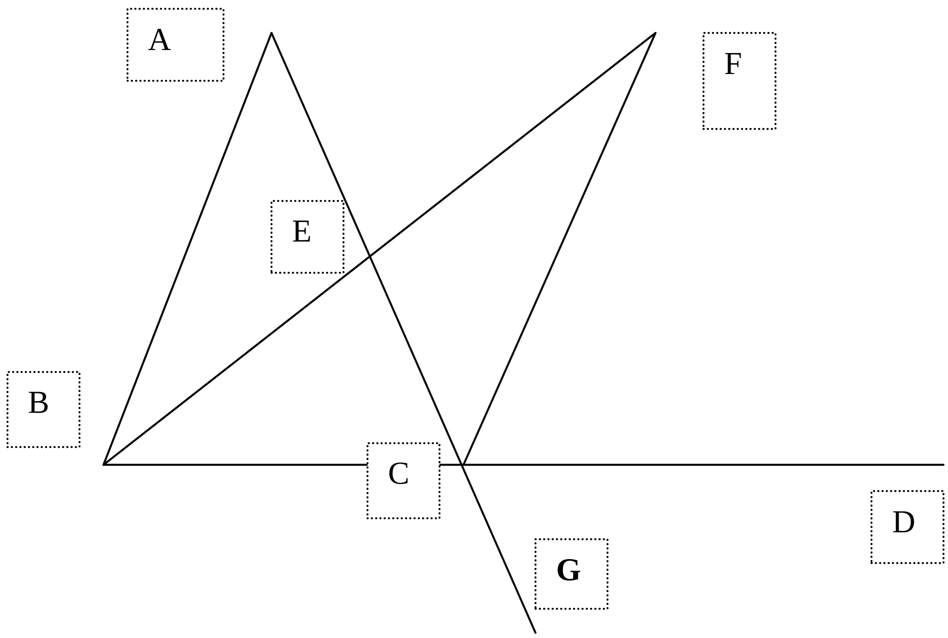
Teorema 1.3.3.

Dalam suatu segitiga, jika salah satu sisinya diperpanjang, maka sudut luar akan lebih besar dari setiap sudut dalam yang berjauhan dari sudut luar tadi (Proposisi 16, lihat gambar 1.3.3.)

Dalam suatu segitiga, jika salah satu sisi diperpanjang, maka sudut luar akan lebih besar dari setiap sudut dalam yang berjauhan

Misalkan ada segitiga ABC dan sisi BC diperpanjang sampai ke D

Saya katakan bahwa sudut luar ACD lebih besar daripada sudut dalam berjauhan yaitu sdt CBA dan sudut BAC



Bagi dua sama besar AC di E. Hubungkanlah BE dan perpanjangkan sampai ke F, dengan membuat EF sama dengan BE.

Hubungkan FC, dan perpanjangkan AC sampai ke G.

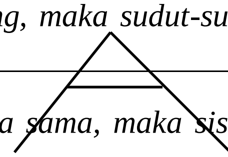
Karena AE sama dengan EC, dan BE sama dengan EF, maka kedua sisi AE, EB berturut-turut sama dengan CE dan EF, demikian juga sudut AEB sama dengan sudut FEC sebagai sudut-sudut yang bertolak belakang. Karena itu ***alas AB*** *sama dengan* ***alas FC****, dan segitiga ABE sama dengan segitiga CFE, dan sudut-sudut lainnya yang bersesuaian akan sama, yaitu sudut-sudut dihadapan sisi-sisi yang sama. Karena itu sudut BAE sama dengan sudut FCE*

Tetapi sudut ECD lebih besar dari sudut ECF, karena itu sudut ACD lebih besar dari sudut BAE.

Dengan cara yang sama, jika AB dibagi dua sama besar, maka sudut BCG, yaitu sudut ACD dapat dibuktikan lebih besar dari sudut ABC.

Karena itu, dalam setiap segitiga, jika salah satu sisinya diperpanjang, maka sudut luar akan lebih besar dari setiap sudut dalam yang berjauhan.

No	***Proposisi***
1	*Mengkonstruksi suatu segitiga sama sisi pada suatu ruas garis*
2	*Menempatkan suatu ruas garis sama dengan suatu ruas garis yang diketahui dengan satu titik ujungnya pada suatu titik yang diketahui*
3	*Dari dua ruas garis yang tidak sama panjang, dapat dipotong dari ruas garis terpanjang suatu ruas garis yang panjangnya sama dengan ruas garis yang terpendek*
4	*Jika dari dua segitiga. Suatu segitiga mempunyai dua sisi yang berturut-turut sama panjang dengan dua sisi pada segitiga yang kedua, dan sudut-sudut yang diapit oleh kedua sisi pada segitiga pertama sama dengan sudut yang diapit oleh dua sisi pada segitiga kedua, maka kedua segitiga itu akan mempunyai alas yang sama, kedua segitiga itu sama, dan sudut-sudut yang lainnya yang bersesuaian juga akan sama, yaitu sudut-sudut di hadapan sisi-sisi yang sama*
5	*Dalam suatu segitiga sama kaki, sudut-sudut alasnya sama besar, dan jika kedua sisi yang sama panjang itu diperpanjang, maka sudut-sudut di bawah alas akan sama satu dengan lainnya.*
6	*Jika dalam suatu segitiga, dua sudutnya sama, maka sisi-sisi di hadapan kedua sudut tadi juga sama*
7.	*Diketahui dua ruas garis yang dikonstruksikan dari titik-titik ujung dari suatu ruas garis dan bertemu di satu titik, maka tidak dapat dikonstruksikan dari titik-titik ujung ruas garis semula, dan pada sisi yang sama dari ruas garis itu, dua ruas garis lain yang bertemu pada suatu titik dan berturut-turut sama dengan kedua ruas garis semula, yaitu masing-masing sama dengan yang ditarik dari titik ujung yang sama*
8	*Jika pada dua segitiga terdapat dua sisi pada segitiga pertama yang berturut-turut sama dengan dua sisi pada segitiga kedua, dan juga mempunyai alas yang sama, maka kedua segitiga itu juga mempunyai sudut-sudut yang sama yang diapit oleh sisi-sisi yang sama*
9.	*Membagi dua sama besar suatu sudut*
10.	*Membagi dua sama besar suatu ruas garis*
11.	*Membuat suatu ruas garis yang membentuk sudut siku-siku pada suatu ruas garis dari suatu titik di garis itu.*



