BAB I
TEORI PELUANG

1.1 Ruang Sampel dan Peristiwa

Dari masa ke masa terjadi perkembangan dalam teori peluang, baik dalam hal konsep maupun pendekatannya. Barangkali pembaca mengenal apa yang dinamakan dengan *definisi klasik* dan *definisi relatif* tentang peluang terjadinya peristiwa. Pada saat ini terdapat perkembangan yang mendasar tentang konsep peluang, konsepnya lebih kuat, lebih matematis dan lebih mudah dikembangkan. Salah satu cirinya adalah menggunakan pendekatan himpunan dan pendekatan fungsi. Oleh karenanya bagi para pembaca yang ingin dengan mudah mempelajari konsep peluang sebaiknya harus lebih dulu memahami beberapa konsep tentang himpunan dan fungsi.

Sebelum kita membicarakan konsep peluang terjadinya peristiwa, sebaiknya harus paham dulu apa itu "*Peristiwa*", yang dimaksud adalah pengertian *teoritis matematis*. Langkah yang harus ditempuh untuk mempelajari konsep peluang, dimulai dengan eksperimen acak, ruang sampel, lapangan sigma (Medan Peristiwa), dan kemudian baru fungsi peluang atau peluang terjadinya peristiwa.

Eksperimen atau percobaan acak memiliki 3 ciri, yaitu:

(i) Hasilnya tak dapat diduga sebelumnya dengan derajat keyakinan yang pasti.

(ii) Semua hasil dapat diidentifikasi dan terkandung dalam sebuah himpunan.

(iii) Dapat diasumsikan bisa dilakukan berulang-ulang dalam kondisi yang sama.

Himpunan semua hasil dari suatu eksperimen acak dinamakan *ruang sampel*, dan setiap anggotanya dinamakan *titik sampel*. Ruang sampel yang diambil adalah ruang sampel yang setiap titiknya (diasumsikan) merupakan hasil individual, artinya tidak dapat dipecah-pecah lagi dipandang dari berbagai segi. Notasi untuk ruang sampel, biasanya dengan huruf S, A, C, atau huruf lainnya. Dalam buku ini akan digunakan huruf S untuk menyatakan ruang sampel. Jika S terhitung maka S dinamakan *ruang sampel diskrit*, dan jika S tak terhitung (dan banyak unsurnya tak terhingga) maka S dinamakan *ruang sampel kontinu*. Jika setiap titik sampel dari S memiliki kesempatan yang sama untuk muncul, maka S dinamakan *ruang sampel uniform*.

Contoh 1.1

Dua dadu bersisi 6 dilempar undi atau di tos sekaligus dari ketinggian dua meter. Dapat diperlihatkan, bahwa pengetosan dua dadu ini merupakan sebuah eksperimen acak, yaitu memenuhi semua ciri dari eksperimen acak. Hasilnya berupa pasangan sisi dadu pertama dan sisi dadu kedua, dan bisa dinyatakan dengan pasangan angka. Misalnya muncul pasangan (2, 4) ini berarti sisi dadu pertama muncul sisi bernomor 2 dan sisi dadu kedua muncul sisi bernomor 4. Semua hasil yang mungkin atau semua pasangan angka yang mungkin muncul dapat dihimpun dalam sebuah himpunan, dan himpunan ini adalah ruang sampel dari *Eksperimen Acak* tersebut. Ruang sampel tersebut dapat ditulis sebagai S = {(1, 1), (1, 2),…..(1, 6), (2, 1),…..(2, 6),….. (6, 6)} atau S = {(x, y): x, y = 1,2,3,4,5,6} = {1,2,3,4,5,6} x {1,2,3,4,5,6}

Kardinal atau banyak anggota dari S adalah $N(S)$ =36 . S adalah himpunan terhingga, jelas S terhitung, jadi S adalah ruang sampel diskrit. Jika diasumsikan setiap titik sampel dari S memiliki kesempatan yang sama untuk muncul, S adalah ruang sampel uniform.

Catatan:

Dadu yang menghasilkan ruang sampel S uniform dinamakan "dadu jujur" atau "dadu homogin". Perlu diperhatikan, bahwa tidak setiap dadu bersisi 6, ada pula dadu yang bersisi tidak 6, misalnya dadu bersisi 4 atau bidang 4 beraturan. Dalam buku ini, jika ditulis dadu, berarti (maksudnya) adalah dadu bersisi 6.

Contoh 1.2

Seorang pengamat menanyakan (mencatat) umur pengunjung yang masuk pintu sebuah supermarket. Pengamatan ini termasuk eksperimen acak (mengapa?), dan ruang sampelnya adalah himpunan semua bilangan real positif (anggapan), sehingga:

S = $\{x \in R / x > 0\} = R^+ = (0, \sim)$, jelas, bahwa S termasuk ruang sampel kontinu.

Sekarang, perhatikan sebuah himpunan $X \neq \emptyset$ dan Ω (dibaca omega) yaitu koleksi dari beberapa subset X (tidak perlu semua subset X) yang akan diberikan dalam definisi berikut:

Definisi

(1) Ω yaitu koleksi dari beberapa subset $X \neq \emptyset$ dinamakan lapangan sigma pada X, jika Ω tertutup terhadap komplemen dan irisan terbilang.

(2) Jika S ruang sampel dari suatu eksperimen acak, dan Ω adalah lapangan sigma pada S, maka Ω dinamakan medan peristiwa atau lapangan peristiwa pada S, setiap anggota dari medan peristiwa Ω dinamakan peristiwa pada S.

Pernyataan-pernyataan berikut dapat dibuktikan:

(1) Setiap lapangan sigma memuat himpunan kosong dan himpunan semestanya, serta tertutup terhadap gabungan terbilang.

(2) $P(X) = 2^x = \{A / A \subset X\}$= himpunan kuasa dari X, dan $\{\emptyset, X)$ adalah dua lapangan sigma, yang berturut-turut dinamakan lapangan diskrit dan lapangan indiskrit.

(3) Jika Ω_1 dan Ω_2 dua lapangan sigma pada X maka $\Omega_1 \cap \Omega_2$ adalah lapangan sigma pada X. Tetapi $\Omega_1 \cup \Omega_2$ belum tentu sebuah lapangan sigma.

Catatan:

Berdasarkan definisi medan peristiwa, jelas secara teoritis matematis, bahwa peristiwa ialah subset dari ruang sampel S, tetapi tidak setiap subset dari S berupa peristiwa (belum tentu sebuah peristiwa), kecuali medan peristiwa yang diambil adalah himpunan kuasa dari S, jika Ω medan peristiwa pada ruang sampel S maka pasangan (S, Ω) dinamakan ruang peristiwa.

Contoh 1.3

Misalkan $X = \{a,b,c,d,e\}$

Jika $\Omega_1 = \{\varnothing, X, \{a, b, c\}, \{d, e\}\}$ dan

$\Omega_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{a, c\}, \{b, d, e\}, X\}$

Maka dapat anda tunjukan bahwa Ω_1 merupakan sebuah lapangan sigma pada X, tetapi Ω_2 bukan sebuah lapangan sigma pada X. (kenapa?).

