Teorema Saccheri Legendre

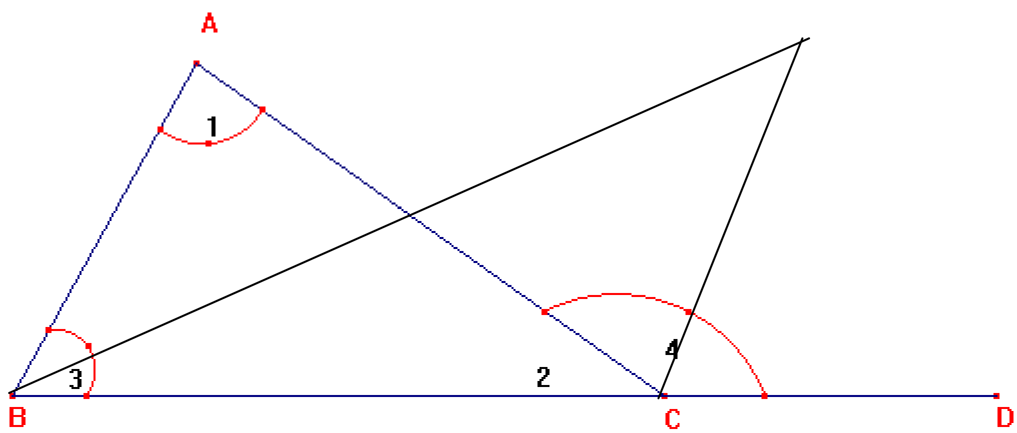
Teorema yang amat penting berikut ini memerlukan *postulat Archimedes* tentang kontinuitas untuk pembuktiannya.

Teorema: Jumlah ukuran ketiga sudut dalam suatu segitiga adalah *kurang dari* atau *sama dengan 180*^{0}. [*Dalam* $\Delta ABC\ (\angle A + \angle B + \angle) \le 180^0$]

Hasil ini akan amat mengejutkan anda, oleh karena anda sudah terbiasa dengan pengertian suatu jumlah yang tepat = 180^0. Namun demikian ketepatan ini tidak dapat dibuktikan dalam geometri netral.

Lemma: Jumlah ukuran dua sudut dalam suatu segitiga kurang dari 180^0.

Bukti: Pandanglah ΔABC dan misalkan D terletak pada $\overrightarrow{BC}$ sedemikian sehingga C diantara B dan D. Berdasarkan definisi, $\angle 4$ adalah sudut luar dari ΔABC, dan karena itu $\angle 4 > \angle 1$. Karena $\angle 4 + \angle 2$ = 180^0, maka $\angle 4$ = 180^0 - $\angle 2$. Oleh karena itu dengan melakukan substitusi $\angle 1$ < 180^0 - $\angle 2$, sehingga $\angle 1$ + $\angle 2$ < 180^0,
dan $\angle 1$ + $\angle 3$ < $180^{0.}$.



Lemma: Untuk sembarang ΔABC terdapat $\Delta A_1B_1C_1$ yang jumlah ukuran sudutnya sama dengan ΔABC, tetapi $\angle A_1 \le \frac{1}{2} \angle A$

Bukti: Pandanglah ΔABC dimana E adalah titik tengah dari $\overline{BC}$.Tempatkanlah titik F pada $\overrightarrow{AE}$ sedemikian sehingga E ada diantara A dan F dan AE = EF. Jika kita hubungkan FC dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\Delta BEA \cong \Delta CEF$, sehingga $\angle 2 = \angle 5; \angle 3 = \angle 6$. Sekarang jika jumlah sudut ΔABC ditulis sebagai S(ΔABC), maka S(ΔABC)= $\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$.
Dengan melakukan substitusi kita peroleh bahwa S(ΔABC) = $\angle 1 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 4 = \angle CAF + \angle AFC + \angle FCA$ yang adalah jumlah dari sudut-sudut ΔAFC. Karena itu ΔAFC mempunyai jumlah sudut yang sama dengan ΔABC. Karena $\angle A = \angle 1 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 5$, maka salah satu dari $\angle 1$ atau $\angle 5$ yang lebih kecil dari $\frac{1}{2}\angle A$.
Jika $\angle 1 \le \frac{1}{2}\angle A$, misalkan A = A_1, F = B_1 dan C = C_1. Jika $\angle 5 \le \frac{1}{2}\angle A$, misalkan F =$A_1$, C = C_1 dan A = B_1. dan $\Delta A_1B_1C_1$ adalah sebuah segitiga yang dikehendaki.

Kita sekarang siap untuk membuktikan Teorema Saccheri Legendre berikut.

Teorema: Jumlah sudut-sudut suatu segitiga adalah kurang dari atau sama dengan 180^0.

Bukti:

Kita akan gunakan pembuktian tidak langsung dan misalkan bahwa terdapat suatu ΔABC dengan jumlah sudut-sudutnya adalah = 180^0 + *p*, dimana *p* adalah sembarang bilangan positif. Dengan menggunakan Lemma di atas, kita dapat menghasilkan suatu $\Delta A_1B_1C_1$ yang juga sama dengan jumlah sudut ΔABC (=180^0 + *p*) dimana $\angle A_1 = \frac{1}{2}\angle A$. Sekarang kita dapat menerapkan Lemma ini juga untuk menghasilkan $\Delta A_2B_2C_2$ dengan jumlah sudut yang sama dengan $\Delta A_1B_1C_1$ dan sama dengan jumlah sudut ΔABC dengan $\angle A_2 \le \angle A_1 \le \angle A$. Jika kita ulangi proses ini, kita dapat mengkonstruksikan suatu barisan segitiga-segitiga : $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$, . . . , $\Delta A_nB_nC_n$, masing-masing dengan jumlah sudut = 180^0 + *p*, sedemikian sehingga untuk sembarang *n* > 0, $\angle A_n \le \frac{1}{2^n}\angle A$. Sekarang sifat Archimedes untuk bilangan real memungkinkan kita untuk memilih sembarang *n* yang cukup besar sedemikian sehingga $\angle A_n$ adalah sekecil mungkin kita pilih, dan secar khusus sedemikian sehingga $\angle A_n \le p$. Sekarang, karena $\angle A_n + \angle B_n + \angle C_n = 180^0 + p$, disimpulkan bahwa $\angle B_n + \angle C_n > 180^0$ YANG BERTENTANGAN DENGAN Lemma pertama (jumlah dua sudut dalam suatu segitiga < 180^0).

Catatan: Postulat Archimedes untuk Bilangan Real: *Misalkan M dan e adalah dua bilangan positif. Maka, ada suatu bilangan bulat positif n sedemikian sehingga ne>M*

Corollary: Jumlah sudut-sudut dalam suatu segiempat konveks adalah kurang dari atau sama dengan 360^0.

Soal: 1. Buktikan bahwa sudut luar pada suatu segitiga adalah kurang dari atau sama dengan jumlah dua sudut dalam yang berjauhan.
Soal: 2. Buktikan Corollary diatas.
Soal: 3. Sudut-sudut puncak pada segiempat Saccheri adalah tidak tumpul.
Soal: 4. Sisi atas dan sisi alas dalam segiempat Saccheri adalah paralel.