Bahan Diskusi/Tugas Kelompok
Topik: Turunan Fungsi

Definisi 1:

Misalkan $I \subseteq R$ suatu interval, $c \in I$ dan $f : I \longrightarrow R$.
Fungsi f disebut ***diferensiabel*** *di c (mempunyai turunan di c) jika dan hanya jika*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{ ada (hingga)}$$

Limit di atas (jika ada) di sebut turunan f di c dan ditulis dengan $f'(c)$

Catatan:

1. f' disebut fungsi turunan dari f dan nilainya untuk setiap $x \in A \subseteq I$ ditulis $f'(x)$
2. f disebut diferensiabel pada $A \subseteq I$ jika dan hanya jika f diferensiabel di setiap titik $x \in A \subseteq I$
3. f' yang mempunyai turunan di c (diferensiabel di c) ditulis $f''(c)$ dan disebut turunan kedua dari f di c. Dengan cara yang serupa dapat didefinisikan turunan ketiga, dan seterusnya dari f di $c \in I$

Bahan/Tugas Diskusi Kelompok

1. Tunjukkan, bahwa definisi 1 di atas ekuivalen dengan :

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \text{(jika limit ini ada)}$$

2. Dengan menggunakan definisi 1 atau definisi pada soal 1 di atas, tentukan turunan fungsi-fungsi di bawah ini di $c \in R$.
   (i) $f(x) = \sin x$, $x \in R$.
   (ii) $g(x) = x^n$, $x \in R$.

3. Misalkan I suatu interval, dan $f : I \longrightarrow R$ diferensiabel di $c \in I$.
   Tunjukkan bahwa :

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h}$$

   (*Petunjuk*: $f(c + h) - f(c - h) = f(c + h) + f(c) - f(c) - f(c - h)$)

4. Misalkan $I \subseteq R$ suatu interval, $c \in I$ dan $f : I \longrightarrow R$

   Jika $\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h}$ ada, maka tunjukkan dengan sebuah contoh penyangkal bahwa $f'(c)$ tidak selalu ada

5. Diberikan suatu teorema (hubungan antara diferensiabel dan kekontinuan)
   “ Jika fungsi f diferensiabel di $c \in D_f$, maka f kontinu di c “
   (i) Tuliskan kontrapositif dari teorema di atas.
   (ii) Buktikan teorema di atas
   (iii) Tunjukkan dengan contoh bahwa konvers teorema di atas tidak selalu benar.

6. Buatlah suatu definisi yang menerangkan turunan kiri dan turunan kanan dari suatu fungsi f di c. Notasikan turunan ini berturut-turut dengan $f'_-(c)$ dan $f'_+(c)$. (selanjutnya f diferensiabel di c jika dan hanya jika $f'_-(c) = f'_+(c)$).

7. Dengan mencari terlebih dahulu turunan kiri dan turunan kanannya (definisi pada soal 6.), tentukan apakah fungsi-fungsi di bawah ini diferensiabel di titik c yang ditentukan :
   (i) $f(x) = |x|$, $c = 0$
   (ii) $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & , \text{jika } x \neq 0 \\ 0 & , \text{jika } x = 0 \end{cases}$
   (iii) $h(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{jika } x \text{ rasional} \\ 0 & , \text{jika } x \text{ irrasional} \end{cases}$

Bahan Diskusi/Tugas Kelompok
Topik: Beberapa Teorema Turunan Fungsi

Teorema 1:

Misalkan $I \subseteq R$ suatu interval, $c \in I$ dan $\alpha \in R$..
Jika $f : I \to R$ dan $g : I \to R$ fungsi-fungsi yang diferensiabel di c maka:
(i) αf *diferensiabel di c dan* $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c)$
(ii) $f + g$ *diferensiabel di c dan* $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$
(iii) fg *diferensiabel di c dan* $(fg)'(c) = f'(c)\,g(c) + f(c)\,g'(c)$
(iv) f/g *diferensiabel di c (asalkan* $g(c) \neq 0$ *) dan*

$$(f/g)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$$

Teorema 2 (Aturan Rantai):

Misalkan I, J adalah interval di R, $g : I \to R$ dan $f : J \to R$ masing-masing adalah fungsi sehingga $f(J) \subseteq I$, dan $c \in J$. Jika f diferensial di c dan g diferensial di f(c), maka fungsi komposisi g o f diferensiabel di c dan

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))\, f'(c)$$

Bahan/Tugas Diskusi Kelompok:

(1) Susun suatu pembuktian dari teorema 1 bagian (i) dan bagian (iv) !

(2) (a) Jika f dan g masing-masing tidak diferensiabel di $c \in D_f \cap D_g$, apakah f + g juga tidak diferensiabel di c ?

(b) Jika $(fg)'(c)$ ada untuk $c \in D_f \cap D_g$ (fg diferensiabel di c), apakah $f'(c)$ dan $g'(c)$ masing-masing ada ?

(3) Susun suatu pembuktian dari teorema 2

(4) Misalkan $g(x) = x$ untuk setiap x di R, misalkan pula $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ jika $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$.

