Pertemuan ke-: 3, 4, dan 5
Penyusun : Kosim Rukmana
Materi:
Sistem Bilangan Real
3. Aksioma Lapangan Bilangan Real
4. Aksioma Urutan Bilangan Real
5. Nilai Mutlak Bilangan Real

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

3. Aksioma Lapangan Bilangan Real

3.1 Aksioma Lapangan Bilangan Real

Pada himpunan bilangan real R didefinisikan dua operasi biner, dinotasikan dengan + dan . dan berturut-turut disebut operasi tambah dan kali atau penjumlahan dan perkalian. Operasi-operasi ini memenuhi sifat-sifat berikut:

(T1) a + b = b + a, untuk setiap a, b $\in$ R (sifat komutatif operasi tambah)

(T2) (a + b) + c = a + (b + c), untuk setiap a, b, c $\in$R (sifat asosiatif operasi tambah)

(T3) Terdapat unsur 0 $\in$R sehingga 0 + a = a + 0 = a , untuk setiap a $\in$R (eksistensi unsur nol).

(T4) Untuk setiap a $\in$R, terdapat -a $\in$R sehingga a + (-a) = (-a) + a = 0 eksistensi unsur lawan/invers tambah).

(K1) a . b = b . a , untuk setiap a, b $\in$ R (sifat komutatif operasi kali).

(K2) (a . b) . c = a . (b . c), untuk setiap a, b, c $\in$R (sifat asosiatif op. kali).

(K3) Terdapat unsur 1 $\in$ R, 1 $\neq$ 0 sehingga 1 . a = a . 1 = a, untuk setiap a $\in$ R (eksistensi unsur satuan).

(K4) Untuk setiap a $\in$R, a $\neq$ 0, terdapat 1/a $\in$R sehingga a.(1/a) = (1/a) .a = 1 (eksistensi unsur kebalikan/invers kali).
a . (b + c) = (a . b) + (a . c) dan

(b + c) . a = (b . a) + (c . a) , untuk setiap a, b, c $\in$ R (sifat distributif operasi kali terhadap operasi tambah)

3.2 Teorema (keunikan unsur 0 dan 1)

(a) *Jika* z *dan* a *unsur-unsur di* R *sehingga* z + a = a*, maka* z = 0

(b) *Jika* u *dan* b $\neq$ 0 *unsur-unsur di* R *sehingga* u . b = b*, maka* u = 1

3.3 Teorema (keunikan unsur invers)

(a) *Jika* a , b $\in$ R *sehingga* a + b = 0*, maka* b = -a.

(b) *Jika* a , b $\in$ R *dan* a $\neq$ 0 *sehingga* a . b = 1*, maka* b = 1/a.

3.4 Teorema

Jika a $\in$ R*, maka:*

(a) a . 0 = 0.

(b) (-1) . a = -a

(c) – (-a) = a

(d) (-1) . (-1) = 1

3.5 Teorema

Misalkan a, b, c*,* $\in$ R.

(a) *Jika* a $\neq$ 0*, maka* 1/a $\neq$ 0 *dan* 1/(1/a) = a.

(b) *Jika* a . b = a . c *dan* a $\neq$ 0, *maka* b = c.

(c) *Jika* a . b = 0*, maka* a = 0 *atau* b = 0

3.6 Teorema

Tidak terdapat bilangan rasional r sehingga $r^2 = 2$

4. Aksioma Urutan Bilangan Real

4.1 Aksioma Urutan Bilangan Real R

Terdapat himpunan bagian tidak kosong P dari R yang disebut himpunan bilangan real positip, yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

(i) *Jika* a, b *unsur-unsur di* P, *maka* a + b *juga unsur di* P

(ii)*Jika* a, b *unsur-unsur di* P, *maka* a . b *juga unsur di* P

Jika a $\in$ R,maka hanya satu dari yang berikut dipenuhi:

a $\in$ P , a = 0 , -a $\in$ P

Sifat (iii) disebut sifat trikhotomi, menyatakan bahwa R merupakan gabungan dari tiga himpunan yang saling lepas (disjoint), yaitu: $\{ a \mid a \in P\}$, $\{ 0 \}$, dan $\{ -a \mid a \in P \}$.

