BAB II

DISTRIBUSI PEUBAH ACAK

2.1 Peubah Acak (Variable Random)

Pada bab 1 anda telah mengenal ruang peluang (S, Ω, P) dimana S adalah ruang *sampel* dari eksperimen acak, Ω adalah lapangan sigma atau lapangan (medan) peristiwa pada S dan *P*adalah fungsi peluang, yaitu P: $\Omega \rightarrow R$ yang memenuhi 3 aksioma.

Pada kenyataannya ruang *sampel* S umumnya bukan himpunan bilangan. Dengan maksud untuk memudahkan pengembangan teori peluang secara matematis yang akhirnya digunakan sebagai dasar untuk mengembangkan konsep-konsep statistika, maka kita perlu mengadakan suatu pengubahan atau transformasi dari unsur-unsur S kebilangan (real). Dengan kata lain kita harus membuat sebuah aturan pemasangan atau pemetaan (fungsi) dari himpunan S kehimpunan bilangan (real).

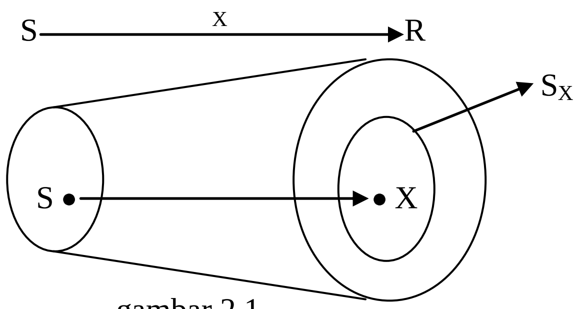
Definisi :

Fungsi dari ruang sampel ke himpunan bilangan real dinamakan peubah acak (variable random).

Misalkan S ruang sampel dari suatu eksperimen acak, dan $X : S \rightarrow R$ sebuah fungsi, maka X dinamakan peubah acak pada S. Untuk suatu s € S maka X (s) = x dinamakan nilai fungsi atau nilai peubah acak X pada s. Himpunan semua nilai fungsi dari X, yaitu $R_x = S_x = \{x \mid x = R(s), s € S\}$, dinamakan range X.

Perhatikan gambar 2.1

Jelas $S_x \subset R$. Dengan menganggap*P*S_x sebagai ruang sampel baru (dinamakan juga ruang sampel imbasan karena X.)



gambar 2.1

Kita bisa membentuk Ω_x yaitu medan peristiwa pada S_x, dan dengan domain Ω_x kita bisa membentuk fungsi peluang $P_x : \Omega_x \rightarrow R$ sehingga kita memiliki 3 serangkai (S_x, Ω_x, P_x) sebagai ruang peluang yang baru. Aturan fungsi P_x dibangun sedemikian sehingga berhubungan dengan fungsi *P*pada ruang peluang (S, Ω, P). Agar P_x dapat terdefinisi dengan baik, maka setia*P*A € Ω_x, haruslah X^1 (A) € Ω, sehingga peubah acak X harus didefinisikan lebih lanjut (definisi 2).

Definisi 2

Misal (S, Ω, P) ruang peluang fungsi $X : S \rightarrow R$ dinamakan peubah acak (variable random) pada S. jika X^1 (A) = C € Ω_x.

Catatan :

- Definisi 2 lebih bermakna dibanding dengan definisi 1
- Dengan definisi 2 berarti fungsi $P_x : \Omega_x \rightarrow R$ memiliki aturan $\forall$ A € Ω_x, A $\rightarrow P_x(A) = P(X^1 (A))$ = PC, dengan C € Ω_x
- Jika S_x terbilang, maka X dinamakan peubah acak diskrit dan jika S_x tak terbilang, maka X dinamakan peubah acak kontinu.

