Pertemuan ke-: 6, 7, 8, dan 9
Penyusun : Kosim Rukmana
Materi:
Sistem Bilangan Real

6. Sifat Kelengkapan Bilangan Real
7. Responsi dan UTS

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

6. Sifat Kelengkapan Bilangan Real

6.1 Definisi

Misalkan $S \subseteq R$

(i) *Suatu bilangan* $u \in R$ *disebut batas atas dari* S *jhj* $s \leq u$, $\forall s \in S$.

(ii) *Suatu bilangan* $w \in R$ *disebut batas bawah dari* S *jhj* $w \leq s$, $\forall s \in S$.

6.2 Definisi

Misalkan $S \subseteq R$.

(i) *Jika* S *terbatas di atas, maka batas atas* u *disebut supremum (batas atas terkecil) jhj tidak ada bilangan yang lebih kecil dari* u *yang merupakan batas atas dari* S.

(ii) *Jika* S *terbatas di bawah, maka batas bawah* w *disebut infimum (batas bawah terbesar) jhj tidak ada bilangan yang lebih besar dari* w *yang merupakan batas bawah dari* S.

6.3 Lemma

Suatu bilangan real u adalah supremum dari himpunan tak kosong S *dari* R *jika dan hanya jika u memenuhi dua kondisi*:

(1) $s \leq u$ *untuk setiap* $s \in S$

(2) *jika* $v < u$, *maka terdapat* $s' \in S$ *sehingga* $v < s'$

6.4 Lemma

Suatu batas atas u dari himpunan tak kosong S *di* R *adalah supremum dari* S *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $s_\varepsilon \in S$ *sehingga* $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.

6.5 Sifat Supremum untuk R

Setiap himpunan bilangan real yang tak kosong dan terbatas di atas, mempunyai supremum di R.

6.6 Sifat Infimum untuk R

Setiap himpunan bilangan real yang tak kosong dan terbatas di bawah, mempunyai infimum di R.

6.7 Sifat Archimedes

Jika $x \in R$, *maka terdapat* $n_x \in N$ *sehingga* $x < n_x$

6.8 Teorema (Akibat Sifat Archimedes)

Jika y dan z menyatakan bilangan-bilangan real positip, maka:

(a) *Terdapat* $n \in N$ *sehingga* $z < ny$

(b) *Terdapat* $n \in N$ *sehingga* $0 < 1/n < y$

(c) *Terdapat* $n \in N$ *sehingga* $n - 1 \leq z < n$

6.9 Teorema (Eksistensi $\sqrt{2}$)

Terdapat bilangan real positip x *sehingga* $x^2 = 2$.

6.10 Teorema Kepadatan Q pada R

Jika x *dan* y *bilangan-bilangan real dengan* $x < y$, *maka terdapat bilangan rasional* r *sehingga* $x < r < y$.

6.11 Teorema (Akibat)

Jika x *dan* y *bilangan-bilangan real dengan* $x < y$, *maka terdapat suatu bilangan irrasional* z *sehingga* $x < z < y$.

6.12 Definisi : Interval Tersarang

Barisan interval I_n , $n \in N$, disebut tersarang (lihat gambar 2.6.1) jika dan hanya jika kondisi-kondisi seperti berikut dipenuhi:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

6.13 Sifat Interval Tersarang

Jika $I_n = [\, a_n, b_n \,]$, $n \in N$, *merupakan barisan tersarang dari interval terbatas tertutup*, *maka terdapat bilangan* $\xi \in R$ *sehingga* $\xi \in I_n$, *untuk setiap* $n \in N$

6.14 Teorema

Jika $I_n = [a_n , b_n]$, $n \in N$ *barisan tersarang dari interval tertutup terbatas sehingga panjang* $b_n - a_n$ *dari* I_n *memenuhi:*

$$\inf \{ b_n - a_n \mid n \in N \} = 0,$$

maka bilangan ξ *termuat di* I_n *untuk setiap* $n \in N$ dan ξ *adalah unik*.