Jurusan Pendidikan Matematika
FPMIPA – Universitas Pendidikan Indonesia

Bahan Diskusi/Tugas Kelompok
Topik: Kekontinuan Suatu Fungsi

Definisi 1:

Kriteria ε-δ untuk fungsi kontinu

Misalkan $A \subseteq R,\ f : A \longrightarrow R,\ c \in A$

f disebut kontinu di c jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sehingga jika* $x \in A$ *dan* $|x - c| < \delta$ *maka* $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$

Teorema:

Kriteria Barisan untuk fungsi kontinu

Misalkan $A \subseteq R,\ f : A \longrightarrow R,\ c \in A$

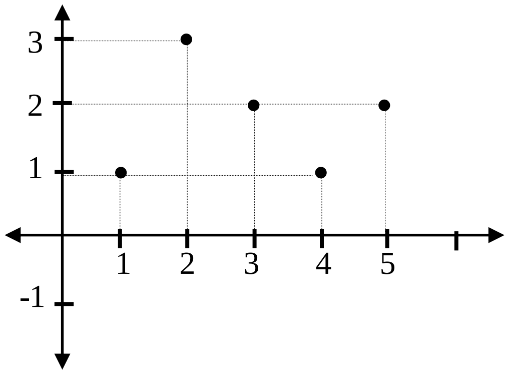
f disebut kontinu di c jika dan hanya jika untuk setiap barisan (x_n) *di A yang konvergen ke c, barisan* $(f(x_n))$ *konvergen ke f(c)*

Bahan/Tugas Diskusi Kelompok

1. Buatlah suatu pernyataan yang menerangkan fungsi f diskontinu di $c \in A \subseteq R$
   a. menggunakan kriteria ε-δ
   b. menggunakan kriteria barisan

2. Apakah definisi 1 di atas ekuivalen dengan definisi kontinu di Kalkulus :
   " Misalkan $I = [\,a,\ b\,]$ *suatu interval,* $f : I \longrightarrow R$*, dan* $c \in I$*. Fungsi f kontinu di c jika dan hanya jika* $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ *"*
   Berikan suatu komentar/penjelasan secukupnya !

3. Misalkan A = { 1, 2, 3, 4, 5 }, B = { 1, 2, 3 } dan $f : A \longrightarrow B$ (lihat gambar)



   a. Tuliskan f dalam bentuk pasangan terurut.
   b. Apakah A mempunyai titik limit ?
   c. Dengan menggunakan definisi 1, apakah f kontinu di 3 ?
   d. Apakah yang dapat disimpulkan ?

4. Misalkan fungsi f didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \text{ bilangan rasional} \\ 0 & \text{jika } x \text{ bilangan irrasional} \end{cases}$$

   Gunakan jawaban 1b. untuk menunjukkan bahwa f diskontinu di setiap titik di R

Bahan Diskusi/Tugas Kelompok
Topik: Kombinasi Fungsi-fungsi Kontinu

Teorema:

Misalkan $A \subseteq R$, f dan g fungsi-fungsi pada A ke R , $c \in A$ dan $\alpha \in R$.
Jika f , g masing-masing kontinu di c, maka:
(i) $f + g$, $f - g$, fg , dan αf masing-masing kontinu di c
(ii) f/g kontinu di c asalakan $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$
(iii) $|f|$ kontinu di c ($|f|(x) = |f(x)|$)

Bahan/Tugas Diskusi Kelompok:

(1) Buktikan bagian (iii) dari teorema di atas.

(2) Betul atau salah pernyataan-pernyataan di bawah ini, berikan penjelasan secukupnya atau berikan contoh penyangkalnya jika pernyataan itu salah:
(a) Jika f dan g masing-masing diskontinu di c, maka f + g diskontinu di c.
(b) Jika salah satu dari fungsi f , g diskontinu di c, maka f – g diskontinu di c.
(c) Jika $|f|$ kontinu di c, maka f kontinu di c.
(d) Jika f diskontinu di c maka $|f|$ diskontinu di c.

(3) Berikan suatu contoh: fungsi f dan g masing-masing diskontinu di c tetapi fg kontinu di c.

(4) Tunjukkan, jika $f : A \longrightarrow R$ kontinu pada $A \subseteq R$ dan $n \in N$, maka f^n kontinu pada A ($(f^n)(x) = (f(x))^n$ untuk $x \in A$).
Dapat diperlihatkan dengan Induksi Matematik

(5) Buktikan teorema berikut:
Misalkan $A, B \subseteq R$, $f : A \longrightarrow R$ dan $g : B \longrightarrow R$ suatu fungsi sehingga $f(A) \subseteq B$. Jika f kontinu di $c \in A$ dan g kontinu di $b = f(c) \in B$, maka $gof : A \longrightarrow R$ kontinu di c.

Jurusan Pendidikan Matematika
FPMIPA – Universitas Pendidikan Indonesia

Bahan Diskusi/Tugas Kelompok
Topik: Kekontinuan Fungsi Pada Suatu Interval

A. Definisi:

Suatu fungsi $f : A \longrightarrow R$ *disebut terbatas pada A jika dan hanya jika terdapat bilangan* $M > 0$ *sehingga* $|f(x)| \le M$, $\forall x \in A$.

B. Definisi:

(1) *Misalkan* $A \subseteq R$, $f : A \longrightarrow R$. *f disebut mempunyai* ***maksimum mutlak*** *pada A jika dan hanya jika terdapat* $x_o \in A$ *sehingga* $f(x_o) \ge f(x)$, $\forall x \in A$.

(2) *Misalkan* $A \subseteq R$, $f : A \longrightarrow R$. *f disebut mempunyai* ***minimum mutlak*** *pada A jika dan hanya jika terdapat* $x_o \in A$ *sehingga* $f(x_o) \le f(x)$, $\forall x \in A$.

C. Teorema:

Jika $I = [\, a, b \,]$ *suatu interval tertutup terbatas dan* $f : I \longrightarrow R$ *kontinu pada I , maka f terbatas pada I.*

D. Teorema (Maksimum – Minimum):

Jika $I = [\, a, b \,]$ *suatu interval tertutup terbatas dan* $f : I \longrightarrow R$ *kontinu pada I , maka f mempunyai suatu maksimum mutlak dan minimum mutlak pada I.*

Bahan/Tugas Diskusi Kelompok:

(1) Buatlah suatu pernyataan yang menerangkan fungsi $f : A \longrightarrow R$ tak terbatas pada A.

(2) Apakah definisi A di atas ekuivalen dengan pernyataan berikut:
" *Suatu fungsi* $f : A \longrightarrow R$ *disebut terbatas pada A jika dan hanya jika terdapat bilangan-bilangan a dan b ,* $a < b$ *sehingga* $a \le f(x) \le b$, $\forall x \in A$"

(3) Berdasarkan definisi B , buatlah syarat perlu dan cukup bahwa fungsi $f : A \longrightarrow R$, $A \subseteq R$ tidak mempunyai maksimum / minimum mutlak pada A.

(4) Benar atau salah pernyataan berikut, berilah penjelasan secukupnya atau berikan contoh penyangkalnya jika pernyataan itu salah:
"Jika fungsi f diskontinu pada $I = [\, a, b \,]$ *maka f tak terbatas pada I".*

(5) Berikan contoh suatu fungsi f yang diskontinu pada $I = [\, a, b \,]$ tetapi :
(i) mempunyai maksimum dan minimum mutlak pada I
(ii) tak mempunyai maksimum dan minimum mutlak pada I
(iii) mempunyai salah satu maksimum mutlak atau minimum mutlak pada I.

(6) Buktikan teorema C dan teorema D.