Himpunan $\{ -a \mid a \in P \}$ disebut himpunan bilangan real negatip.

4.2 Definisi

Misalkan $a \in R$, $b \in R$

(i) $a - b \in P$ *jika dan hanya jika* $a > b$ (*atau* $b < a$)

(ii) $a - b \in P \cup \{ 0 \}$ *jika dan hanya jika* $a \geq b$ (*atau* $b \leq a$)

(iii) $a < b < c$ *jika dan hanya jika* $a < b$ *dan* $b < c$

(iv) $a \leq b \leq c$ *jika dan hanya jika* $a \leq b$ *dan* $b \leq c$

4.3 Teorema

Misalkan $a, b, c \in R$

(a) *Jika* $a > b$ *dan* $b > c$, *maka* $a > c$

(b) *Jika* $a \geq b$ *dan* $b \geq a$, *maka* $a = b$

4.4 Teorema

(a) *Jika* $a \in R$, *dan* $a \neq 0$, *maka* $a^2 > 0$

(b) $1 > 0$

(c) *Jika* $n \in N$, *maka* $n > 0$

4.5 Teorema

Misalkan a, b, dan c *masing-masing bilangan real*

(a) *Jika* $a > b$, *maka* $a + c > b + c$

(b) *Jika* $a > b$ *dan* $c > d$, *maka* $a + c > b + d$

(c) *Jika* $a > b$ *dan* $c > 0$, *maka* $c.a > c.b$

Jika $a > b$ *dan* $c < 0$, *maka* $c.a < c.b$

(d) *Jika* $a > 0$, *maka* $1/a > 0$

Jika $a < 0$, *maka* $1/a < 0$

4.6 Teorema

Jika $a \in R$ *sehingga* $0 \leq a < \varepsilon$ *untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *maka* $a = 0$

4.7 Teorema

Jika $a, b \in R$, dan $a - \varepsilon < b$ *untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *maka* $a \leq b$.

4.8 Teorema

Jika $a, b \in R$ *dan* $a.b > 0$, *maka salah satu yang berikut dipenuhi:*

(i) $a > 0$ *dan* $b > 0$, *atau*

(ii) $a < 0$ *dan* $b < 0$

5. Nilai Mutlak Bilangan Real

5.1 Definisi

Misalkan $a \in R$. ***Nilai mutlak*** *dari* a *dinyatakan oleh* $|a|$, *didefinisikan sebagai berikut:*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jika } a > 0 \\ 0 & \text{jika } a = 0 \\ -a & \text{jika } a < 0 \end{cases}$$

5.2 Teorema

(a) $|ab| = |a|\,|b|$ *untuk setiap* $a, b \in R$.

(b) $|a|^2 = a^2$, *untuk setiap* $a \in R$.

(c) *Jika* $c \geq 0$, *maka* $|a| \leq c$ *jika dan hanya jika* $-c \leq a \leq c$

(d) $-|a| \leq a \leq |a|$, *untuk setiap* $a \in R$.

(e) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Ketidaksamaan Segitiga)

5.3 Teorema (Akibat)

Untuk setiap a, b *di* R*, berlaku :*

(a) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

(b) $|a - b| \leq |a| + |b|$.

5.4 Teorema (Akibat)

Untuk $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, *berlaku:*

$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.

5.5 Definisi

Misalkan $a \in R$ *dan* $\varepsilon > 0$.

Lingkungan-ε *dari* a *adalah himpunan* $V_\varepsilon(a) = \{x \in R \mid |x - a| < \varepsilon\}$

Untuk $a \in R$, pernyataan $x \in V_\varepsilon(a)$ ekuivalen dengan salah satu dari pernyataan

5.6 Teorema

Misalkan $a \in R$. *Jika x terletak dalam lingkungan* $V_\varepsilon(a)$ *untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *maka* $x = a$.