12.	*Menarik suatu ruas garis tegaklurus pada suatu garis lurus dari suatu titik yang tidak terletak pada garis lurus itu.*
13.	*Jika suatu ruas garis bertumpu pada suatu ruas garis lain, maka ia akan membuat dua sudut siku-siku, atau dua sudut yang jumlahnya sama dengan dua sudut siku-siku*
14.	*Jika terhadap suatu ruas garis, dan pada satu titik yang terletak pada ruas garis itu ada dua ruas garis yang tidak terletak pada sisi yang sama dari ruas garis semula dan membentuk sudut-sudut yang bersisian sama dengan dua sudut siku-siku, maka kedua ruas garis ini membentuk satu ruas garis.*
15.	*Jika dua ruas garis saling memotong, maka mereka membentuk sudut-sudut bertolak belakang yang sama besarnya*
16.	*Dalam sembarang segitiga, jika salah satu sisinya diperpanjang, maka sudut luar lebih besar dari setiap sudut dalam yang berjauhan*
17.	*Dalam setiap segitiga,jumlah dari setiap dua sudutnya adalah kurang dari dua sudut siku-siku*
18.	*Dalam setiap segitiga, sudut dihadapan sisi yang lebih panjang adalah sudut yang lebih besar*
*19.**	*Dalam setiap segitiga, sisi dihadapan sudut yang lebih besar adalah sisi yang lebih panjang*
21.	*Jika dari titik-titik ujung suatu sisi suatu segitiga dikonstruksikan dua ruas garis dan bertemu di interior segitiga, jumlah panjang ruas-ruas garis yang baru dikonstruksikan itu lebih kecil dari jumlah dua sisi lain dari segitiga, tetapi sisi-sisi yang baru dikonstruksi itu membentuk sudut yang lebih besar dari sudut yang dibentuk oleh dua sisi segitiga tadi.*
22.	*Mengkonstruksi suatu segitiga terdiri dari tiga ruas garis yang sama dengan tiga ruas garis yang diketahui: jadi syarat yang perlu adalah bahwa jumlah dari dua ruas garis harus lebih besar dari panjang ruas garis yang ketiga.*
23.	*Mengkonstruksikan suatu sudut (bidang datar) di suatu titik pada suatu ruas garis yang sama dengan suatu sudut yang diketahui.*
24.	*Jika dari dua segitiga, dua sisi pada satu segitiga sama dengan dua sisi pada segitiga lainnya, tetapi sudut yang diapit oleh kedua sisi pada satu segitiga itu lebih besar dari sudut yang diapit oleh dua sisi pada segitiga lain, maka alas segitiga pertama akan juga lebih besar daripada alas segitiga kedua*
25.	*Jika dari dua segitiga, dua sisi pada satu segitiga sama dengan dua sisi pada segitiga lainnya, tetapi alas pada satu segitiga itu lebih besar dari alas pada*

	segitiga lain, maka sudut yang diapit dua sisi pada segitiga pertama akan juga lebih besar dari pada sudut yang diapit oleh dua sisi pada segitiga kedua
26.	*Jika dua sudut pada segitiga sama dengan dua sudut pada segitiga lain, dan satu sisi di segitiga pertama sama dengan satu sisi di segitiga kedua, yaitu sisi pada sudut-sudut itu, atau sisi yang terletak di hadapan sudut-sudut itu, maka sisi-sisi lainnya di segitiga pertama akan sama dengan sisi-sisi lainnya di segitiga kedua, juga sudut-sudut lainnya di segitiga pertama akan sama dengan sudut-sudut lainnya di segitiga kedua.*
27.	*Jika suatu garis memotong dua garis lain sedemikian sehingga sudut alternate(dalam berseberangan) sama besar, maka kedua garis tadi sejajar*
28.	*Jika suatu garis memotong dua garis lain sedemikian sehingga sudut luar sama dengan sudut dalam yang berhadapan pada sisi yang sama, atau jumlah dari sudut-sudut dalam pada sisi yang sama adalah dua sudut siku-siku, maka kedua garis tadi sejajar*

Soal-soal

1. Buktikan proposisi-proposisi berikut dari geometri netral (tanpa menggunakan axioma ke 5 Euclid ataupun akibat logis dari axioma 5 itu)

a. Tiap ruas garis mempunyai tepat satu titik tengah

b. Tiap sudut mempunyai tepat satu garis bagi

c. Suplement atau komplement dari sudut-sudut yang sama adalah juga sama

d. Jika suatu garis l memotong segitiga ABC di titik P pada segmen $\boldsymbol{BC}$, maka l juga memotong segmen AC dan atau AB. (axioma Pasch)

e. Jika Q adalah suatu titik di interior segitiga ABC, maka sinar AQ memotong segmen BC di titik D (Crossbar theorem)

f. Segitiga sama sisi mempunyai sudut-sudut yang sama.