Contoh 2.1

Misalkan S ruang sampel pengetosan tiga kali sebuah mata uang seimbang bersisi muka (M) dan belakang (B) fungsi $X : S \rightarrow R$ didefinisikan dengan ”banyak muka” atau X ”banyak muka”

a) dengan mengambil ruang peluang (S, 2^s, P). Periksa apakah X sebuah peubah acak pada S. apakah X diskrit atau kontinu ?

b) Jika S_x range X dan $\Omega_x = 2^{sx}$ medan peristiwa pada Sx, maka dapat dirumuskan bahwa (S_x, $\Omega_{x,}$ dan P_x) sebuah ruang peluang. Hitung Px ({12})

c) Hitung P_x (X = x), untuk $\forall$ € S_x. Kemudian hitung $\sum_{x\ 0}^{3} Px(X = x)$

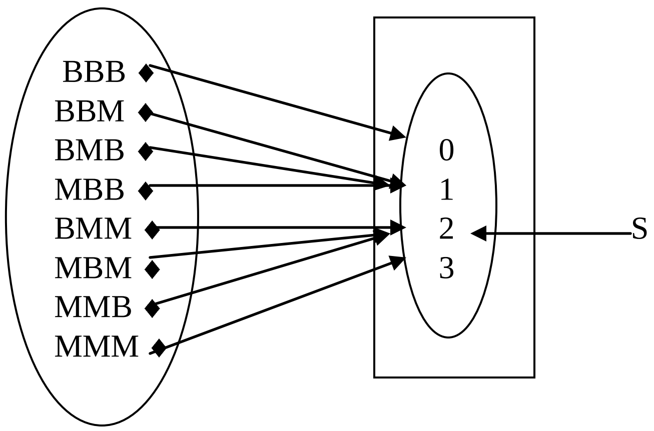
Penyelesaian

a) S {BBB, BBM, BMB, MBB, BMM, MBM, MMB, MMM} S diskrit.

Uniform, dengan N (S) = 8 dan $P(s) = \frac{1}{8}$, $\forall$ s € S

fungsi X : S $\rightarrow$ R dapat diperlihatkan dalam diagram, seperti pada gambar 2.2

$$S \xrightarrow{X} R$$



(Gambar 2.2)

Dalam hal ini X (BBB) = X (BBB) = 0

X (BBM) = X (BMB) = X (MBB) = 1

X (BMM) = X (MBM) = X (MMB) = 2 dan

X (MMM) = 3

Dapat ditunjukkan bahwa pengaitan X : S $\rightarrow$ R benar-benar mendefinisikan sebuah fungsi. Jadi dengan mengacu pada definisi 1, X adalah sebuah peubah acak pada S, dengan $R_x = S_x$ = range X = {0, 1, 2, 3, }. Karena S, terhitung maka X adalah <u>peubah acak diskrit</u>

b) Karena N (S_x) = 4, maka N (Ω_x) = N (2^{sx}) = 2^4 = 16, dan Ω_x = {ϕ, S_x, {0}, {.....{3}, {0, 1}, ..., {1, 2, 3, }}. Sehingga dengan definisi 2, fungsi X benar-benar sebuah peubah acak.

Misal A = {1, 2} € Ω_x, maka P_x (A) = P(X^4 (A)) = P | {BBM, BMB, MBB, BMM, MBM, MMB}| = $\frac{3}{4}$

c) Px (X = x) diartikan sebagai peluang peubah acak X bernilai x

Untuk x = 0 $\Rightarrow$ P_x(x = 0) P(BBB) = $\frac{1}{8}$

x = 1 $\Rightarrow$ Px (x = 1) P(BBB, BMB, MBB) = $\frac{3}{8}$

x = 2 $\Rightarrow$ Px (x = 2) P(BMM, MBM, MMB) = $\frac{3}{8}$

x = 3 $\Rightarrow$ Px (x = 3) P(MMM) = $\frac{1}{8}$

$\sum_{x=0}^{3} Px(X = x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}$ = 1. Ini menunjukkan kepada kita bahwa fungsi P_x bersifat tidak negatif dan jumlah semua nilai fungsinya sama dengan 1. Atau P_x (X = x) $\geq$ 0, $\forall$ x $\in$ S_x dan $\sum_{x \in S_x} Px(X = x) = 1$. Maka himpunan semua pasangan X dengan nilai fungsinya atau {(x, P_x (X = x) | x $\in$ S_x)}dinamakan <u>distribusi peluang dari p. a X</u>. Jika fungsi P_x bersifat seperti pada contoh 2.1. Selanjutnya domain dari fungsi peluang P_x dapat diperluas menjadi R = Sx $\cup$ S_x^r dengan P_x (X = x) = 0, $\forall$ x € S_x^r. Nantinya fungsi ini dinamakan fungsi kepadatan peluang dan selanjutnya indek x pada P_x dapat dihilangkan sehingga cukup dengan P saja !