Contoh 1.4

Misalkan $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ adalah ruang sampel dari pengetosan sebuah dadu. Dapat anda tunjukan bahwa $\Omega_1 = \{\varnothing, \{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\} \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, S\}$, $\Omega_2 = \{\varnothing, \{1 , 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, S\}$

$\Omega_3 = 2^S$ adalah medan peristiwa-medan peristiwa pada S sedangkan

$\Omega_4 = \{\varnothing, \{1, 3, 5\}, \{1\}, \{2, 4, 6\}, \{4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, S\}$ bukan medan peristiwa pada S (kenapa?). Jika kita ambil $(S, \Omega_1\}$sebagai ruang peristiwa maka $\{1, 2, 3\}\subset S$ adalah sebuah peristiwa pada S tetapi $\{1, 3, 5\} \subset S$ bukan sebuah peristiwa relatif terhadap medan Ω_1(kenapa?).

Relasi dan Operasi pada Peristiwa

Misalkan (S, Ω) sebuah ruang peristiwa, dan A, B $\in \Omega$ atau A, B dua peristiwa pada S. Maka A^C, $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B = A \cap B^C$, S dan $\varnothing$ semuanya adalah anggota dari Ω, dengan pengertian:

(1) A^C peristiwa bukan A

(2) $A \cap B$ peristiwa A dan B

(3) $A \cup B$ peristiwa A atau B atau keduanya

(4) $A - B = A \cap B^C$: peristiwa A tapi bukan B (hanya peristiwa A)

(5) S : peristiwa yang pasti terjadi

(6) $\varnothing$: peristiwa yang pasti tidak terjadi (mustahil terjadi)

(7) $A \subset B$: peristiwa A terjadi maka peristiwa B terjadi pula.

Definisi

A dan B dikatakan dua peristiwa saling ekslusif jika $A \cap B = \varnothing$, atau dengan kata lain, peristiwa yang satu mencegah terjadinya peristiwa yang lain.

Contoh 1.5

Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ruang sampel pengetosan sebuah dadu, dan diambil $(S, 2^S)$ sebagai ruang peristiwa. Jika A peristiwa muncul bilangan ganjil, B peristiwa muncul bilangan genap, C peristiwa muncul bilangan prima, tentukan dan berikan pengertian untuk masing-masing peristiwa berikut:

a. C^C b. $A \cap C$ c. $B \cup C$ d. $C - A$ e. $A \cap B$

Penyelesaian:

Secara teoritis/matematis untuk peristiwa A, B dan C adalah $A = \{1,3,5\} \subset S$.

$B = \{2,4,6\} \subset S$, dan $C = \{2,3,5\}$

a. $C^C = \{1, 4, 6\}$, berarti peristiwa muncul bukan bilangan prima
b. $A \cap C = \{3,5\}$, berarti peristiwa muncul bilangan ganjil dan bilangan prima
c. $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, berarti peristiwa muncul bilangan genap atau bilangan prima atau keduanya.
d. $C - A = C \cap A^C = \{2\}$, berarti peristiwa muncul bilangan prima tetapi tidak ganjil.
e. $A \cap B = \varnothing$, berarti peristiwa mustahil terjadi, dan dalam hal ini peristiwa muncul bilangan ganjil dan peristiwa muncul bilangan genap adalah dua peristiwa yang *saling ekslusif*.

1.2 Peluang Peristiwa dan Kombinatorial

Dari pasal 1.1 kita telah mengetahui pengertian peristiwa secara matematis, yaitu subset dari ruang sampel S atau tepatnya anggota dari medan peristiwa Ω. Dengan kata lain kita telah memiliki ruang peristiwa (S, Ω). Selanjutnya kita ingin mengetahui derajat kejadian dari peristiwa-peristiwa yang ada. Untuk ini harus dibuat suatu alat ukur atau suatu fungsi (ukuran) yang menyatakan derajat (nilai) kemungkinan terjadinya suatu peristiwa. Berdasarkan sejarah perkembangan teori peluang, dikenal beberapa konsep nilai kemungkinan, diantaranya konsep peluang klasik dan konsep peluang empiris (relatif), kedua konsep ini telah lama kita anut yang mana satu sama lainnya saling melengkapi, tetapi juga keduanya memiliki kelemahan antara lain sulit dikembangkan.

Terdapat konsep atau definisi peluang yang lebih matematis, dan lebih kuat dengan dibangun di atas konsep lapangan sigma (medan peristiwa). Tahun 1933, Kolmogorov merumuskan definisi peluang sebagai berikut:

Definisi

Misalkan (S,Ω) adalah ruang peristiwa.

Fungsi himpunan $P : \Omega \longrightarrow R$ dinamakan fungsi peluang pada S. Jika:

(i) $\forall A \in \Omega$, P (A) > 0

(ii) P (S) = 1

(iii) $\forall A_1, A_2, \ldots \in \Omega$, dengan $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, maka $P\left(\bigcup A_1\right) = \sum P(A_1)$

Catatan:

- Aksioma (iii) pada definisi peluang, mengandung arti $P\left(\bigcup\limits^{n} A_1\right) = \sum\limits^{n} P(A_1), \forall A_1, A_2 \ldots, A_n \in \Omega$ dengan $A_i \cap A_j = \varnothing$
- Jika P fungsi peluang, maka P(A) menyatakan peluang atau nilai kemungkinan terjadinya peristiwa A.
- Tiga serangkai (S, Ω, P) dinamakan ruang peluang.
- Definisi Kolmogorov tentang peluang ini, tidak memberikan petunjuk bagaimana menentukan peluang terjadinya suatu peristiwa. Tetapi hanya memberikan aturan atau batasan yang harus dipenuhi oleh peluang. Pada kenyataannya, kita sepakat bahwa cara untuk mengukur atau menghitung nilai

kemungkinan terjadinya peristiwa antara lain dengan cara: Asumsi, percobaan, pengalaman dan teorema.

Contoh 1.6

Misalkan S = {M, B} adalah ruang sampel dari pengetosan/lempar undi atau melantunkan sebuah mata uang yang tidak seimbang. Kita ambil (S, Ω) sebagai ruang peristiwa dengan $\Omega = 2^S = \{\varnothing, \{M\}, \{B\}, S\}$. Jika didefinisikan fungsi

himpunan $P: \Omega \longrightarrow R$,

Dengan $P: \varnothing \longrightarrow 0$

$\{M\} \longrightarrow 0,8$

$\{B\} \longrightarrow 0,2$

$S \longrightarrow 1$

Maka dapat anda tunjukan, bahwa P merupakan sebuah fungsi peluang. Dalam hal ini P {M} = 0, 8, P {B} = 0, 2 yang memberikan pengertian, bahwa peluang muncul sisi muka adalah 0,8; dan peluang muncul sisi belakang adalah 0,2, kalau kita perhatikan yang lazim di masyarakat adalah P {M} = P {B} = 0,5 ini juga benar dengan menggunakan asumsi, bahwa kedua sisi dari mata uang tersebut seimbang (homogin).

Contoh 1.7

Misalkan S = [0, 1] = {x / 0 ≤ x ≤ 1} adalah ruang sampel dari suatu eksperimen acak, dan diambil medan peristiwa Ω {∅, $\left[0,\frac{3}{4}\right],\left[\frac{3}{4},1\right]$. Pandang relasi

$P: \Omega \longrightarrow R$ dengan $P\left(\left[0,\frac{3}{4}\right]\right)=\frac{27}{64}$ dan $P\left(\left[\frac{3}{4},1\right]\right)=\frac{37}{64}$. Berdasarkan relasi ini kita dapat mendefinisikan sebuah fungsi peluang, silahkan anda lengkapi aturan fungsi P tersebut.