Bilangan-bilangan yang dapat dikonstruksikan

Definisi 1.4.1.

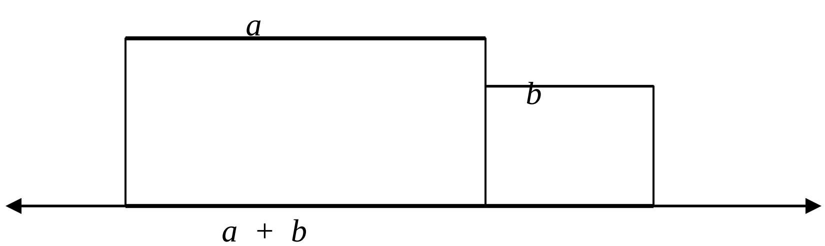
Sebuah bilangan ***a*** dikatakan **dapat dikonstruksikan**, jika dari suatu segmen dengan panjang satu unit, kita dapat mengkonstruksikan suatu segmen (ruas garis) dengan panjang **|*a*|** melalui sejumlah langkah terbatas hanya dengan menggunakan penggaris dan jangka.

Teorema 1.4.1.

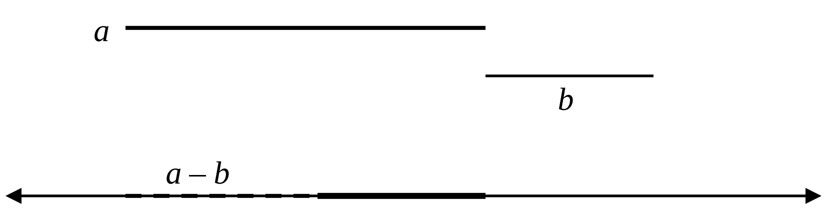
Jika a dan b adalah bilangan-bilangan real yang dapat dikonstruksikan, maka demikian juga $a + b$, $a - b$, ab , a/b dan $\sqrt{a}$.

Bukti:

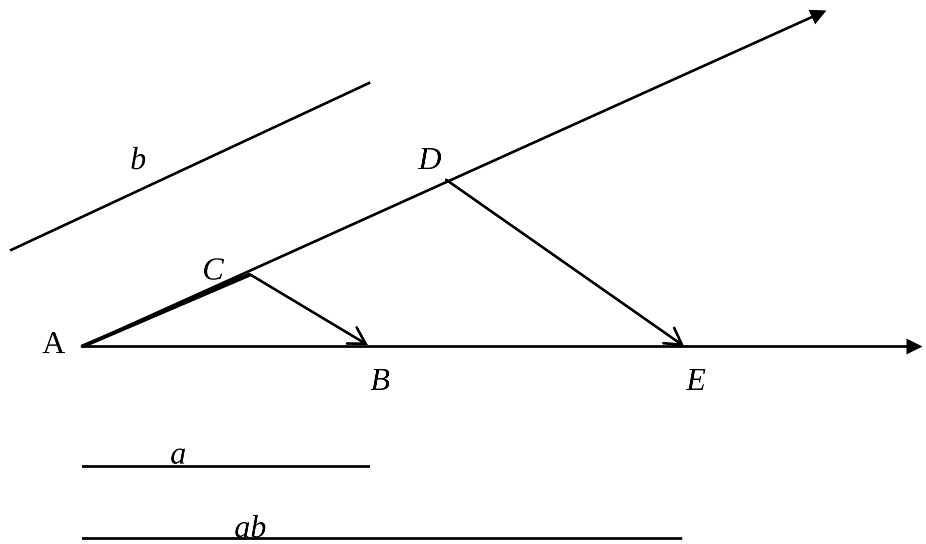
a). Karena a dan b adalah bilangan-bilangan yang dapat dikonstruksikan, mereka dapat direpresentasikan sebagai segmen-segmen. Dengan menempatkan satu segmen pada ujung segmen lainnya pada suatu garis (lihat gambar) maka akan menghasilkan suatu jarak yang sama dengan jumlah panjangnya $a + b$