2.2 Fungsi Kepadatan Peluang

A. Peubah Acak Diskrit

Misalkan X : S $\rightarrow$ R p,a diskrit dengan range S_x, dan (S, Ω, P) ruang peluang

Definisi :

Fungsi f : R = $S_x \cup \rightarrow S_x^0$ R dengan f (x) = P(X = x) dinamakan fungsi kepadatan peluang atau fungsi densitas peluang dari peubah acak X. Jika :

(i) f (x) = P(X = x)≥ 0, ∀x € R

(ii) $\sum_{xcR} f\ (x) \quad \sum_{x \in Sx} P\ (X = x) = 1$

Catatan :

Umumnya rumus (aturan) fkp untuk p, a diskrit X berbentuk seperti berikut :

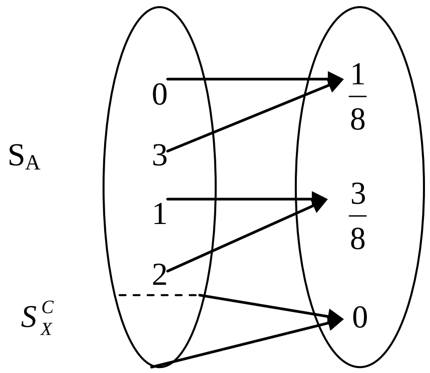
f (x) = ...

Contoh 2.2

Perhatikan contoh 2.11 dan gambar 2.21

Apabila kita definisikan fungsi f : R = Sx ∪ $S_x^0 \rightarrow$ R dengan aturan seperti diberikan dalam diagram panah pada gambar 2.31

R = $S_A \cup S_X^C \xrightarrow{f}$ R



Gambar 2.3

Jelas f(x) = P(X = x) = $\begin{cases} \frac{1}{8,} x = 0{,}3 \\ \frac{3,}{8} x = 1{,}2 \\ 0, x\ lainnya \end{cases}$

atau F9x) = P (X=x) = $\begin{cases} \dfrac{\binom{3}{x}}{8} ; x \in Sx \\ 0; x \in S_x^c \end{cases}$

Karena fungsi f memenuhi (i) f (x) = *P*(X = x) ≥ 0, ∀ x € R dan

(ii) $\sum_{x \in R} f\ (x) = \sum_{x \in Sx} P\ (X) = x) = 1$

maka f adalah f, k, *P*dari peubah acak X.

B. Peubah Acak Kontinu

Definisi :

Misal X : S → R peubah acak kontinu dengan range Sx

Fungsi f : R = Sx ∪ S_x^0 dinamakan fungsi kepadatan peluang dari p, a X. jika :

(i) f (x) ≥ 0, ∀ x = € R

(ii) $\int_R f\ (x)\ dx = 1$

Catatan :

- Umumnya rumus fkp untuk peubah acak kontinu X berbentuk seperti berikut :
  f (x) = ...
- Jika A ⊂ R. A ∈ Ω_x, maka P(A) = $\int_A f\ (x)\ dx$, dan khususnya untuk

  A = (a, b) = {x : a < x < b}, maka *P*(A) = $\int_a^b f\ (x)\ dx$
- Dapat ditunjukkan bahwa P[a ≤ x ≤ b] = P(a ≤ x ≤ b) = P[a ≤ x ≤ b] = P[a ≤ x ≤ b] dan P(X = a) = 0 ∀ a konstanta Real

Contoh 2.3

Misal peubah acak X : S → R memiliki range S_x = {x | 0 ≤ x ≤ 2} fungsi f :

R $\rightarrow$ R di definisikan dengan :

f (x) = ...

a). Perlihatkan , bahwa f sebuah fkp dari X

b). Hitung P[- 1 < x $\leq$ 1]

c). Hitung P[X = I]