Selanjutnya, berdasarkan definisi fungsi peluang kita dapat memunculkan beberapa teorema, yang mana dengan menggunakan teorema ini kita akan dapat menghitung atau menentukan peluang suatu peristiwa.

Teorema: (Teorema Dasar Peluang)

Misalkan (S, Ω, P) sebuah ruang peluang, maka

(1) $\forall A \in \Omega$, $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $\forall A \in \Omega$, $P(A^C) = A - P(A)$ (rumus komplemen)

(3) $P(\emptyset) = 0$

(4) $\forall A, B \in \Omega$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (rumus penjumlahan umum)

(5) Jika A dan B saling ekslusif, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (rumus penjumlahan khusus)

(6) Jika $A \subset B$, maka $P(A) \leq P(B)$ (fungsi peluang P tak turun).

Berikut adalah teknik menghitung peluang suatu peristiwa dalam ruang sampel diskrit yang disajikan ke dalam sebuah teorema.

Teorema.

Misalkan (S, Ω, P) sebuah ruang peluang

(1) Jika S diskrit dan hingga, maka peluang A sama dengan jumlah semua peluang dari masing-masing titik atau unsur yang terletak dalam A

(2) Jika S diskrit, hingga dan uniform, maka peluang A sama dengan hasil bagi antara kardinal A dengan kardinal S

Penjelasan

Karena S diskrit dan hingga dan $A \subset S$, maka A juga diskrit hingga, sehingga A dapat ditulis sebagai $A = \{a_1, a_2. \ldots.. a_k\}=$ dan (kenapa demikian?)

Untuk teorema bagian (2) adalah hal khusus dari teorema bagian pertama. Jika K adalah cardinal A dan n adalah cardinal S maka $P(A) = \frac{k}{n}$. Aturan atau rumus ini biasanya diberikan dimatematika sekolah sebagai definisi klasik dari peluang.

Contoh 1.8

Misalkan S adalah ruang sampel pengetosan sebuah dadu tak jujur, dan kita ambil (S,Ω = 2^S) sebagai ruang peristiwa. Selanjutnya lihat contoh 1.5! Kita definisikan fungsi

$$P : \Omega \longrightarrow R, \text{ dengan}$$

$$\begin{array}{lcl} P : \{1\} & \longrightarrow & 0{,}2 \\ \quad\;\; \{2\} & \nearrow & \\ \quad\;\; \{3\} & \longrightarrow & 0{,}3 \\ \quad\;\; \{4\} & \longrightarrow & 0{,}05 \\ \quad\;\; \{5\} & \longrightarrow & 0{,}1 \\ \quad\;\; \{6\} & \longrightarrow & 0{,}15 \end{array}$$

Dengan memperhatikan sebagian pemasangan oleh fungsi P, maka kita dapat melengkapi pemasangan tersebut (semuanya ada 64 pasang), sedemikian sehingga P mendefinisikan sebuah fungsi peluang. Jadi kita memiliki ruang peluang (S, Ω, P) dengan S diskrit hingga tidak uniform. Selanjutnya kita akan menghitung peluang D^C, $A \cap D$, $B \cup D$, $D - A$, dan $A \cap B$ dengan A = {1, 3, 5}, B = {2, 4, 6}, dan D = {2, 3, 5) sebagai berikut:

$P\ (D^C) = 1 - P\ (D) = 1 - P\ (\{2\}) - P\ (\{3\}) - P\ (\{5\}) = 1 - 0{,}2 - 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}4$

$P\ (A \cap D) = P\ (\{3{,}5\}) = P\ (\{3\}) + P\ (\{5\}) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$

$P\ (B \cup D) = P\ (B) + P\ (D) - P\ (B \cap D) = 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}8$ atau dapat dihitung dengan mengingat $B \cup D = \{2,3,4,5,6\}$.

$P\ (D - A) = P\ (D \cap A^C) = P\ (\{2\}) = 0{,}2$

$P\ (A \cap B) = P\ (O) = 0$

Catatan:

Dengan ruang peluang yang diberikan ini, maka peluang muncul sisi dadu ganjil adalah 0,6 dan peluang muncul sisi dadu genap adalah 0,4 tetapi, jika S diskrit hingga uniform maka peluang kedua peristiwa tersebut adalah sama, yaitu 0,5 = $\dfrac{N(A)}{N(S)} = \dfrac{N(B)}{N(S)}$. Dalam rangka menentukan peluang suatu peristiwa atau sukses (peristiwa yang diperhatikan atau diharapkan), maka diperlukan kombinatorial atau matematika membilang. Dengan aturan kombinatorial kita bisa menghitung banyak anggota atau cardinal dari ruang sampel S (khusus ruang sampel uniform) dan cardinal dari peristiwa sukses tanpa mengidentifikasi S dan A dalam bentuk himpunan prinsip atau aturan menghitung yang akan dibicarakan adalah prinsip dasar perkalian, permutasi dan kombinasi.

Prinsip dasar perkalian

Misal $A_1 \neq \varnothing$, = 1, 2, ….., k dengan N(A_1) = n_1

Jika dari setiap himpunan diambil sebuah unsur, maka banyak cara memperoleh k unsur tersebut adalah = n_1, $n_{2,}$ ….. n_k (Catatan: Prinsip dasar perkalian ini bisa diperoleh menggunakan pendekatan operasi dengan k tahap.

Contoh 1.9

Misalkan dari Bandung ke Cirebon ada 3 rute perjalanan, dari Cirebon ke Surabaya ada 4 rute perjalanan, dari Surabaya ke Denpasar ada 6 rute perjalanan. Hitung berapa rute perjalanan dapat dilalui dari Bandung ke Denpasar, dengan syarat melalui Cirebon dan Surabaya.

Penyelesaian:

Tiap rute dari Bandung ke Cirebon dapat dilanjutkan ke Surabaya dengan 4 cara, dan tiap rute ini dapat dilanjutkan ke Denpasar dengan 6 cara, berarti terdapat 4 x 6 cara. Karena dari Bandung ke Cirebon terdapat 3 cara, maka semua rute jalan yang dapat dilalui adalah 3 x 4 x 6 cara. Dalam hal ini terdapat 3 himpunan, dengan N(A_1) = 3, N(A_2) = 4, dan N(A_3) = 6

Permutasi

Permutasi adalah susunan dari beberapa unsur dengan memperhatikan urutan Misalkan terdapat susunan dari 3 unsur, yaitu a b c, a c b, b c a, b a c. Karena urutan diperhatikan maka 4 susunan ini berbeda. Kita akan menghitung banyak permutasi k unsur berbeda dari himpunan dengan unsur ($n \leq k \leq n$). Misal N ≠ ∅ dengan N(A) = n. Urutan pertama dapat diisi oleh unsur A dengan n cara, urutan kedua dengan (n-1), dan seterusnya sampai dengan urutan ke k dapat diisi dengan (n-(k-1) cara. Dengan menggunakan prinsip dasar perkalian, maka banyak cara mengurutkan (permutasi) k unsur tersebut adalah n (n-1) (n-2) … (n-(k-1). Jika P_k^n menyatakan banyak permutasi k unsur berbeda dari himpunan dengan n unsur, atau banyak permutasi k objek yang diambil dari n objek, maka: P_k^n = n (n-1) (n-2) … (n-(k-1)

dan bila menggunakan notasi faktorial maka $P_k^n = \dfrac{n1}{(n-k)1}, k = 1,2, \dots n$

Catatan:

1) Jika dalam permutasi diperbolehkan unsurnya ada yang sama, maka susunan tersebut dinamakan permutasi berulang, dan misal $\overline{P}_n^k$ menyatakan banyak permutasi k unsur berulang dari *n* unsur (objek), maka:

$$\overline{P}_k^n = n^k$$

2) Bila dari *n* objek, diantaranya terdapat n_1 objek jenis 1 sama, n_2 objek jenis 2 sama, ….., n_k objek jenis *k* sama, maka banyak permutasi *n* objek dari *n* objek tersebut, adalah:

$$P_{(n_1, n_2, \dots, n_k)}^n = n1$$

3) Bila susunan (permutasi) dibuat melingkar atau siklis maka banyak permutasi siklis dari *n* unsur adalah (*n-1*)1.