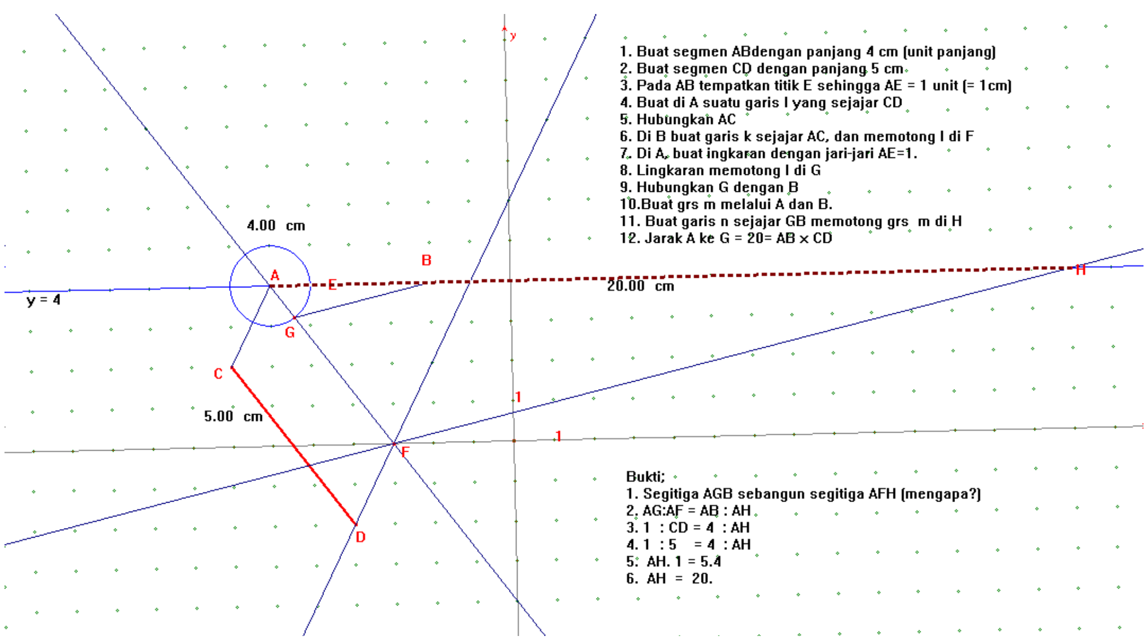
b). Karena a dan b adalah bilangan-bilangan yang dapat dikonstruksikan, mereka dapat direpresentasikan sebagai segmen-segmen. Dengan saling menumpang tindihkan satu segmen pada segmen lainnya, seperti pada gambar, jelaslah memperlihatkan bahwa selisihnya adalah $a - b$



c).Karena *a* dan *b* adalah bilangan-bilangan yang dapat dikonstruksikan, mereka dapat direpresentasikan sebagai segmen-segmen. Dengan menggunakan sembarang $\angle DAB$ sebagai bantuan, segmen-segmen *a* dan *b* dapat diposisikan pada kaki-kaki sudut yang bertentangan dan dimulai dari titik *A*. Titik-titik ujung lain dari segmen *a* dan *b adalah titik B* dan *D*. Selanjutnya, sebuah titik *C* ditempatkan sejauh satu unit dari *A* pada sinar *AD*. Konstruksilah segmen *CB*. Konstruksi segmen *DE* melalui titik *D* dan sejajar dengan segmen *CB*. Dengan menggunakan segitiga-segitiga sebangun, dengan mudah dapat diperlihatkan bahwa segmen *AE* mempunyai panjang ***ab*.**

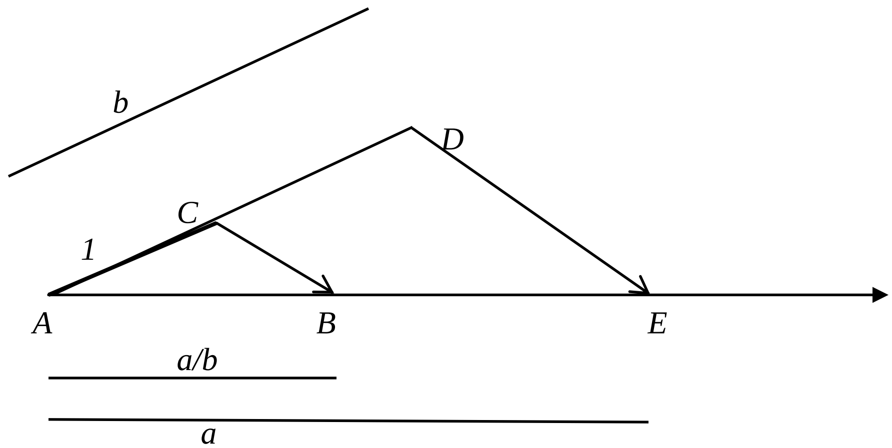


Konstruksi *ab* dengan menggunakan Cabri Geometry II, disajikan berikut ini.



d. Karena *a* *dan* *b* adalah bilangan-bilangan yang dapat dikonstruksikan, mereka dapat direpresentasikan sebagai segmen-segmen. Dengan menggunakan sembarang $\angle DAB$ sebagai bantuan, segmen-segmen *a* dan *b* dapat diposisikan pada kaki-kaki sudut yang bertentangan dan dimulai dari titik *A*. Titik-titik ujung lain dari segmen *a* dan *b* berturut – turut adalah titik *E* dan *D*. Selanjutnya, sebuah titik *C* ditempatkan sejauh ***satu unit*** dari *A* pada sinar *AD*. Buatlah segmen *DE*. Konstruksilah segmen *CB* yang parallel *DE*. Dengan menggunakan segitiga-segitiga sebangun, dengan mudah dapat diperlihatkan bahwa segmen *AB* mempunyai panjang *a/b*.

.



Bukti: Perhatikan Δ *ABC* dan Δ *AED*. Keduanya sebangun.