Penyelesaian

a). Karena Sx = [0,2] kontinu, maka X adalah peubah acak kontinu. f (x) 1 – $\frac{1}{2}$ x $\geq$ 0, untuk 0 $\leq$ x $\leq$ 2, dan f (x) = 0, untuk x < 0 atau x > 2. Berarti f (x) $\geq$ 0, $\forall$ x $\in$ R, dan karena $\int_R f\ (x)\ dx = \int_{-X}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{2} (1 - \frac{1}{2}x)dx + \int_{2}^{0} 0dx = x - \frac{1}{4}x^2$ maka f adalah sebuah fkp dari X

b). P [- 1 < x $\leq$ 1] = P[- 1 < x $\leq$ 1] = $\int_{4}^{1} f\ (x)dx = \int_{1}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{21} (1 - \frac{1}{2}x)dx = x - \frac{1}{4}x2 = \frac{3}{4}$

c). P (X = 1) = 0

Contoh 2.4

Tentukan nilai agar fungsi f : R $\rightarrow$ R dengan f (x) $\begin{cases} kx^2; 0 < x < / \\ 0; x \text{ lainya} \end{cases}$

membentuk sebuah fungsi kepadatan peluang X kemudian hitung $p\left(\frac{1}{2}xn5\right)$

Penyelesaian

Karena nilai x untuk f (x) = kx^2 $\neq$ 0 banyaknya tak terhingga dan tak terhitung (0 < x < 1). Maka dapat disimpulkan x adalah kontinu, dalam hal ini dapat dianggaPrange X, S_x = { x [0 < x <]}. Jadi agar f sebuah fkp dari X adalah

(i) f (x) = kx^2 $\geq$ 0 $\Leftrightarrow$ $k \geq 0$, dan

(ii) $\int_p f(x)dx = \int_x^u 0dx + \int_0^1 kx^2 dx + \int_1^x 0dx = \frac{1}{3}kx^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}k = 1 \Rightarrow k = 3$

jadi f (x) = $\left[\dfrac{3x^2;0<x<1}{0;xlainnya}\right]$

Sehingga

$$P\left[\frac{1}{2}<x<5\right] = \int_{\frac{1}{2}}^{4} f)x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 3x^2dx + \int_{1}^{5} 0dx = x^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

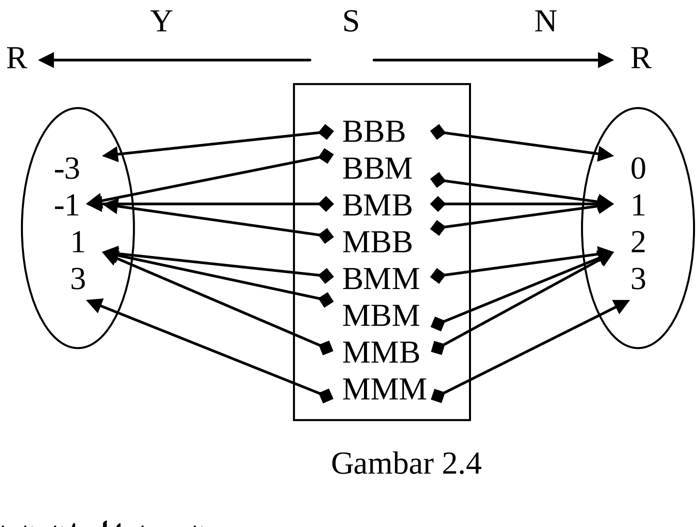
3.2 Fungsi Kepadatan Peluang Bersama

Perhatikan ruang sampel pengetosan sebuah mata uang seimbang tiga kali. Kita dapat membuat tak terhingga peubah acak pada ruang sampel tersebut. Misalkan kita buat dua peubah acak namakan peubah acak X dan peubah acak Y dengan peubah aacak X = ”banyak muka” dan Y = ”selisih banyak muka dan banyak belakang”. Maka S_x = {0, 1, 2, 3,} dan Sy {- 3, -1, 1, 3}. Range bersama (gabungan) dari peubah acak X dan peubah acak Y, ditulis.

