Jurusan Pendidikan Matematika
FPMIPA – Universitas Pendidikan Indonesia

Kelompok : ……..

1. ………… 4. …………
2. ………… 5. …………
3. ………… 6. …………

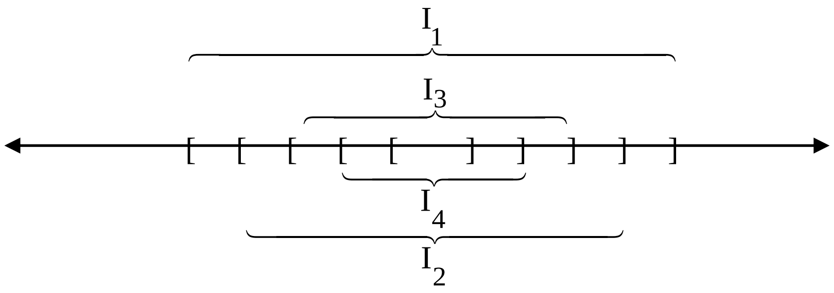
Bahan Diskusi/Tugas Kelompok
Topik: Interval Tersarang

2.6 Interval Tersarang

2.6.1 Definisi

Barisan interval I_n , $n \in N$, *disebut* ***tersarang*** (*lihat gambar*) *jhj kondisi-kondisi seperti berikut dipenuhi:*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ \ldots \supseteq I_n \ \supseteq I_{n+1} \supseteq \ \ldots$$



Gambar 2.6.1 (Interval tersarang)

Bahan/Tugas Diskusi Kelompok

1. Diberikan $I_n = [\ 0, 1/n\ ]$, $n \in N$.
   a) Dengan menggunakan definisi 2.6.1 di atas, perlihatkan bahwa I_n merupakan interval tersarang.

   b) Untuk setiap $n \in N$, $0 \in I_n$ sehingga $0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

   Tunjukkan bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$

   dengan menunjukkan bahwa untuk $x < 0$ atau $x > 0$, $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

   (i) untuk $x < 0$ trivial (mengapa ?)
   (ii) untuk $x > 0$, gunakan Akibat Sifat Archimedes 2.5.3 b)

2. Dengan cara yang serupa seperti pada soal 1. tunjukkan:

   Jika $I_n = (\ 0, 1/n\ )$, $n \in N$, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$

Bahan Diskusi/Tugas Kelompok
Topik: Interval Tersarang

Sifat Interval Tersarang

2.6.2 Teorema
Jika $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in N$, *merupakan barisan tersarang dari interval terbatas tertutup, maka terdapat* $\xi \in R$ *sehingga* $\xi \in I_n$, $\forall n \in N$

Bahan/Tugas Diskusi Kelompok

1. Buktikan teorema 2.6.2 di atas.
   Petunjuk:
   Untuk pembuktian teorema 2.6.2 di atas, harus ditunjukkan $\exists \xi \in R$ sehingga $a_n \le \xi \le b_n$, $\forall n \in N$ ($a_n \le \xi$ dan $\xi \le b_n$)
   Untuk menunjukkan $\exists \xi \in R$ sehingga $a_n \le \xi$, $\forall n \in N$ adalah dengan menunjukkan himpunan $A = \{ a_n \mid n \in N \}$ terbatas di atas; sebutlah sup $A = \xi$; dst.
   Untuk menunjukkan $\xi \le b_n$, $\forall n \in N$ buatlah langkah-langkah sbb:
   (i) Misalkan $i \in N$, i dipilih sembarang.
   (ii) Tunjukkan b_i merupakan suatu batas atas dari $A = \{ a_n \mid n \in N \}$ dengan membagi dua kasus:
   Kasus 1) Jika/untuk $n \ge i$
   Kasus 2) Jika/untuk $n < i$
   Untuk kedua kasus itu tunjukkan bahwa $a_n \le b_i$
   Karena i dipilih sembarang, tunjukkan keberlakuannya untuk setiap $n \in N$

2.6.3 Teorema
Jika $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in N$ *barisan tersarang dari interval tertutup terbatas sehingga panjang* $b_n - a_n$ *dari* I_n *memenuhi:*

$$\inf \{ b_n - a_n \mid n \in N \} = 0,$$

maka bilangan ξ *termuat di* I_n *untuk setiap* $n \in N$ dan ξ *adalah unik*.

Bahan/Tugas Diskusi Kelompok

1. Buktikan teorema 2.6.3 di atas !
   Petunjuk:
   Untuk pembuktian teorema di atas, langkah-langkahnya adalah sbb:
   (i) Tunjukkan bahwa himpunan $B = \{ b_n \mid n \in N \}$ terbatas di bawah; sebut $\inf B = \eta$.
   (ii) Dengan cara yang serupa seperti pada pembuktian teorema 2.6.2 langkah ke (ii) tunjukkan bahwa $a_n \le \eta$
   (iii) Tunjukkan bahwa $\xi \le \eta$ ………………………….. (1)
   (iv) Tunjukkan bahwa $x \in I_n$, $\forall n \in N$ jhj $\xi \le x \le \eta$.
   (v) Berdasarkan $\inf \{ b_n - a_n \mid n \in N \} = 0$, tunjukkan $b_m - a_m < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan suatu $m \in N$ ………………... (2)
   (vi) Gunakan sifat supremum, infimum, (1) dan (2) untuk menunjukkan $0 \le \eta - \xi \le b_m - a_m < \varepsilon$
   (vii) Karena $\varepsilon > 0$ sembarang, tunjukkan $\eta = \xi$

2.6.4 Latihan

1. Jika $I = [a, b]$ dan $I' = [a', b']$ interval-interval tertutup di R , tunjukkan $I \subseteq I'$ jika dan hanya jika $a' \le a$ dan $b \le b'$.

2. Jika $S \subseteq R$ tak kosong , tunjukkan bahwa S terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu interval tertutup terbatas $I \subseteq R$ sehingga $S \subseteq I$.

3. Jika $S \subseteq R$ tak kosong dan terbatas, I_S adalah interval $I_S = [\inf S, \sup S]$, tunjukkan bahwa $S \subseteq I_S$. Selanjutnya, jika J sebarang interval tertutup terbatas di R sehingga $S \subseteq J$, tunjukkan $I_S \subseteq J$.

4. Tunjukkan jika $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$ adalah barisan tersarang dari interval tertutup di R, dan jika $I_n = [a_n , b_n]$, maka $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \le \dots$ dan $b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n \ge \dots$.

5. Buktikan, jika $K_n = (n, \infty)$, $n \in N$, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \varnothing$