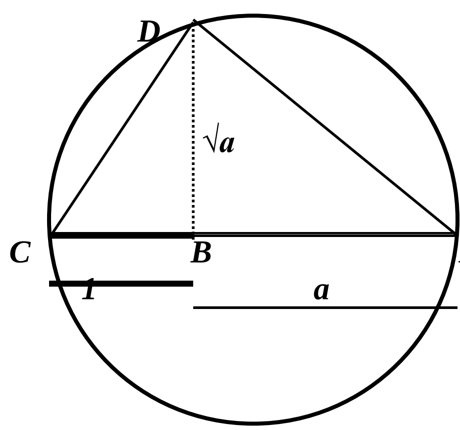
$$AC : AD = AB : AE$$

$$1 : b = AB : a$$

$$b \cdot AB = a$$

$$AB = a/b$$

e. Karena *a* dan *b* adalah bilangan-bilangan yang dapat dikonstruksikan, mereka dapat direpresentasikan sebagai segmen-segmen. Segmen-segmen dengan panjang *a* dan 1 diposisikan sebelah menyebelah titik *B*. Titik-titik ujung lainnya dari kedua segmen itu adalah titik – titik *A* dan *C*. Konstruksi titik tengah dari *AC* dan gunakan sebagai pusat dari lingkaran yang melalui *A* dan *C*. Di B buat suatu garis tegaklurus *AC* yang memotong lingkaran di *D*. Dengan menggunakan segitiga-segitiga sebangun, dengan mudah dapat diperlihatkan bahwa panjang segmen *BD* adalah √***a***



Jangka dan penggaris digunakan untuk menggambar garis lurus dan lingkaran. Garis lurus mempunai persamaan $ax + by + c = 0$. Lingkaran mempunyai persamaan dalam bentuk $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$. Konstruksi- konstruksi dalam geometri berfokus pada perpotongan garis dengan garis, garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran. Secara aljabar, hal ini berkorespondensi dengan mencari solusi simultan bagi sistem persamaan linear dan /atau persamaan kuadrat.

Solusi dari sistem seperti itu selalu dinyatakan dalam bentuk persamaan linear atau kuadrat, tidak dalam persamaan pangkat tiga atau persamaan-pesamaan tingkat tinggi. Sebagai contoh, dengan menyelesaikan persamaan linear diatas untuk y, diperoleh $y = (-ax - c)/b$. Bila nilai y ini disubstitusikan ke dalam persamaan lingkaran, maka diperoleh suatu persamaan kuadrat dalam x, yaitu :

$$x^2(a^2 + b^2) + x(2ac + b^2d - abe) + (c^2 - bec + b^2) = 0.$$

Akar-akar dari persamaan ini dapat diperoleh dengan menggunakan rumus kuadrat, yang menyajikan solusi-solusi yang menggunakan akar kuadrat, bukan akar pangkat tiga ataupun akar lainnya. Setiap system dari garis-garis yang berpotongan dan lingkaran-lingkaran akan menghasilkan jenis solusi-solusi serupa, yaitu bilangan-bilangan rasional dan atau akar-akar kuadrat dari bilangan-bilangan rasional.

Sebagai akibat, semua bilangan rasional dapat dikonstruksikan demikian juga dengan akar kuadrat dari bilangan rasional itu, akar pangkat empat (*fourth root*) yaitu akar kuadrat dari akar kuadrat, akar pangkat delapan.

TOPIK-TOPIK DALAM GEOMETRI EUCLID

Selama lebih dari 2000 tahun geometri diperlakukan sebagai suatu unsur esensial dalam seluruh pendidikan, dengan memperkenalkan siswa/mahasiswa kepada aplikasi-aplikasi praktis matematika, model-model matematika, dan metode axiomatik untuk membuktikan. Element dari Euclid telah mempersiapkan teks yang kaya untuk melaksanakan nya selama ratusan generasi. Di awali oleh masyarakat Yunani kuno sampai pada saat sekarang, guru-guru yang menyenangi geometri selalu mencari untuk mengembangkan cara untuk mengembangkan pemahaman siswa mereka akan konten dan metode dalam geometri. Dalam tradisi tutorial yang digunakan secara ekstensif di zaman kuno sampai moderen, guru-guru secara teratur bertemu dalam kelompok-kelompok kecil untuk mengeksplorasi ide-ide baru, untuk merumuskan konjektur, dan bertanya ”mengapa” dan untuk menyajikan temuan-temuan mereka sebagai bukti-bukti formal.

Selama abad 20, pendidikan ditata kembali dalam kepentingan industri. Kelas-kelas yang besar dengan jam pelajaran yang tetap dan silabus yang mempersiapkan pelajar untuk test secara periodik tentang informasi faktual dan algoritma secara diam-diam memaksakan pembelajaran geometri menjadi suatu yang kosong. Sebagai konsekuensinya, banyak siswa sekolah menengah sekarang ini diminta untuk membuktikan dan menerapkan teorema yang tidak mereka mengerti. Tidak mengherankan jika geometri merupakan pilihan terakhir bagi siswa di Amerika.