S_{XY} = {(xy)} x € Sx,y € S_y, X^1 (x) $\cap$ Y^4 (y) $\neq \phi$ {$\subset S_x \Theta S_y$}

Catatan

Range bersama dari X dan Y bisa kita ambil yang terbesar, yaitu $S_X \Theta S_Y$ untuk S_X dan S_Y diatas maka S_{XY} {(0, -3), (1, - 1), 2, - 1), (3, -3)} atau $S_X \Theta S_Y$ {(x, y)}x = 0, 1, 2, 3 : y = - 3, - 1, - 1, - 3. selanjutnya kita ingin menghitung *P*(X = x dan Y = y) = *P*(X = x, Y = y) = *P*(X^4 (x) $\cap$ Y^4 (y). Perhatikan gambar 2.4



Gambar 2.4

- Untuk (0, -3) € S^{XY} $\rightarrow$ P[{(0, -3)}] = P(X = 0, Y = -3) $P(X^4(0) \cap Y^4$ (-3) = [BBB] = $\frac{1}{8}$
- Untuk (1, -) € S^{XY} $\rightarrow$ P[{ (1, -1)}] = P(X = 1, Y = -1) = $P[(X^4(1) \cap Y^4$ (1)] = P[BBM, BMB, MBB] = $\frac{3}{8}$
- Untuk (2, 1) € S^{XY} $\rightarrow$ P[{(2, 1)}] = P(X – 2, Y = [Y = $P(X^4$ (2) $\cap$ Y^4 (1)] = P(BMM, MBM, MMB) = $\frac{3}{8}$
- Untuk (3, 3) € S^{XY} $\rightarrow$ P[{(3, 3)}] = P(X = 3, Y) $P[X^4(3)]$ = P(MMM) = $\frac{1}{8}$

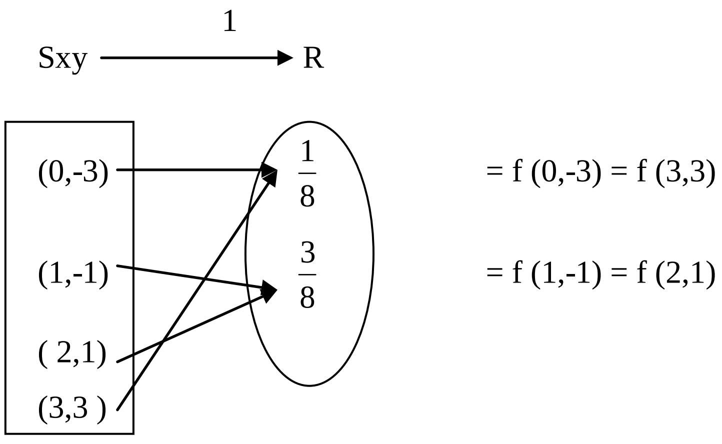
Dapat anda periksa, bahwa jumlah semua peluang dan semua pasangan (x, y) € Sxy adalah I, yakni :

P [(0, -3)] + P [(1, -3)] + P [(2, -1)] + P (3, -3)] = 1

Catatan :

Himpunan semua tripel terurut (x, y dan P[(x, y)], dengan (x, y) € S_{xy} dinamakan diostribusi peluang bersma (gabungan$_)$ dari peubah acak X dan Y.

Perhatikan fungsi f : $S_{xy} \rightarrow$ R, yang didefinisikan dengan $\forall$ *(x, y)* € S_{xy} f (x, y) = P(X = x, Y = y) = $P[X^1(x) \cap Y^{-1}$ (y)], dan perhatikan diagram panah untuk fungsi f, dengan domain S_{xy} = {(0, – 3), (1, - 1), (2, 1), (3,)}



Gambar 2.5

Fungsi f : $S_{xy} \rightarrow$ R yang diperlihatkan pada gambar 2.5 memiliki sifat $f \geq 0$, dan

$$\sum_{(x,y)\in S_{xy}} f(x,y) = 1$$

Fungsi seperti ini dinamakan fungsi peluang bersama (gabungan) dari X dan Y. Selanjutnya domain dari fungsi ini diperluas menjadi $P^2 = S_{xy} \cup S^c_{xy}$, seperti akan didefinisikan berikut ini :