(a) Carilah $(g \circ f)'(0)$.

(b) Apakah yang dapat dikomentari tentang:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(0)}{f(x) - f(0)}$$

(5) Misalkan terdapat suatu fungsi $L : (0, \infty) \to R$ sehingga $L'(x) = 1/x$ untuk $x > 0$

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut :

(a) $f(x) = L(2x + 3)$ untuk $x > 0$

(b) $g(x) = L(L(x))$ dengan $L(x) > 0$, $x > 0$

Bahan Diskusi/Tugas Kelompok
Topik: Teorema Nilai Rata-rata (TNR)

Definisi 1:

Fungsi $F : I \to R$ disebut mempunyai ***maksimum relatif (minimum relatif*** *) di $c \in I$ jika dan hanya jika terdapat lingkungan -δ dari c ($V_\delta(c)$) sehingga $f(c) \geq f(x)$ ($f(c) \leq f(x)$), $\forall x \in I \cap V_\delta(c)$.*

Fungsi f disebut mempunyai ***ekstrim relatif*** *di $c \in I$ jika dan hanya jika f mempunyai salah satu maksimum relatif atau minimum relatif di c.*

Teorema 1(Teorema ekstrim interior):

Misalkan c suatu titik interior dari interval I di mana $f : I \to R$ mempunyai ekstrim relatif. Jika turunan f di c ada , maka $f'(c) = 0$.

Teorema 2 (Akibat teorema 1):

Jika $f : I \to R$ kontinu pada interval I dan mempunyai ekstrim relatif di suatu titik interior c dari I, maka salah satu dipenuhi, $f'(c)$ tidak ada atau $f'(c) = 0$.

Teorema 3 (Teorema Rolle):

Jika f kontinu pada interval I = [a, b], dan diferensiabel pada interval (a, b) serta memenuhi f(a) = f(b) = 0, maka terdapat titik $c \in (a, b)$ sehingga $f'(c) = 0$.

Teorema 4 (Teorema Nilai Rata-rata):

Jika f kontinu pada interval I = [a, b], dan diferensiabel pada interval (a, b), maka terdapat titik $c \in (a, b)$ sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bahan/Tugas Diskusi Kelompok:

(1) Apakah yang dimaksud dengan titik interior dalam teorema 1 ?

(2) Tuliskan kebalikan (konvers) dari teorema 2 ?

(3) Berikan contoh sebuah fungsi yang kontinu dan mempunyai ekstrim relatif di suatu titik serta turunannya di titik tersebut tidak ada !

(4) Berikan contoh sebuah fungsi yang kontinu dan turunannya di suatu titik sama dengan nol, tetapi di titik tersebut tidak mempunyai ekstrim relatif.

(5) Berikan contoh sebuah fungsi yang kontinu dan tidak mempunyai turunan di suatu titik, serta di titik tersebut tidak mempunyai ekstrim relatif

(6) Untuk membuktikan teorema 1, harus dilihat dua kasus. Karena f mempunyai ekstrim relatif, maka kasus pertama adalah untuk f yang mempunyai maksimum relatif dan kasus kedua untuk f yang mempunyai minimum relatif. Masing-masing kasus dibuktikan dengan cara tidak langsung. Jadi dimulai dengan memisalkan $f'(c) \neq 0$, dan ini ada dua alternatif yaitu $f'(c) > 0$ dan $f'(c) < 0$. Susunlah pembuktian selengkapnya. Pakailah teorema (4.2.9) yaitu: " *Misalkan* $A \subseteq R$, $f : A \to R$, *dan* $c \in R$ *adalah titik limit dari A. Jika* $\lim f(x) > 0$ ($\lim f(x) < 0$), *maka terdapat lingkungan* $V_\delta(c)$ *sehingga* $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) *untuk* $x \in A \cap V_\delta(c), x \neq c$. "

(7) Jika persyaratan (syarat cukup) dari teorema 3 (teorema Rolle) tidak dipenuhi, apakah kesimpulannya tidak dipenuhi pula ? Berikan penjelasan secukupnya !

(8) Berikan interpretasi geometris dari teorema 4 (TNR) !

(9) Berikan sebuah contoh fungsi f yang:
- (i) kontinu pada [a, b], tidak diferensiabel pada (a, b) tetapi kesimpulan TNR masih berlaku
- (ii) tidak kontinu pada [a, b], tidak diferensiabel pada (a, b) tetapi kesimpulan TNR masih berlaku
- (iii) tidak kontinu pada [a, b], diferensiabel pada (a, b) tetapi kesimpulan TNR masih berlaku

(10) Untuk membuktikan TNR, buatlah langkah-langkah sebagai berikut:
- (i) Carilah persamaan tali busur (garis lurus) yang menghubungkan titik (a, f(a)) dan titik (b, f(b)). Namakan persamaan garis ini dengan $y = g(x)$
- (ii) Buatlah suatu fungsi h dengan persamaan $h(x) = f(x) - g(x)$
- (iii) Gunakan TNR pada fungsi h yang terdefinisi pada [a, b]