Untunglah, terjadi pembaharuan dalam pempelajaran geometri. NCTM (2000) menyiapkan suatu jalur untuk membuat pelajaran geometri menjadi bermakna dan disenangi siswa. Bagian dari dokumen yang berurusan dengan geometri di sekolah menengah menyatakan bahwa:

DI sekolah menengah, siswa sudah harus menguasai sejumlah besar obyek-obyek geometri dan sifat-sifatnya. Mereka sudah harus mengalami membuat dan mencari pembenaranan terhadap konjektur mengenai hubungan-hubungan diantara obyek-obyek geometri ini. Di kelas 9 – 12, hubungan-hubungan yang kompleks, yang disajikan secara statistik, atau dinamis, haruslah diperluas dan diperdalam. Dengan menggunakan dynamic geometry software atau dengan menggunakan model-model fisik, siswa secara cepat dapat mengeksplor sejumlah contoh. Mereka dapat menganalisis apa yang terlihat berubah dan apa yang nampaknya tetap, dan mereka dapat menciptakan konjektur-konjektur mengenai suatu situasi geometri. Sebagai contoh, siswa dapat memperhatikan bahwa diagonal-diagonal suatu jajar genjang berpotongan dan saling membagi dua sama besar di titik potong. Banyak siswa mungkin telah merasa puas sampai di sini, telah yakin bahwa hasil observasi mereka berlaku umum oleh karena ini berlaku untuk begitu banyak contoh. Namun, guru-guru yang efektif harus menantang siswa terhadap asumsi-asumsi seperti itu. Mereka dapat memanfaatkan kesempatan ini untuk memberanikan pelajar untuk memperdalam pengertian mereka dengan merumuskan konjektur-konjektur yang dapat diuji kebenarannya, mencari penjelasan-pejelasan yang mungkin, dan pada akhirnya mencari solusinya dengan memanfaatkan bukti atau contoh lawan.
Pentingnya menyiapkan siswa dengan latihan-latihan geometri yang banyak secara informal selama sekolah dasar dan menengah tidak dapat diabaikan. Secara umum, siswa sekolah menengah yang secara informal telah mempelajari konsep-konsep yang disajikan dalam proposisi-proposisi formal akan lebih mengapresiasi struktur logis dari bukti formal

dibandingkan dengan siswa yang kurang dipersiapkan dengan pengalaman informal ini. Dengan memaksakan siswa untuk menguasai semua aspek pembuktian secara simultan/sekaligus, dan dengan dihadapkan dengan begitu banyaknya konsep, membuat siswa gagal untuk mengerti tujuan, metode, dan struktur dari bukti. *Mereka tidak melihat hutan, hanya pohon saja.*

Dengan berkembangnya waktu, siswa-siswa ini akan memandang bukti sebagai sesuai yang memusingkan, dan bukan sebagai suatu strategi untuk mengembangkan ide-ide yang berkaitan. NCTM menyatakan:

Suatu elemen kritis bagi siswa kelas 9 – 12 dalam mempelajari geometri adalah mengetahui bagaimana membuat judgement, konstruksi, dan mengkomunikasikan bukti-bukti. Teknologi elektronik memampukan siswa untuk melakukan eksplorasi terhadap konsep geometri secara dinamis, dan memberikan umpan balik secara visual, serta mengukur pada saat mereka melakukan investigasi. Guru-guru sekolah menengah menghadapi tantangan dalam mengimbangi penggunaan teknologi untuk melakukan eksplorasi terhadap ide2 dan mengembangkan konjektur2 dengan menggunakan penalaran deduktif dan contoh lawan dalam menetapkan atau membantah validitas konjektur itu. Siswa harus mampu untuk mengartikulasikan sendiri mengapa konklusi-konklusi tertentu tentang obyek-obyek geometri ataupun relasi-relasi diantara obyek-obyek itu nampok logis. Bukanlah merupakan sesuatu yang kritis bagi siswa untuk menguasai bantuk menyajikan bukti, misalnya dalam bentuk dua-kolom. Yang kritis adalah bahwa siswa melihat kekuatan dari pembuktian dalam membangun klaim umum (teorema) dan bahwa mereka mampu mengkomunikasikan pembuktian mereka secara efektif dalam bentuk tulisan.

Paket geometri dynamic yang paling populer adalah The Geometer’s Sketchpad. Paket ini menyediakan metode-metode yang nyaman untuk mengkonstruksikan titik, garis, busur, dan lingkaran. Segitiga, poligon, dan obyek-obyek laian diciptakan dengan alat ini juga dapat diukur, diwarnai, dan dimanipulasikan untuk mempelajari sifat-sifatnya. Dalam lingkungan pemodelan euclid ini, aktivitas yang paling populer adalah mengkonstruksikan obyek-obyek, menyelidiki, menguji konjektur dari pemakai, dan mencari dasar-dasar logis untuk hubungan-hubungan yang ada.

Eclid akan sangat senang dengan adanya perkembangan ini, dikarenakan aktivitas seperti ini paling utama dalam geometri. Dan, sama seperti mengkonstruksikan, investigasi, konjektur dan pengujian, semua menuju pada pemahaman dan pembuktikan pada zamannya, aktivitas yang sama yang dilakukan sekarang dalam model environment geometri dapat digunakan untuk memotivasi dan memfasilitasi bukti. Bagi siswa-siswa yang disiapkan dengan baik, bukti bukanlah sesuatu yang hambar dan menakutkan; bukti adalah suatu jawaban yang natural dan tidak dapat dihindari terhadap pertanyaan “mengapa?” Untuk merealisasikan tujuan ini, semua siswa harus menjalani belajar geometri melalui suatu proses secara gradual dan dimulai dari sekolah dasar dengan geometri deskriptif dan diperjelas di sekolah menengah dengan bukti formal. Elemen-elemen dari proses itu dalam urutan nya secara natural adalah :

geometri deskriptive > konstruksi-konstruksi geometri > observasi > konjektur > uji > yakin > penjelasan informal > bukti.

2.1. Konstruksi-konstruksi Dasar

Menyelidiki maksud dan metode-metode dari Konstruksi-konstruksi Euclid.