Catatan 1 :

Fungsi f : $R^2 = S_{xy} \cup S^c_{xy} \rightarrow R$, dinamakan fungsi kepadatan peluang bersama atau fungsi peluang gabungan dan peubah acak diskrit X dan Y, jika :

(i) $\forall$ (x, y) € R^{2}, f (x, y) = P(X= x, Y = y) ≥ 0

(ii) $\sum_{R^2} f(x,y) = \sum_{S_w} p(N = x, Y = y) - \sum_{S_N}\sum_{S_N} P(X = X, y = Y) = 1$

Definisi 2 :

Fungsi f : $R^2 = S_{xy} \cup S^c_{xyz} \rightarrow R$, dinamakan fungsi kepadatan peluang bersama dari peubah acak diskrit X, Y dan Z, jika :

(i) f (x, y, z) = P(X = x, Y = y , Z = z) ≥ 0, $\forall$ (x, y, z) € R^3

(ii) $\sum_{R^3} f(x, y, z = \sum_{S_X}\sum_{S_Y}\sum_{S_Z} P(X = x, Y = y, Z = z)$

Definisi 3 :

Fungsi f : R'' $\rightarrow$ R dinamakan fungsi kepadatan peluang bersama dari peubah acak diskrit X_1, X_2 ......, X_n, jika :

(i) f (x_1, x_2 ...., x_n) P[X1 = x1, $X_2 = x_2$ …, $X_2 = X_n$] ≥ 0, $\forall$ (x_1, x_2 ...., x_3) € R^n

(ii) $\sum_{R^n} f(x_1..x_2....., x_n) = 1$

Definisi 4 :

Fungsi f : R'' $\rightarrow$ R dinamakan fungsi kepadatan peluang bersama dari peubah acak kontinu X_1, X_2 ......, X_n, jika :

(i) f (x_1, x_2 ......, x_n) ≥ 0, $\forall$ (x_1, x_2 ......, x_n) € R^n

(ii $\int_R \int_R \ldots \int_R f(x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n)\, dx_1, dx_2, \ldots.\, dx_n = I$

Contoh 2.5

Periksa apakah fungsi yang didefinisikan berikut merupakan f, k, p bersama dari p, a diskrit yang diberikan :

(1) f : $R^2 \rightarrow R$, dengan f (x, y) = $\begin{cases} \frac{1}{8}.(x,y)(0,-3),.(3,3) \\ \frac{3}{8}.(x,y)(1,-1),.(2,1) \\ 0, (xy) \text{ lainnya.} \end{cases}$

(2) g : $R^2 \rightarrow R$, dengan g(x, y) = $\begin{cases} \frac{9}{4^{x+y}}; x, y = 1,2,3,\ldots.. \\ 0, (xy) \text{ lainnya.} \end{cases}$

(3) h : $R^2 \rightarrow R$, dengan h(x, y) = $\begin{cases} 6x^2y; 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, (xy) \text{ lainnya.} \end{cases}$

(4) t : $R^2 \rightarrow R$, dengan t(x, y) = $\begin{cases} c\text{-}^{x-y-z}; x,y,z = > 0 \\ 0, (xy) \text{ lainnya} \end{cases}$

Penyelesaian :

(1). Peubah acak yang dimaksud adalah X dan Y, dan karena S_m={(10,-3). (3,3), (1,-1), (2,1)} terhitung pada X dan Y diskrit. Jelas f(x,y)=P (X-x,Y-y) $\leq$ 0, $\forall$ (x,y) $\in S_{xy} \cup S_{xy}^c = R^2$, dan karena

$$\sum_{R^2} f(x,y) = \sum_{S_{xy}} P(X = x, Y = y) = F(0.-3) + f(3,3) + f(1,-1) - f(3.3)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 1$$

maka f adalah fkp bersma dari p, a diskrit X dan Y

(2). Dalam soal ini peubah acaknya adalah X dan Y, dan karena $S_{xy} = S_x \otimes S_y = N \otimes N$ terhitung, maka X dan Y p, a diskrit. Jelas g(x,y)>0,$\forall$(x,y)$\in$ $S_{xy} \cup S_{xy}^c = R^2$, dan karena :

