Jurusan Pendidikan Matematika
FPMIPA – Universitas Pendidikan Indonesia

Kelompok : ……..

1. ………… 4. …………
2. ………… 5. …………
3. ………… 6. …………

Bahan Diskusi/Tugas Kelompok
Topik: Limit Barisan Bilangan Real

Limit Barisan

3.1.1 Definisi
Misalkan X = (x_n) *adalah suatu barisan bilangan real. Suatu bilangan real* x *disebut **limit** dari* (x_n) *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat suatu bilangan asli* $K(\varepsilon)$ *sehingga untuk semua* $n \geq K(\varepsilon)$, x_n *terletak pada lingkungan-*ε *dari* x ($V_\varepsilon(x)$).

3.1.2 Teorema (Keunikan Limit Barisan)
Limit suatu barisan bilangan real (jika ada) adalah unik.

Bahan/Tugas Diskusi Kelompok

1. Buatlah 3 pernyatan yang ekuivalen dengan definisi 3.1.1 di atas.
   Perhatikan kalimat x_n *terletak pada lingkungan-*ε *dari* x ($V_\varepsilon(x)$).
2. Buktikan teorema 3.1.2 dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   (i) Memisalkan limit barisan itu tidak unik, jadi ada x dan y masing-masing limit dari barisan dan $x \neq y$
   (ii) Buat lingkungan-ε dari x dan y yang saling disjoint untuk suatu ε
   (iii) Uraikan artinya $\lim (x_n) = x$ dan $\lim (x_n) = y$.
   (iv) Perlihatkan adanya kontradiksi
3. Gunakan definisi 3.1.1 untuk membuktikan limit-limit berikut ini:
   (i) $\lim\ (2n / (n + 1)) = 2$ (ii) $\lim\ (1 / \sqrt{(n + 7)}) = 0$
4. Tunjukkan bahwa $\lim (x_n) = 0$ jika dan hanya jika $\lim (|x_n|) = 0$.
   Berikan suatu contoh yang memperlihatkan bahwa kekonvergenan barisan $(|x_n|)$ tidak mengakibatkan kekonvergenan barisan (x_n).

Kelompok : ……..
1. ………… 4. …………
2. ………… 5. …………
3. ………… 6. …………

Bahan Diskusi/Tugas Kelompok
Topik: Ekor Barisan Bilangan Real

Ekor Barisan

3.1.3 Definisi
Jika $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ *adalah barisan bilangan real dan jika* m *bilangan asli yang diberikan, maka* **ekor**-m *dari* X *adalah barisan* $X_m = (x_{m+n} \mid n \in N) = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$

3.1.4 Teorema
Misalkan $X = (x_n \mid n \in N)$ *barisan bilangan real dan* $m \in N$.
Barisan ekor-m $X_m = (x_{m+n} \mid n \in N)$ *dari* X *konvergen jika dan hanya jika barisan* X *konvergen. Dalam kasus ini,* $\lim X_m = \lim X$.

3.1.5 Teorema
Misalkan $A = (a_n)$ *dan* $X = (x_n)$ *masing-masing barisan bilangan real dan* $x \in R$. *Jika untuk suatu* $C > 0$ *dan suatu* $m \in N$ *berlaku:*
$$|x_n - x| \leq C\,|a_n| \text{ untuk setiap } n \in N, n \geq m,$$
dan jika $\lim (a_n) = 0$, *maka* $\lim (x_n) = x$.

Bahan/Tugas Diskusi Kelompok

1. Buktikan teorema 3.1.4 dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   (i) Pembuktian dari kiri ke kanan: Jadi diketahui barisan $X = (x_n)$ konvergen misalkan lim X = x. Uraikan apa artinya lim X = x, kemudian tunjukkan lim X_m = lim X = x (gunakan definisi 3.1.1)
   (ii) Pembuktian dari kanan ke kiri: Jadi diketahui lim X_m = x. Uraikan apa artinya lim X_m = x. Kemudian tunjukkan lim X = lim X_m = x.

2. Buktikan teorema 3.1.5, dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   (i) Pemisalan/pengambilan $\varepsilon > 0$, ε sembarang.
   (ii) Uraikan apa artinya lim (a_n) = 0. (Catatan: jika C > 0 maka $\varepsilon/C > 0$)
   (iii) Berdasarkan hipotesis ($|x_n - x| \leq C|a_n|$ *untuk setiap* $n \in N, n \geq m$) tunjukan lim (x_n) = x.

3. Buktikan limit-limit berikut:
   (i) $\lim (1/3^n) = 0$ (ii) $\lim ((2n)^{1/n}) = 1$

Jurusan Pendidikan Matematika
FPMIPA – Universitas Pendidikan Indonesia

Kelompok : ……..

1. ………… 4. …………
2. ………… 5. …………
3. ………… 6. …………

Bahan Diskusi/Tugas Kelompok
Topik: Limit Barisan Bilangan Real

1. Tuliskan definisi dari barisan yang tak terbatas (berdasarkan definisi 3.2.1)

2. (i) Tuliskan kontraposotif dari teorema 3.2.2
   (ii) Tuliskan invers dari teorema 3.2.2
   (iii) Berikan contoh suatu barisan yang tidak konvergen tetapi terbatas
   (iv) Berikan contoh suatu barisan yang tidak konvergen dan tak terbatas

3. Buktikan teorema berikut ini (sebagian dari teorema 3.2.3) :
   Yaitu: " Jika barisan (x_n) dan (y_n) berturut-turut konvergen ke x dan y, maka barisan $(x_n y_n)$ konvergen ke xy
   Petunjuk !
   Ikuti langkah-langkah berikut:
   (i) Karena barisan (x_n) konvergen, maka barisan (x_n) terbatas. Tuliskan definisi (x_n) terbatas (munculkan bilangan M_1 sebagai batasnya).
   (ii) Misalkan $M = \sup \{ M_1 , |y| \}$
   (iii) Tuliskan artinya barisan (x_n) konvergen ke x, munculkan bilangan $K_1 \in N$
   (iv) Tuliskan artinya barisan (y_n) konvergen ke y, munculkan bilangan $K_2 \in N$
   (v) Misalkan $K = \sup \{ K_1 , K_2 \}$
   (vi) Tuliskan $|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy|$ dan seterusnya.

4. (i) Berikan contoh dua barisan yang masing-masing divergen tetapi jumlahnya konvergen
   (ii) Berikan contoh dua barisan yang masing-masing divergen tetapi hasil kalinya konvergen

5. Tunjukkan barisan (2^n) tidak terbatas.
   (Tunjukkan barisan tersebut tak terbatas)