Contoh 1.10

Terdapat dua kotak. Kotak pertama berisi 3 kartu bilangan (1, 3 dan 5), sedangkan kotak dua berisi 4 kartu bilangan (0,2,4 dan 6) kita akan membuat bilangan dengan 5 angka, yaitu dua angka pertama adalah kartu bilangan dari kotak 1 dan tiga angka terakhir adalah kartu bilangan dari kotak 2.

a) Hitung banyak bilangan dengan 5 angka yang dapat dibuat (*contoh: bilangan 13024*)
b) Jika bentuk dan ukuran dari kartu-kartu bilangan identik dan diambil secara acak. Tentukan banyak anggota ruang sampel.
c) Hitung peluang mendapatkan bilangan bernilai lebih dari lima puluh ribu.

Penyelesaian:

a) Contoh bilangan yang dapat dibuat antara lain adalah 13024, 31024 dan 51426. Banyak cara menempatkan dua angka pertama untuk bilangan ini yang diambil dari kotak 1 adalah $P_2^3 = 6$, dan tiap dua angka dari kotak 1 ini dapat dipasangkan (dilanjutkan) dengan 3 angka terkahir yang diambil dari kotak 2 sebanyak $P_3^4 = 24$ cara. Jadi banyaknya bilangan dengan lima angka yang dapat dibuat adalah 6 x 24 = 144.

b) Ruang sampelnya adalah S = {13024, 13026, ….., 53642} dan $N(S)$ = banyaknya anggota ruang sampel $P_2^3 . P_3^4$ = 144. Dalam hal ini, karena bentuk dan ukuran kartu identik serta diambil secara acak, maka dianggap S adalah ruang sampel uniform. Dengan kata lain peluang atau kesempatan titik sampel muncul (diperoleh) adalah $\frac{1}{144}$

c) Misalkan A adalah peristiwa mendapatkan bilangan bernilai lebih dari lima puluh ribu (contoh: 51024, 53642, dan 53240).

   Maka $N(A) = 1 . P_1^2 . P_3^4 = 1 . 2 . 24 = 48$

   Jadi $P(A) = \frac{N(k)}{N(s)} = \frac{48}{144} = 0,\overline{33}$

KOMBINASI

Kombinasi adalah susunan dari beberapa unsur berbeda, dengan tidak memperhatikan urutan. Misal terdapat susunan dari 3 unsur, yaitu: *abc, acb, bca, bac*. Karena urutan tidak diperhatikan maka 4 susunan dari *a, b* dan *c* ini sama. Hal ini lebih cocok ditulis dalam bentuk himpunan, yaitu $\{a,b,c\}$. Kita akan menghitung banyak kombinasi k unsur yang diambil dari himpunan dengan n unsur, atau kombinasi k objek dari n objek yang berbeda.

Misalkan C_n^k menyatakan banyak kombinasi k unsur dari sebuah himpunan dengan n unsur. Karena setiap satu kombinasi k unsur dapat dibuat

bahwa $P_k^n = k!$

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}, k = 0,1,2,....., n$$

Catatan:

Notasi lain untuk menyatakan banyak kombinasi k unsur dari himpunan dengan n unsur adalah $\binom{n}{k}$

Contoh 1.11

Sebuah kotak berisi 40 bola tenis meja. Terdiri atas 15 bola putih, 20 bola kuning, dan 5 bola hijau. Diambil 5 bola secara acak.

a) Tentukan banyak anggota ruang sampel, jika pengambilan bola tenis meja secara <u>sekaligus</u>, satu-satu <u>tanpa pengembalian</u> dan satu-satu <u>dengan pengembalian</u>.

b) Dengan mengasumsikan ruang sampel uniform, dan medan peristiwa yang diambil terbesar ($\Omega = 2^S$). Hitung peluang terambil 2 bola putih, 2 bola kuning, dan 1 bola hijau dalam 5 pengambilan tersebut.

c) Hitung peluang terambil paling banyak 2 bola kuning.

Penyelesaian:

a) Himpunan bola tenis meja dapat diidentifikasi sebagai H = $\{p_1, p_2,\ldots, p_{15}, k_1, k_2\ldots, k_{20}, h_1, h_2,\ldots, h_5\}$ dengan $N(H) = 40$. Untuk pengambilan sekaligus, berarti tidak akan terambil bola yang sama dan urutan tidak diperhatikan, misalnya $\{p_2, p_7, k_3, h_1, h_2\} = \{h_2, p_2, k_3, h_1, p_7\}$, berarti susunan bola berupa kombinasi, maka $N(S) = \binom{40}{5}$

   Pengambilan 1 – 1 tanpa pengembalian diartikan bahwa, setiap pengembalian berikutnya maka unsur (objek) yang telah terambil pada pengembalian sebelumnya tidak dikembalikan dulu. Terdapat dua kasus, yaitu urutan diperhatikan, dan urutan tak diperhatikan. Untuk kasus pertama, $N(S) = P_5^{40}$ dan untuk kasus kedua $N(S) = \binom{40}{5}$.

   Pengambilan 1 – 1 dengan pengembalian, diartikan, bahwa setiap pengambilan berikutnya, maka unsur (objek) yang telah terambil pada pengambilan sebelumnya dikembalikan dulu. Berarti boleh ada yang sama, dan urutan diperhatikan misalnya $p_1p_2\ p_3p_4\ p_5$, $p_1p_2k_1k_2h_1 \neq p_2p_1k_1k_2h_1$, $k_1k_1k_1k_1k_1$ maka N(S) = 40^5.

<u>Catatan</u>:

Para ahli Statistika sepakat, bahwa pengambilan 1 – 1 tanpa pengembalian dengan pangambilan sekaligus (tanpa ada penjelasan tambahan) memberikan hasil yang sama, yaitu N(S) = $\binom{n}{k}$.

b) Anggap pengembalian yang dilakukan adalah sekaligus, berarti N(S) = 658008, dan karena diambil secara acak dan ukuran bolanya identik, maka ruang sampel S adalah uniform, berarti peluang setiap titik sampel sama, yaitu $\frac{1}{\binom{40}{5}}$.

Misalkan A = peristiwa terambil dua bola putih, dua bola kuning dan satu bola hijau.