Belajar untuk membuat skesta secara natural dan obyek-obyek buatan tangan manusia merupakan suatu tantangan dan secara intrinsic menyajikan aktivitas-aktivitas bagi siswa .Akibatnya banyak siswa secara asli tertarik dalam mempelajari bagaimana melakukukan konstruksi sederhana dalam geomeri euclid, dan juga muncul rasa ingin ta hu tentang aplikasi dari konstruksi-konstruksi itu dalam matematika, sains dan seni. Dengan berlatih mengkonstruksi yang elemter ini, serta menerapkannya dalam konteks-konsteks yang bermakna, serta mengembangkan kelancaran dalam menggunakan bahasa dan alat-alat yang digunakan untuk mendeskripsikan dan menciptakan bangun-bangun geometri, siswa meletakan dasar-dasar untuk melakukan investigasi secara sistematik tentang konsep-konsep yang lebih abstak serta prosedur-prosedurnya.

Dalam buku The Element, konstruksi-konstruksi geometri ini disajikan sama seperti proposisi-proposisi lainnya, setiap langkah selalu diserta pembenarannya sesuai aksioma, common notion, definisi, dan proposisi-proposisi lain yang diperlukan. KOnstruksi-konstruksi ini membolehkan digunakannya dua instrument, *penggaris tanpa skala dan jangka.* Penggaris tanpa skala ini adalah seperti penggaris biasa, dan hanya digunakan untuk hanya satu ujuan saja, menggambar semen garis diantara titik- titik yang diketahui. (Lihat Gambar 2.1) Sementara mistar sering digunakan sebagai penggaris, tetapi mistar ini dibagi oleh bagan-bagian yang sama besar dan diberi tanda sepanjang sisi mistar, dan digunakan untuk mengukur jarak atau menentukan lokasi titik-titik. Suatu jangka (Lihat Gambar 2.1.2) adalah suatu alat yang dapat digunakan untuk menggambarkan suatu busur dengan jari-jari konstan dari suatu titik yang diketahui, atau pusat. Sama seperti mistar, beberapa jangka diberi kalibrasi dalam suatu cara dimana dapat digunakan untuk menentukan ukuran besar sudut yang dibentuk oleh kedua tangan dari jangka itu. Pengunaan kedua alat seperti ini tidaklah diperbolehkan dalam konstruksi-konstruksi Euclid.

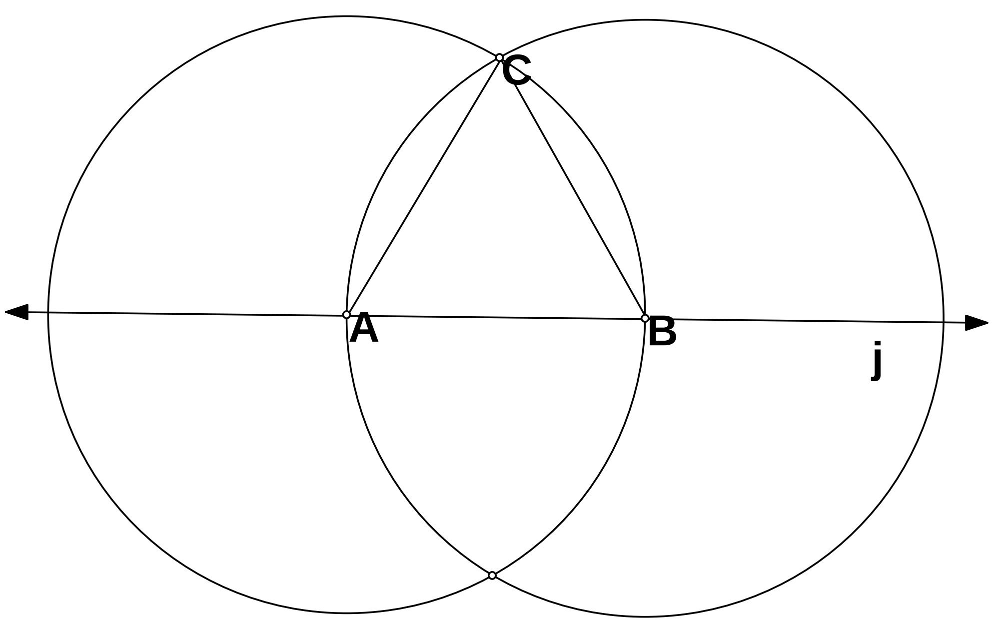
Orang dapat berdebat bahwa dengan menerapkan hanya penggunaan penggaris tak berskala dan jangka dalam melakukan konstruksi-konstruksi, Euclid menempatkan beberapa pertanyaan penting di luar dari tinjauan metode geometri (misalnya, membagi tiga sama besar sebuah sudut). DI sisi lain, oleh karena keputusan ini, guru-guru dan siswa yang belajar geometri dipaksa untuk mencari, dan akhirnya menemukan pengertian yang mendalam tentang sifat-sifat mendasar yang amat kuat peranannya, dibandingkan dengan mereka yang tidak menuruti syarat ini. Barangkali oleh karena alasan ini, maka pendekatan konstruksi Euclid ini masih dihargai oleh banyak pendidik.

Konstruksi-konstruksi sebagai sekumpulan instruksi

Sebagai langkah pertama dalam mempelajari konstruksi-konstruksi Euclid, siswa harus belajar membaca, mengikuti, dan menciptakan langkah-langkah konstruksi mereka sendiri. Kumpulan perintah untuk melakukan konstruksi harus menyajikan tindakan-tindakan dalam urutan yang tidak ambigu (bermakna ganda), menggunakan istilah dan notasi yang benar. Misalnya, langkah-langkah dalam mengkonstruksi suatu segitiga samasisi dapat dinyatakan seperti pada table 2.1.1.

