Pertemuan ke-: 10, 11, dan 12
Penyusun : Kosim Rukmana
Materi:
Barisan Bilangan Real
7. Barisan dan Limit Barisan
6. Teorema Limit Barisan
7. Barisan Monoton

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

7. Barisan dan Limit Barisan

7.1 Definisi

Suatu barisan bilangan real (barisan di *R*) adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan asli *N* dan mempunyai range yang termuat di himpunan bilangan real *R.*

7.2 Definisi

Misalkan X = (x_n) *dan* Y = (y_n) *masing-masing adalah barisan bilangan real. Berturut-turut didefinisikan jumlah, selisih, dan perkalian barisan:* $X + Y = (x_n + y_n \mid n \in N)$, $X - Y = (x_n - y_n \mid n \in N)$, *dan* $X . Y = (x_n y_n) , n \in N$

Jika $c \in R$, *didefinisikan* $cX = (cx_n \mid n \in N)$. *Jika* $Z = (z_n)$, *barisan bilangan real dengan* $z_n \neq 0$ *untuk setiap* $n \in N$, *maka didefinisikan hasilbagi barisan* X *dan* Z *adalah barisan* $X/Z = (x_n/z_n \mid n \in N)$.

7.3 Definisi

Misalkan X = (x_n) *adalah suatu barisan bilangan real. Suatu bilangan real* x *disebut limit dari* (x_n) *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat suatu bilangan asli* $K(\varepsilon)$ *sehingga untuk semua* $n \geq K(\varepsilon)$, x_n *terletak pada lingkungan-*ε *dari* x ($V_\varepsilon(x)$).

7.4 Teorema (Keunikan Limit Barisan)

Limit suatu barisan bilangan real (jika ada) adalah unik.

7.5 Teorema

Misalkan X = (x_n) *barisan bilangan real, dan* $x \in R$.

Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

(a) X *konvergen ke* x.

(b) *Untuk setiap lingkungan*-ε $V_\varepsilon(x)$, *terdapat suatu bilangan* asli $K(\varepsilon)$ *sehingga untuk semua* $n \geq K(\varepsilon)$, x_n *terletak pada* $V_\varepsilon(x)$.

(c) *Untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat suatu bilangan asli* $K(\varepsilon)$ *sehingga untuk semua* $n \geq K(\varepsilon)$, x_n *memenuhi* $|x_n - x| < \varepsilon$.

(d) *Untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat suatu bilangan asli* $K(\varepsilon)$ *sehingga untuk semua* $n \geq K(\varepsilon)$, x_n *memenuhi* $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

7.6 Definisi

Jika X = (x1, x2, …, xn, …) *adalah barisan bilangan real dan jika* m *bilangan asli yang diberikan, maka ekor*-m *dari* X *adalah barisan* $X_m = (x_{m+n} \mid n \in N) = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$

7.7 Teorema:

Misalkan $X = (x_n \mid n \in N)$ *barisan bilangan real dan* $m \in N$.

Barisan ekor-m $X_m = (x_{m+n} \mid n \in N)$ *dari* X *konvergen jika dan hanya jika barisan* X *konvergen. Dalam kasus ini*, $\lim X_m = \lim X$.

7.8 Teorema

Misalkan $A = (a_n)$ *dan* $X = (x_n)$ *masing-masing barisan bilangan real dan* $x \in R$. *Jika untuk suatu* $C > 0$ *dan suatu* $m \in N$ *berlaku:* $|x_n - x| \leq C |a_n|$ *untuk setiap* $n \in N$, $n \geq m$, *dan jika* $\lim (a_n) = 0$, *maka* $\lim (x_n) = x$.

8. Teorema Limit Barisan

8.1 Definisi

Suatu barisan bilangan real $X = (x_n)$ *disebut terbatas jika dan hanya jika terdapat bilangan real* $M > 0$ *sehingga* $|x_n| \leq M$ *untuk setiap* $n \in N$.

8.2 Teorema

Suatu barisan bilangan real yang konvergen adalah terbatas.

8.3 Teorema

(a) *Jika* $X = (x_n)$ *dan* $Y = (y_n)$ *masing-masing adalah barisan bilangan real dan berturut-turut konvergen ke* x *dan* y, *dan misalkan* $c \in R$, *maka barisan-barisan* X + Y, X – Y, X.Y, *dan* cX *berturut-turut konvergen ke* x + y, x – y, x.y, *dan* cx.

(b) *Jika* $X = (x_n)$ *konvergen ke* x *dan* $Z = (z_n)$ *barisan bilangan real yang tidak nol konvergen ke* z ($z \neq 0$), *maka barisan hasil bagi* X/Z *konvergen ke* x/z.

8.4 Teorema

Jika $X = (x_n)$ *suatu barisan bilangan real yang konvergen dan jika* $x_n \geq 0$ *untuk setiap* $n \in N$, *maka* $x = \lim (x_n) \geq 0$.

8.5 Teorema

Jika $X = (x_n)$ *dan* $Y = (y_n)$ *masing-masing barisan bilangan real yang konvergen dan* $x_n \leq y_n$, *untuk setiap* $n \in N$, *maka* $\lim (x_n) \leq \lim (y_n)$.

8.6 Teorema

Jika $X = (x_n)$ *barisan bilangan real yang konvergen,* $a, b \in R$ *dan* $a \leq x_n \leq b$, *untuk setiap* $n \in N$ *maka* $a \leq \lim (x_n) \leq b$.

8.7 Teorema Apit

Misalkan $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$ *dan* $Z = (z_n)$ *masing-masing barisan bilangan real dan* $x_n \leq y_n \leq z_n$, *untuk setiap* $n \in N$.

Jika $\lim (x_n) = \lim (z_n)$, *maka* $Y = (y_n)$ *konvergen dan* $\lim (x_n) = \lim (y_n) = \lim (z_n)$.

8.8 Teorema

Jika barisan $X = (x_n)$ *konvergen ke* x, *maka barisan* $(|x_n|)$ *konvergen ke* $|x|$

8.9 Teorema

Jika barisan $X = (x_n)$ *konvergen ke* x dan $x_n \geq 0$ *, maka barisan* $(\sqrt{x_n})$ konvergen ke $\sqrt{x}$.

8.10 Teorema

Misalkan (x_n) *suatu barisan bilangan real positif sehingga* $\lim (x_{n+1}/x_n) = L$. *Jika* $L < 1$*, maka barisan* (x_n) *konvergen dan* $\lim (x_n) = 0$.

9. Barisan Monoton

9.1 Definisi

Misalkan $X = (x_n)$ *suatu barisan bilangan real.*

Barisan X *disebut naik jika memenuhi ketidaksamaan*

$x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le x_{n+1} \le \dots$ *atau dengan ungkapan lain*

$x_n \le x_{n+1}$ untuk setiap $n \in N$

Barisan X *disebut turun jika memenuhi ketidaksamaan*

$x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \dots$ *atau dengan ungkapan lain*

$x_n \ge x_{n+1}$ untuk setiap $n \in N$

Barisan X *disebut monoton jika barisan itu naik atau turun (tidak keduanya)*

Teorema Konvergensi Monoton

Suatu barisan bilangan real monoton adalah konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut terbatas.

Selanjutnya:

(a) Jika $X = (x_n)$ *barisan naik terbatas, maka* $\lim (x_n) = \sup \{ x_n \mid n \in N \}$

(c) *Jika* $Y = (y_n)$ *barisan turun terbatas, maka* $\lim (y_n) = \inf \{ y_n \mid n \in N \}$