Contoh anggota A adalah $p_1\ p_2\ k_1\ k_2\ h_1$, $p_1\ p_3\ k_1\ k_2\ h_1$,….. . Maka dapat diperlihatkan, bahwa N(A) = $\binom{15}{2} . \binom{20}{2} . \binom{5}{1}$ = 105 . 190 . 5 = 99750

Jadi P(A) = $\frac{N(A)}{N(S)}$ = 0,1516

c) Misal B = peristiwa terambil paling banyak 2 bola kuning

= $B_0 \cup B_1 \cup B_2$

Dengan B_0 = peristiwa terambil tepat nol bola kuning. (Contoh: $p_1p_2\ p_3h_1h_2$)

B_1 = peristiwa terambil tepat satu bola kuning. (Contoh: $k_1p_1p_2\ p_3h_1$)

B_2 = peristiwa terambil tepat dua bola kuning. (Contoh: $k_1k_2p_1p_2\ p_3$)

Yang mana B_0, B_1, B_2 tiga peristiwa saling ekslusif.

Dapat dijelaskan, bahwa N(B_0) = $\binom{15+5}{5}$ = 15504

N(B_1) = 20 $\binom{15+5}{4}$ = 96900

N(B_2) = $\binom{20}{2}\binom{15+5}{3}$ = 216600

Maka,

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{N(B_0)+N(B_1)+N(B_2)}{N(S)} = \frac{329004}{658008} = 0,5$$

1.3 Peluang Bersyarat

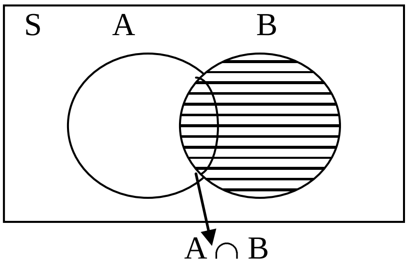
Misal (S. Ω. P) ruang peluang dan A. B. ∈ Ω. Penulisan A/B diartikan sebagai peristiwa A relatif terhadap peristiwa B, atau peristiwa A jika diketahui B. Bagaimana menghitung peluang A/B ? P_B (A/B) ?

Dalam hal ini B ⊂ S dianggap sebagai ruang sample yang baru berarti A dibandingkan dengan B. Jika S diskrit uniform maka banyak unsur A yang ada di B dibandingkan de3ngan banyak unsur B sehingga peluangnya adalah :

$$P_B\,(A/B) = \frac{N\,(A \cap B)}{N\,(B)}$$

$$\frac{\dfrac{N\,(A \cap B)}{N\,(S)}}{\dfrac{N\,(B)}{N\,(S)}}$$

$$= \frac{P\,(A \cap B)}{P\,(B)} \quad , P(B) \neq O \; (perhatikan gambar)$$



Gambar : 1.1

Penulisan P_B (A/B) di artikan sebagai peluang bersyarat dari A jika diketahui B Diilhami oleh kenyataan ini, kita mendefinisikan peluang peristiwa bersyarat P_B untuk ruang sample S sembarang. Dan dapat ditunjukkan bahwa P_B adalah benar-benar sebuah fungsi peluang ! Selanjutnya indeks B dalam P_B bisa dihilangkan, cukup dengan P saja!

Definisi :

Misalkan (S, Ω, *P*) ruang peluang, dan A, B, € Ω, dengan *P*(B) : 0, maka :

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Catatan :

Pungsi himpunan $P_B : \Omega \times \{B\} \rightarrow R$

$$(A, B) \rightarrow P(A, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$(C, B) \rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

memenuhi ketiga aksioma dari fungsi peluang (silahkan anda tunjukan)

Sifat (Rumus perkalian umum)

1. Jika A dan B dua peristiwa dalam ruang sampel S. Maka :

   $P(A \quad B) = P(A)\, P(B/A)$ dan $P(A \quad B) = P(B).\, P(A/B)$

2. Jika $A_1, A_{2, \ldots\ldots\ldots} A_n$ barisan n peristiwa dalam ruang *sampel* S, maka

$$: P(A_1, \cap\ A_2\ \cap \ldots \cap\ A_n = P\left(\bigcap_{1}^{n} A\right)$$

$$= P(A_1).P(A_2/A_1).\, P\left(A_3 \big/ A_1 \cap A_2\right) \ldots P\left(A_3 \big/ A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n - A\right)$$

$$= P(A_1).\ \prod_{i=2}^{n} P\left(A_i \Big/ \bigcap_{i=1}^{i=1} A_1\right)$$

Contoh 1. 12

Dua dadu jujur atau dua dadu homogen dilempar undi (ditos) sekaligus. Jika A adalah peristiwa muncul pasangan angka kembar, B adalah peeristiwa muncul angka 1 pada dadu 1, C adalah peristiwa muncul angka 6 pada II, dan D adalah peristiwa muncul pasangan angka berjumlah kurang dari 4, hitunglah peluang ;

a) A, B, C dan D

b) Peristiwa muncul pasangan angka kembar, dan angka 1 pada dadu 1

c) Peristiwa muncul pasangan angka kembar, jika di ketahui angka 1 pada dadu 1

d) Peristiwa muncul angka 6 pada dadu II, jika di ketahui angka I pada dadu 1 dan pasangan angka berjumlah kurang dari 4

e) Peristiwa muncul pasangan angka berjumlah 5, jika diketahui peristiwa A atau peristiwa B telah terjadi (relatif)

f) $A \cap B \cap C$ dengan dua cara

Penyelesaian :

Ruang sampel dari eksperimen tersebut adalah :

S = {(1, 1)A(1, 2)……., (1, 6), (2, 1), (2, 2) ………,(2, 6),(3, 1) ……., (6, 6)} dengan N(S) = 6^2 = 36 karena dadu jujur, maka kesempatan muncul tia*P*titik *sampel* tersebut adalah $\frac{1}{36}$ berarti (S.Ω =2^s. *P*) adalah ruang peluang dengan S diskrit aiform hingga

a) peistiwa-peristiwa A, B, C dan D dapat ditunjukan dengan bentuk himpunan (subset dan S) yaitu :

A ={(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}

B ={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)}

C ={(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)} dan D = {(1,1), (1,2), (2,1)}dengan N(A) = 6, N (B) = 6, N (C) = 6 dan N (D) = 3

Maka $P(\text{A}) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(\text{B}) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(\text{A}) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(\text{D}) = \frac{N(D)}{N(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

b) $P(\text{A}\cap\text{B}) = P(\{(1,1)\}) = P((1,1) = \frac{1}{36}$

c) $P(\text{A/B}) = \dfrac{P(A\cap B}{P(B)} = \dfrac{1/36}{1/6} = \dfrac{1}{6}$

d) $P(C/_{A\cap P})\ \dfrac{P(C\cap A\cap D)}{P(A\cap D)} = \dfrac{P(D)}{1/6} = 0$

e) $P(D^C/A\cup B) = 1 - \dfrac{P(D\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} = 1 - \dfrac{2/36}{11/36} = 1 - \dfrac{2}{11} = \dfrac{9}{11}$

f) Cara pertama (langsung), yaitu A∩B∩C = {(1,1)}. Maka

$P(\text{A} \cap \text{B} \cap \text{C}) = \dfrac{N(A\cap B\cap C)}{N(S)} = \dfrac{1}{36}$

Cara kedua dengan rumus $P(\text{A} \cap \text{B} \cap \text{C}) = P(\text{A}).\, P(B/_A)\, P(C/_{A\cap B})$