Langkah	Tindakan
1.	Gunakan titik A sebagai titik pusat dan panjang segmen AB sebagai jari-jari, gambarlah lingkaran A.
2.	Gunakan titik B sebagai titik pusat dan panjangsegmen AB sebagai jari-jari, gambarlah lingkaran B
3.	Tandailah salah satu titik potong dari lingkaran A dan lingkaran B, sebagai titik C.
4.	Hubungkan titik C ke A dan B dan membentuk segitiga ABC.

Konstruksi-knstruksi yang didasarkan pada perintah-perintah haruslah dilatihmula-mula dengan mengunakan penggaris tak berskala dan jangka, selanjutnya dapat digunakan software geometri, misalnya *The Geometers Sketchpad. Dengan* mengunakan the Geometers Sketchpad, instruksi – instruksi pada table 2.1.1 diperoleh segitiga samasisi seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 2.1.3

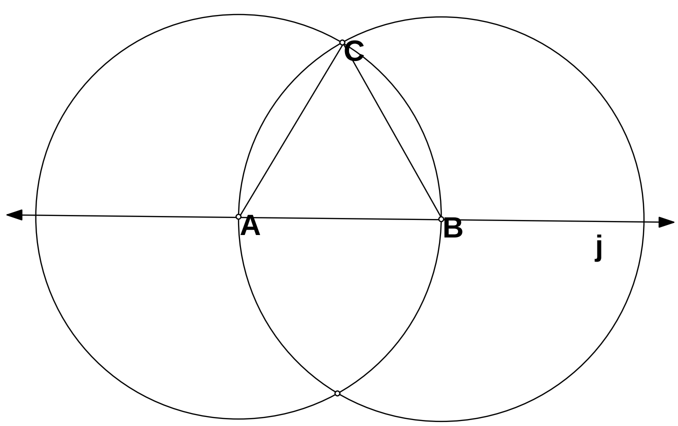


Setelah para siswa menguasai konstruksi- konstruksi didasarkan pada instruksi dan mulai merasakan adanya logika yang mendasari konstruksi tersebut, mereka harus didorong untuk menjelaskan mengapa, misalnya, sebagai contoh, titik C berjarak sama ke A dan ke B, dan mengapa segitiga ABC adalah segitiga samasisi dalam Gambar 2.3.1. Dengan menggunakan pendekatan ini, lama kelamaan siswa mengembangkan rasa percaya diri mereka dan mengembangkan kemampuan mereka untuk mengidentifikasikan dan memformulasikan konjektur dan mengemukakan penjelasan-penjelasan yang dapat diterima akal tentang hubungan-hubungan geometri. Pengalaman-pengalaman yang berulang serta keberhasilan dalam tugas-tugas seperti ini akan membentuk keyakinan siswa akan validitas temuan-temuan mereka dan kemampuan mereka dalam geometri. Dengan latar belakang seperti ini, siswa dapat menghadapi tantangan dalam bukti formal tanpa harussecara serempak membangun semua prasyarat pandangan geometri yang diperlukan untuk tugas-tugas ini.

Konstruksi-konstruksi sebagai proposisi-proposisi formal.

Proposisi pertama yang disajikan dalam buku The Element I mengilustrasikan dan menyajikan pembenaran tentang pengunaan jangka dan penggaris dalam melakukan kostruksi tentang sebuah segitiga sama sisi. Langkah-langkah konstruksi terlihat dalam kolom kiri pada Gambar 2.1.4 serta pembenaran di kolom kanan. Pembenaran (Lihat table 2.1.2) termasuk axioma – axioma (ada 5), common notion (ada 5), definisi-definisi , dan proposisi-proposisi yang telah dibuktikan (bervariasi banyaknya dari buku ke buku).

Buku I.Proposisi 1. Mengkonstruksi suatu segitiga samasisi pada suatu ruas garis yang diketahui.



Misalkan AB adalah ruas garis. Gambar lingkaran BCD Dengan pusat A dan radius AB. Kemudian gambarkan Lingkaran ACE dengan pusat B dan radius BA. Hubungkan CA dan CB dari titik potong kedua lingkaran, yaitu C.	Axioma 3 Axioma 1
Karena A adalah titik pusat lingkaran CDB, karena itu AC sama dengan AB. Juga karena B adalah pusat Linkaran CAE, maka BC sama dengan BA.	Definisi 15
Tetapi AC telah terbukti sama dengan AB, karena itu Masing-masing ruas garis AC, BC sama dengan AB. Dan benda-benda yang sama terhadap suatu benda yang sama, juga sama satu dengan	 CN1.

lainnya, karena itu AC = BC. Karena itu ketiga segmen AC, AB, dan BC sama satu dengan lainnnya.

Karena itu segitiga ABC adalah segitiga samasisi, dan telah dikonstruksi Pada suatu segmen AB yang diketahui. I.Def.20

Contoh 2.1.6. Proposisi 23.

> Mengkonstruksi suatu sudut yang sama dengan suatu sudut pada suatu garis yang diketahui dan pada suatu titik di garis itu.

Misalkan $\angle DCE$ adalah sudut yang diketahui dan AB adalah suatu garis yang diketahui