$$\sum\sum_{R^2} g(x,y) = \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} \frac{9}{4^{x+y}} = \sum_{x=i}^{\infty} \frac{9}{4^x}\left[\sum_{y=i}^{\infty}\frac{1}{4^y}\right]$$

$$= 9 \sum_{x=i}^{\infty} \frac{1}{4^x}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ...\right]$$

$$= 9 \sum_{x=i}^{\infty} \frac{1}{4^x}\left[1\frac{1}{4}\Big/\frac{1}{4}\right]$$

$$= 9 \; \frac{1}{3}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{4^x}$$

$$= 9 \; \frac{1}{3}.\frac{1}{3}$$

$$= 1$$

maka g adalah sebuah f, k, *P* bersama dari X dan Y

(3) Dalam soal ini peubah acaknya adalah X dan Y, dan karena $S_{xy} = S_x \Theta S_x$ = (0, 1) $\otimes$ (0,1) = {x| 0 <x < 1}$\otimes$ {1^{2}0 < x <1} tak terhitung maka X dan Y dua p, a kontinu. Jelas h (x,y) $\geq$ 0, $\forall$ (x, y) $\in$ $S_{xy} \cup S_{xy}^0 = R^2$

dan karena :

$$\iint_{R^2} h(x,y)dxdyy \iint_0 6xy^2 dxdy = \int_0^1 y^2 [3x^2] dx = \int_0 3x^2 dy = y^x \Big]_{xy}^1 = R^2$$

maka h adalah sebuah f, k, p bersama dari p, a kontinu X dan Y.

(4). Dalam soal ini peubah acaknya adalah X dan Y, dan Z karena $S_{xyz} = S_x \otimes S_y \otimes S_z$ = [x|x > 0}$\otimes$ {y|y > 0}$\otimes$ {===> 0} tak terhitung, maka tiga peubah acak X, Y daan Z adalah kontinu. Jelas

f (x,y, z) $\geq$ 0, $\forall$ (x, y, z) $\in$ $S_{xyz} \cup S_{xyz} = R^2$ dan karena

$$\iiint_{R^3} t(x,y,z)dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x-y}dxdy = 1,$$

maka t adalah f, k, p bersama dari p, a kontinu X, Y dan Z

Contoh 2.6

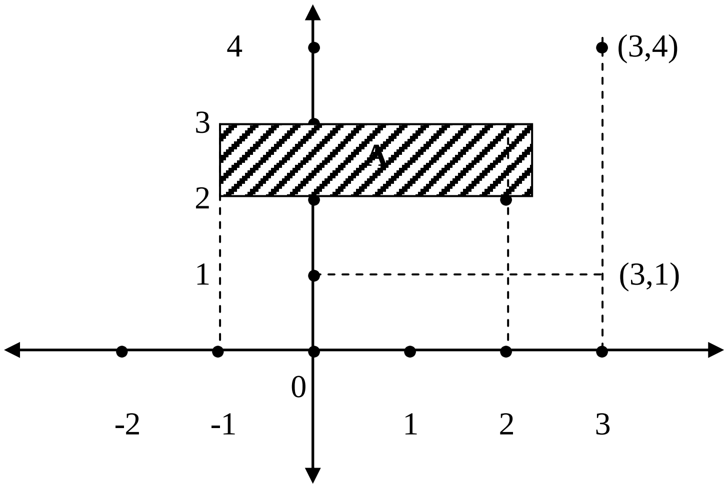
Ditentukan f :R^2 ⟶ R, dengan f (x, y) = $\begin{cases} \frac{4}{135}xy : 0 < X < 3, 1 < y < 4 \\ 0, \text{ x,y lainnya} \end{cases}$

adalah f, k, p gabungan (bersama) dari peubah acak X dan Y.