Dengan $P(\text{ A}) = \dfrac{6}{36}$, $P(\text{ B/A}) = \dfrac{1}{6}$ dan $P(C/_{A\cap B})$ = 1, maka

$\text{P(A} \cap \text{B} \cap \text{C)} = \dfrac{6}{36}, \dfrac{1}{6,}1 = \dfrac{1}{36}$

Perhatikan contoh soal no. 1. 12, soal (b)

$P\text{ (A)} = \dfrac{1}{6}$, $P\text{(B)} = \dfrac{1}{6}$, dan $P(\text{A} \cap \text{B}) = \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{6}. = \dfrac{1}{6} = P\text{ (A) } P\text{ (B)}$, juga

$P(A/_B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/36}{1/6} = \dfrac{1}{6} = P\text{(A)}, P\ (B/_A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = \dfrac{1/36}{1/6} = \dfrac{1}{6} = P(B)$

ini memberikan arti kepada kita bahwa terjadi tidaknya peristiwa yang satu atau relatif tidaknya peistiwa yang satu maka peluang peristiwa yang lain tidak berubah yaitu $P(A/_B) = P\text{(A)}$ juga $P\ (B/_A) = P(B)$ atau $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. Dua peristiwa yang seperti ini akan kita beri nama khusus yaitu peristiwa yang saling bebas (independent).

Defenisi;

Dua peristiwa A dan B dikatakan saling bebas (stokastik) atau independent jika peluang irisannya sama dengan hasil kali masing-masing peluangnya, dengan kata lain A, B bebas $\Leftrightarrow$ $P(A\cap B) = P(A).\ P(B)$ dan A, B tak bebas (independent/bergantungan) $\Leftrightarrow$ $P(A\cap B) \neq P(A).\ P(B)$

Sifat

A dan B bebas, maka $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$ coba anda buktikan !

Catatan

Dalam pengertian sehari-hari, dua peristiwa dikatakan saling bebas jika terjadi tidaknya peristiwa yang satu tidak mempengaruhi terjadinya peristiwa yang lain. Sedangkan dua peristiwa saling bergantungan (independent), jika terjadinya peristiwa yang satu mempengaruhi terjadinya peristiwa yang lain. Sebagai contoh, misalnya A adalah peristiwa gunung Fujiyama meletus pada suatu hari, dan B peristiwa Mahasiswa lulus tepat pada waktu akademik, maka kita sepakat, $P(A/B) = P(A)$ dan $P(B/A) = P(B)$ ini berarti terjadinya peristiwa yang satu tidak mempengaruhi terjadinya peristiwa yang lain (mahasiswa lulus pada waktunya).

Definisi

Tiga peristiwa A, B dan C saling bebas, jika $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$, $P(A \cap C) = P(A).\ P(C)$, $P(B\cap C) = P(B).\ P(C)$ dan $P(A\cap B\cap C) = P(A).\ P(B).\ P(C)$ Untuk n peristiwa saling bebas, dapat didefinisikan seperti untuk kebebasan 3

Peristiwa

Perhatikan contoh 1. 12 !

A dan B dua peristiwa saling bebas sebab $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$ tetapi tidak ekslusif sebab $A \cap B \neq \emptyset$. Juga A dan C saling bebas sebab $P(A \cap C) = P(A).\ P(C)$ tetapi tidak ekslusif sebab $A \cap C \neq \emptyset$. Begitu juga B dan C dua peristiwa saling bebas tetapi tidak ekslusif . karena $P(A \cap B \cap C) = P(\phi) = 0 \neq P(A).\ P(B).\ P(C)$ maka tiga peristiwa A, B dan C tidak bebas

Sifat

Jika A dan B bebas, maka ;

1) A^C dan B bebas
2) A dan B^C bebas
3) A^C dan B^C bebas

Bukti

1) Harus ditunjukan, bahwa $P(A^C \cap B) = P(A^C).P(B)$ sebagai berikut :

$$P(A^C \cap B) = P(B \cap A^C) = P(B).\ P\left(\frac{A^C}{B}\right) = P(B)\left\{1 - P\ \frac{A^C}{B}\right\}$$

$$= P(B)\ \{1-P(A)\} = P(B).P(A)\ P(B)$$

(Terbukti)

Untuk (2) dan (3) coba anda buktikan sendiri sebagai latihan !

Contoh 1.13

Misalkan diambil secara acak 100 pemuda dengan maksud untuk diperiksa oleh tim dokter, khusus kesehatan mata dan bentuk telapak kaki. Dari pemeriksaan diperoleh hasil 40 orang kakinya datar (kelainan telapak kaki) 50 orang hanya mata rabun jauh (kelainan mata) dan 20 orang menderita kedua-duanya serta 30 oran tidak menderita kedua-duanya (sehat). Secara statistik, apakah kelainan telapak kaki mempengaruhi rabun jauh dan sebaliknya ?

Penyelesaian

Misalkan A peristiwa pemuda memiliki kelainan telapak kaki (datar) dan B peristiwa memiliki kelainan mata (rabun). Jika persentase kelainan dianggap sebagai peluang peristiwa, kita tunjukkan bahwa N (A) = 40. N (B) = 50. N ($A \cap B$) = 20 dan N ($A \cup B$) = 30, maka P(A) = 0,4. P(B) = 0,5. $P(A \cap B)$ = 0,2. $P(A^C)$ = 0,6. P (B^C) = 0,5. Sehingga P(A $\cap$ B) = 0,2 = 0,4 = 0,5 = P(A). P(B). Ini memberi makna secara statistic bahwa kelainan telapak kaki datar tidak mempengaruhi kelainan mata. Begitu juga, bahwa telapak kaki baik tidak mempengaruhi mata baik.

Hal ini dapat dijelaskan dengan :$P(A^C \cap B^C) = 1 - P\lfloor(A \cup B)^C\rfloor = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 = P(A^C).\, P(B^C)$

Teorema Bayes – Laplace

Misalkan (S. Ω. P) ruang peluang dan $B_1, B_2, \ldots\ldots. B_n$, partisi dari ruang sample S, dengan $P(B_1)$ # 0,1 = 1, 2, 3, ...n, jika A peristiwa lain dalam S, maka

1)$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_1).P\left(A\big/B_1\right)$ (*aturan eliminasi*)

2) $\forall\, k = 1, 2, \ldots\ldots, n$, $P\left(B_k\big/A\right) = \dfrac{P(B_k).P\left(A\big/B_k\right)}{\sum_{1=1}^{n} P(B_i).P\left(A\big/B_1\right)}$ (Dalil B – 1)

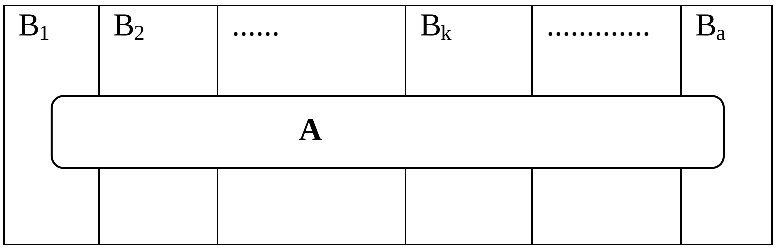
Catatan

$B_1, B_2 \ldots\ldots\ldots., B_n$ partisi dari S, jiuka $B_1 \cap B_2 = \phi$, 1 $\neq$ j dan $\bigcup_{i=1}^{n} B_1 = S$

Dalam penggunaannya $B_1, B_2 \ldots\ldots.., B_n$ dinamakan peristiwa-peristiwa taha*P*antara (dalam hal ini hanya satu taha*P*antara) atau disebut disebut juga peristiwa awal. Sedangkan A dinamakan peristiwa akhir, atau peristiwa akibat. Jika kita ingin menghitung peluang akhir, maka gunakan aturan eliminasi (1), dan jika peristiwa akhir telah terjadi atau telah diketahui dan kita diminta untuk menentukan peluang awal, maka gunakan aturan B – L (2)

Buktikan

Kondisi premis dari teorema B – L (aturan 1 dan aturan 2) dapat disajikan seperti gambar 1, 2, !



