Pertemuan ke-: 13, 14, dan 15
Penyusun : Kosim Rukmana
Materi:
Barisan Bilangan Real
6. Barisan Bagian dan Teorema Bolzano-Weierstrass
11. Barisan Cauchy
12. Barisan Divergen Murni

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

10. Barisan Bagian dan Teorema Bolzano-Weierstrass

10.1 Definisi

Misalkan $X = (x_n)$ *barisan bilangan real dan misalkan* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ *barisan bilangan asli yang monoton naik.*

Barisan baru $X' = (x_{nk})$ *yang didefinisikan oleh*: $(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk}, \ldots)$ *disebut barisan bagian dari barisan* X.

10.2 Teorema

Jika barisan bagian bilangan real $X = (x_n)$ *konvergen ke bilangan real x, maka setiap barisan bagian* $X' = (x_{nk})$ *dari* X *juga konvergen ke* x.

10.3 Teorema

Misalkan $X = (x_n)$ *suatu barisan bilangan real.*

Pernyataan berikut ekuivalen:

(i) *Barisan* $X = (x_n)$ *tidak konvergen ke* $x \in R$

(ii) *Terdapat suatu* $\varepsilon_0 > 0$ *sehingga untuk sebarang* $k \in N$ *terdapat* $n_k \in N$ *sehingga* $n_k \geq k$ dan $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$

(iii) *Terdapat suatu* $\varepsilon_0 > 0$ *dan suatu barisan bagian* $X' = (x_{nk})$ *dari X sehingga* $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$, *untuk semua* $n \in N$.

10.4 Teorema (Kriteria Divergensi)

Jika suatu barisan bilangan real $X = (x_n)$ *mempunyai salah satu sifat di bawah ini, maka barisan* X *divergen:*

(i) *Barisan* X *mempunyai dua barisan bagian yang konvergen* $X' = (x_{nk})$ *dan* $X'' = (x_{rk})$ *dengan limit yang berbeda.*

(ii) *Barisan* X *tak terbatas.*

10.5 Teorema Barisan Bagian Monoton

Jika $X = (x_n)$ *adalah barisan bilangan real, maka terdapat barisan bagian dari* X *yang monoton.*

10.6 Teorema Bolzano-Weierstrass

Barisan bilangan real yang terbatas mempunyai barisan bagian yang konvvergen.

10.7 Teorema

Jika $x \in R$, *dan* $X = (x_n)$ *adalah barisan bilangan real terbatas yang mempunyai sifat, bahwa setiap barisan bagian konvergen dari* X *adalah konvergen ke* x, *maka barisan* X *konvergen ke* x.

11. Barisan Cauchy

11.1 Definisi

Suatu barisan bilangan real $X = (x_n)$ *disebut barisan Cauchy jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* H, *sehingga untuk setiap* $n \geq H$, $m \geq H$, *berlaku* $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

11.2 Lemma

Jika barisan bilangan real $X = (x_n)$ *merupakan barisan Cauchy maka barisan* X *terbatas*.

11.3 Teorema (Kriteria Konvergensi Cauchy)

Barisan bilangan real $X = (x_n)$ *konvergen jika dan hanya jika barisan* X *barisan Cauchy.*

11.4 Definisi

Barisan bilangan real $X = (x_n)$ *disebut barisan Kontraktif jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan real* C, $0 < C < 1$, *sehingga memenuhi:*

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n| \quad \textit{untuk setiap } n \in N.$$

Bilangan C *disebut konstanta kontrraktif*.

11.5 Teorema

Setiap barisan konttraktif adalah barisan Cauchy.

11.6 Teorema (Akibat)

Jika $X = (x_n)$ *barisan kontraktif dengan konstanta* C, $0 < C < 1$ *dan jika* $\lim X = x^*$, *maka*:

12. Barisan Divergen Murni

12.1 Definisi

Misalkan (x_n) *suatu barisan bilangan real.*

(i) *Barisan* (x_n) *disebut menuju* $+\infty$, *ditulis* $\lim (x_n) = +\infty$ *jika dan hanya jika untuk setiiap bilangan real* α *terdapat bilangan asli* K *sehinggga jika* $n \geq K$, *maka* $x_n > \alpha$

(ii) *Barisan* (x_n) *disebut menuju* $-\infty$, *ditulis* $\lim (x_n) = -\infty$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan real* β *terdapat bilangan asli* K *sehingga jika* $n \geq K$, *maka* $x_n < \beta$

Barisan (x_n) *dengan* $\lim (x_n) = +\infty$ *atau* $\lim (x_n) = -\infty$ *disebut barisan divergen murni*

12.2 Teorema

Barisan bilangan real $X = (x_n)$ *yang monoton adalah divergen murni jika dan hanya jika barisan* X *tak terbatas*.

(i) *Jika* (x_n) *barisan monoton naik tak terbatas, maka* $\lim (x_n) = +\infty$

(ii) *Jika* (x_n) *barisan monoton turun tak terbatas, maka* $\lim (x_n) = -\infty$

12.3 Teorema (Uji Banding)

Misalkan (x_n) *dan* (y_n) *masing-masing barisan bilangan real dan* $x_n \leq y_n$ *untuk setiap* $n \in N$.

(i) *Jika* $\lim (x_n) = +\infty$, *maka* $\lim (y_n) = +\infty$.

(ii) *Jika* $\lim (y_n) = -\infty$, *maka* $\lim (x_n) = -\infty$.

12.4 Teorema (Uji Banding Limit)

Misalkan (x_n) *dan* (y_n) *masing-masing barisan bilangan real* positip dan untuk suatu $L \in R$, $L > 0$, berlaku $\lim (x_n/y_n) = L$, maka $\lim (x_n) = +\infty$ jika dan hanya jika $\lim (y_n) = +\infty$.