Gambar 1.2

Dapat ditunjukkan bahwa A = $(A \cap B) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cup B_n)$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} (A \cup B_i)$$

Dan $(A \cap B_1) \cap (A \cap B_1) = \phi$ $(i \neq j)$

Sehingga, $P(A) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_1)\right]$

$$= \sum_{i=1}^{n} p\,(A \cap B_1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p\,(B_1 \cap A)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p\,(B_1)\, P\left(A/B_1\right)$$

Dan $P\left(B/A\right) = \dfrac{P(B_K \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B_k).P\left(A/B_k\right)}{\sum_{1=1}^{n} P(B_i).P\left(A/B_1\right)}$ (terbukti)

Contoh 1. 14

Misalkan di sebuah kawasan industri terjadi musibah kebocoran mesin produksi, yang bisa berakibat infeksi pada tubuh manusia di sekitar kawasan tersebut, kena tidaknya infeksi tergantung pada golongan darah yang dimilikinya. Misalkan berdasarkan ahli kesehatan masyarakat diketahui peluang seseorang terkena infeksi bagi yang bergolongan darah A, B, AB, dan O berturut-turut adalah 0,30 0,35 0,60 dan 0,45. Tim dokter mengambil seorang penduduk dari kawasan industri tersebut secara acak dengan maksud akan diperiksa apakah terkena/tidak terkena infeksi, berdasarkan BPS setempat diketahui prosentase golongan darah untuk penduduk kawasan tersebut, yaitu golongan darah A, B, AB, dan O berturut-turut 35%, 25%, 30%, dan 10%

a). Hitung peluang masyarakat dikawasan industri tersebut terkena infeksi

2). Bila tim dokter mengumumkan bahwa penduduk yang diperiksa dinyatakan terkena infekssi akibat musibah kebocoran tersebut, berapakan peluang yang bergolongan darah O

Penyelesaian

a). Karena kena tidaknya infeksi tergantung pada golongan darah yang dimiliki seseorang, atau dengan kata lain golongan darah mempengaruhi kena tidaknya infeksi, berarti golongan darah adalah peristiwa awal (tahap antara) dan terkena infeksi adalah peristiwa akhir (akibat). Misalkan peristiwa B_1, B_2, B_n dan B_4 berturut-turut adalah penduduk bergolongan darah A, B, AB, dan O, dengan B_1, B_2, B_3, dan B_4 adalah suatu partisi dengan $P(B_1) = 0{,}35$, $P(B_2) = 0{,}25$, $P(B_3) = 0{,}30$ dan $P(B_4) = 0{,}10$

Misalkan peristiwa K adalah peristiwa penduduk (masyarakat) dikawasan industri tersebut terkena infeksi, dengan $P\left(K/B_1\right) = 0.30$, $P\left(K/B_2\right) = 0.35$. P $\left(K/B_3\right)$=0.60 dan $P\left(K/B_4\right) = 0{,}15$

Maka $P(K) = \left(\sum_{i=1}^{4} P(B_1\right)P\left(K/B_1\right)$

$= P(B_1).P\left(K/B_1\right) + P(B2).P\left(K/B_2\right) + P(B3).P\left(K/B_3\right) + P(B_4).P\left(K/B_4\right)$

$= 0{,}35\ (0{,}30) + 0{,}25\ (0{,}35) + 0{,}30\ (o{,}60) + 0{,}40\ (0{,}45) = 0,\ 3875$

b) Dalam hal ini, peristiwa akhir telah diketahui (telah terjadi), yaitu penduduk (masyarakat) terkena infeksi (sakit). Berapakah peluang dari yang sakit ini bergolongan darah O, berarti harus dihitung $P\left(K/B_4\right)$ yaitu :

$$P\left(K/B_4\right) = \frac{P(B_4).P\left(K/B_4\right)}{P(K)} = \frac{0{,}10(0{,}15)}{0{,}375} = 0{,}04$$

Ini berarti peluang penduduk bergolongan darah O, jika diketahui dia terkena infeksi adalah 0,04

Soal-soal latihan

1. Dua mata uang yang masing-masing bersisi M dan B, dan dan dua dadu masing-masing berisi 1, 2, 3, 4, 5, 6, dilempar Di tos/dilantunkan sekaligus

a) Perlihatkan bahwa pengetosan ini adalah eksperimen acak

b) Tentukan ruang sampelnya dan kardinalnya. Apakah diskrit/kontinu?

2. Misalkan S = {a, b, c, d} adalah ruang sampel dari suatu eksperimen acak. Berikan contoh sebanyak-banyaknya medan peristiwa pada S yang bukan terkecil dan terbesar

3. Sebuah bilangan di ambil secara acak diantara o sampai dengan 1

   a) Tentukan ruang sampel, dan kardinalnya. Apakah diskrit/kontinyu?

   b) Misalkan S ruang sampel dan eksperimen tersebut. Berikan penjelasan bahwa pasangan (S 2^8) sebuah ruang peristiwa

   c) Jika A adalah peristiwa bilangan yang terpilih kurang dari tulislah A sebagai subset dari S.

4. Jika Ω_1 dan Ω_2 dua medan peristiwa pada S

   a) Buktikan bahwa $\Omega_1 \cap \Omega_2$ medan peristiwa pada S

   b) Berikan contoh bahwa $\Omega_1 \cap \Omega_2$ belum tentu medan peristiwa !

5. Dua mata uang yang tidak seimbang ditos sekaligus dan diperoleh ruang sampelnya S = {BB, BM, MB, MM}. Dibuat pemasangan *P*: Ω - 3 antara lain dengan :

   {BB} ⟷ 0,15

   {BM} ⟷ 0,2

   {MB} ⟷

   {MM} ⟷ 0,45

   Jika diambil $\Omega = 2^s$, maka dengan menggunakan empat pemangan di atas kita dapat meneruskan pemasangan tersebut, sedemikian sehingga triple (S. Ω P) membentuk sebuah ruang peluang

   a) Berikan penjelasan, bahwa *P*sebuah fungsi peluang

   b) Hitung peluang muncul tepat satu muka

   c) Hitung peluang muncul paling sedikit satu muka

6. Seorang peternak mengirim ke sebuah toko sekeranjang telur ayam kampung sebanyak 40 butir dimana 5 diantaranya jelek (busuk). Pengusaha toko akan menerima semua pengiriman telur. Jika empat telur yang diambil

secara acak paling banyak hanya 1 yang jelek. Hitung peluang, bahwa semua kiriman itu akan diterima pengusaha toko.

7. Sebuah kelas terdiri atas 22 mahasiswa dan 18 mahasiswi akan membentuk susunan kepanitiaan yaitu ketua, sekretaris dan bendahara.

   Jika tidak boleh ada jabatan rangkap dan setiap anggota memiliki hak yang sama untuk menduduki jabatan tersebut.

   a) Hitung berapa banyak cara mereka membentuk susunan kepanitian tersebut
   b) Jika persyaratan ketua dan bendahara harus lelaki dan sekretaris harus wanita. Hitung semua cara yang mungkin
   c) Berapakah peluang susunan kepanitian semuanya lelaki

8. Misal (S, Ω, *P*) sebuah ruang peluang, dan A€Ω atau A⊂ S. A tertentu. Didefinisikan fungsi $P_A : \Omega \times \{A\} \rightarrow R$ dengan

   $$P_A\,(B.A) = P_A\left(B/A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

   Buktikan, bahwa P_A mendefinisikan sebuah fungsi peluang.

   <u>Catatan</u> : $P_A\left(B/A\right) = P\left(B/A\right)$ dinamakan peluang bersyarat dari B relatif terhadap A

9. Jika $P(A) = 0{,}4$. $P\left(B/A\right) = 0.6$ dan $P\left(A/B\right) = 0{,}8$ Hitung $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, dan $P(A\cup B^C)$,

10. Enam batang rokok dengan ukuran identik diambil secara acak 1 – 1 tanpa pengembalian dari sebuah gelas yang terdiri atas 8 batang JC, 7 batang JK, dan 5 batang SK.

    a) Hitung peluang terambil tepat 3 batang JC, dan tepat 2 batang SK
    b) Berapakah peluang terambil semuanya JC ?

11. Perhatikan daftar 2000 pasangan usia subur (PUS) disebuah kelurahan menurut keikut sertaan KB dan tingkat pendidikan.

Tingkat pendidikan / Keikut sertaan KB	SD	SMP	SMA	PT	Jumlah
Ya	300	400	600	100	1400
Tidak	200	200	150	50	600
Jumlah	**500**	**600**	**750**	**150**	**2000**

Jika diambil secara acak satu PUS. Hitung peluang :

a) Terambil PUS berpendidikan SMA
b) Terambil PUS berpendidikan PT dan peserta KB
c) Terambil PUS tidak ikut KB jika diketahui PUS tersebut berpendidikan SD
d) Terambil PUS berpendidikan PT jika PUS tersebut peserta KB
e) Terambil PUS berpendidikan SMA atau berpendidikan PT jika Pus tersebut tidak ikut KB

12. Misalkan dalam suatu PEMILU presiden RI antar istri dan suami saling mempengaruhi. Jika peluang istri memilih calon N adalah 0,6 dan jika suaminya telah memilih calon X peluangnya menjadi 0,8. Jika peluang suami memilih yang bukan calon X adalah 0,3
    a) Hitung peluang suami istri kedua-duanya memilih calon X
    b) Berapakah peluangnya paling tidak suami atau istri memilih calon X
    c) Jika ternyata istrinya telah lebih dulu memilih calon X, berapakah peluang suaminya memilih calon X ?
13. Dari 1 set kartu bridge lengka*P*diambil satu-satu secara acak 3 kartu tanpa pengembalian. Hitung peluang pada pengembalian pertama terambil kartu king jenis 1 dan pada pengambilan kedua terambil kartu king jenis IV dan pada pengembalian ketiga terambil king jenis III dengan dua cara yaitu :
    a) Dengan menggunakan teorema dasar peluang
    b) Dengan menggunakan rumus perkalian umum untuk 3 peristiwa
14. Diketahui tukang kebun/taman orangnya pelupa. Peluang lupa menyiram tanaman adalah 0,6. Tanaman akan layu jika tidak disiram peluangnya 0,7

dan 0,2 jika tanaman itu disiram. Majikannya datang dan ternyata tanaman layu. Berapakah peluangnya tukang kebun lupa tidak menyiramnya ?

15. Kotak 1 berisi 6 bola merah dan 4 bola kuning. Kotak II berisi 15 bola merah dan 10 bola kuning dan 5 bola putih. Kotak III berisi 10 bola merah dan 30 bola kuning. Dipilih sebuah kotak kemudian dari kotak yang terpilih diambil sebuah bola secara acak. Jika peluang terpilih kotak I, II, dan III berturut-turut adalah $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}$.dan $\frac{7}{12}$, serta ukuran dan bentuk bola identik. Hitung peluang
    a) Terambil bola merah
    b) Terpilih kotak II, jika ternyata bola yang terambil berwarna kuning
16. Jika (S, Ω, P) sebuah ruang peluang B_1, B_2, B_n, ...B_m, sebuah partisi dari S dan C_1, C_2, C_3, ... C_4 sebuah partisi lain dari S, dengan $P(B) = 0$, $P(C_j) = 0$, $P(B_i \cap C_j) \neq 0$, untuk suatu peristiwa A dalam S, maka $P(A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(C_j, B_i)\, P(A, B_i, \cap C_j)$

    <u>Catatan</u>

    Ini dinamakan aturan eliminasi (Bayes) dengan dua taha*P*antara, tahapp pertama adalah peristiwa B, tahap kedua adalah peristiwa C, dan A adalah peristiwa akhir (akibat)

    Dengan aturan eliminasi selesaikan soal berikut

    Misalkan efektivitas peluru kendali mengenai sasaran dipengaruhi oleh kealitas dari sistem perangkat peluru dan ketapatan pemasangan pelurunya. Misalkan sistem perangkat peluru kendali yang diproduksi dikualifikasikan menjadi 3 macam, yakni sempurna, baik dan jelek. Kesemuanya disimpan ditempa persediaan (gudang) banyaknya berturut-turut adalah 15, 10, dan, 5. Pemasangan peluru terdapat 2 kondisi yaitu tepat dan kurang tepat. Peluang pemasangan peluru tepat pada tempatnya untuk kualifikasi sempurna, baik dan jelek berturut-turut adalah 0,8, 0,6, dan 0,7, sedangkan peluang peluru kena sasaran dari sistem yang sempurna adalah 0,9 untuk pemasangan tempat dan 0,5 untuk pemasangan kurang tepat. Sistem yang baik adalah 0,7 untuk pemasangan tepat dan 0,6 untuk pemasangan kurang tepat. Sistem yang jelek adalah 0,5 untuk pemasangan tepat dan 0,4 untuk pemasangan kurang tepat. Jika dari tempat persediaan (gudang) diambil sebuah perangkat peluru secara acak

a) Hitunglah peluang peluru kendali mengenai sasaran
b) Hitunglah peluang peluru kendali tidak mengenai sasaran (dengan dua cara).

17. Sebuah mata uang bersisi B dan M yang seimbang ditos berkali-kali dan berhenti jika sudah muncul M
    a) Tentukan ruang sampel S. Apakah diskrit atau kontinu
    b) Hitung peluang diperlukan 5 kali pengetosan
    c) Hitung peluang diperlukan paling sedikit 10 kali pengetosan
18. Misal S = {x | 0 < x > - } ruang sampel dari suatu eksperimen acak.
    a) Berikan penjelasan bahwa fungsi S $\rightarrow$ R dengan P(C) = $\int e^{-n} dx$ adalah sebuah fungsi peluang
    b) Jika A { x / 4 < x < ~} hitung P(A) dan P(A^c)