Jika A = {(x,y){-} <2,2 < y < 3 } ⊃ Hitung peluang P(A) = P{(x,y)∈A}

Penyelesaian

Ruang sampel bersama $S_{xy} \subset R^2$ dan peristiwa $A \subset R^2$ ditunjukkan dalam gambar (2.6)



Gambar 2.6

P(A)= P [(x,y) ∈ A} = $\iint_A f(x,y)dxdy = \int_2^3\int_{-4}^2 f(x,y)dxdy$

$$= \int_2^3 \left[\int_{-1}^0 0dx + \int_0^2 \frac{4}{135}xydx \right] dy$$

$$= \int_2^3 \left[\frac{2}{135}x^2y \right]_0^2 dy = \int_2^3 \frac{8}{135}ydy = \frac{4}{135}y^2 \Big|_2^3 = \frac{20}{135} = \frac{4}{27}$$

2.4 Distribusi Marjinal

apabila kita mempunyai f, k, *P*bersama dari peubah acak X dan Y maka kita dapat menentukan distribusi peluang atau f, k, *P*dari masing-masing peubah acak X dan y. Fkp yang diperoleh dinamakan fkp marjinal. Bagaimana menentukannya ? kita lihat definisi ini.

Definisi

Misalkan f (x, y) adalah fkp bersama dari peubah acak, diskrit X dan Y, maka :

fungsi f_x : R→ R, dengan f_x (x) = $\sum_{sy} f_x(x, y)$ dinamakan fkp marjinal dari X dan

fungsi f_y : R→ R, dengan f_x (x) = $\sum_{sy} f_x(x, y)$ dinamakan fkp marjinal dari Y.

Sedangkan, jika f (x, y) adalah fkp bersama dari peubah aacak kontinu X dan Y, maka :

$$f_x(\mathrm{x}) = \int_R f(x,y)dy \text{ dan } f_{\mathrm{y}}(\mathrm{y}) = \int_R f(x,y)dy$$

Contoh 2.7

Misalkan X dan Y mempunyai fkp bersama

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{21}\, 2x = 1,2,3,\ y = 12 \\ 0 \quad : x, y \text{ lainnya} \end{cases}$$

a) Tentukan fkp marjinal dari X dan fkp marjinal dari Y

b) Hitung *P*(x = 2, y =2) *P*[x = 2], dan P [y=1]

Penyelesaian :

Jelas X dan Y dua peubah acak diskrit dengan S_x, {1, 2, 3} dan S_y {1,2}.

a). $$fx(\mathrm{x}) = \sum_{sy} f(x,y) = \sum_{y=1}^{2} \frac{x+y}{21} = \frac{x+1}{21} + \frac{x+2}{21} + \frac{2x+3}{21}$$

$$\text{Jadi } fx(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{21}\, x = 1.2.3 \\ 0xylainnya \end{cases}$$

$$f_x(y) = \sum_{sx} f(x,y) = \sum_{x=1}^{3} \frac{x+y}{21} = \frac{1+y}{21} + \frac{2+y}{21} + \frac{3+y}{21} = \frac{y+2}{7}$$

$$\text{Jadi} \quad \text{fy (y)} = \begin{cases} \dfrac{y+2}{7}.y = 1,2 \\ 0 \qquad \text{y lainnya} \end{cases}$$

b). P (x=2, y=2) f (2,2) = $\frac{2+2}{21} = \frac{4}{21}$

P (x=2) = f_x (2) = $\frac{22+3}{7} = \frac{1}{3}$

P (y=1) = $f_Y(1)$ = $\frac{1+2}{7} = \frac{3}{7}$

Contoh 2.8

Misalkan fkp bersama dari X dan Y, adalah :

F (x,y) = $\begin{cases} \frac{4}{135} & \text{xy ; } 1 < x < 4;\ 0 < y < 3 \\ 0; xylainnya \end{cases}$

a). Tentukan fkp marjinal dari X dan fkp marjinal dari Y

b). Hitung P[1- x – 3, 1< y < 1] P [1< x < 3], dan P [1- y - 2]

Penyelesaian

Jelas X dan Y dari p, a kontinu dengan S_x = {x | 1 < y < 4} dan S_x = {y|0 < y < 3}

a). f_x (x) = $\int_0 f(x,)dy - \int_2^0 0dy + \int_0^4 \frac{4`}{135} xydy + \int_4^0 0dy$

= $\frac{2}{135} xy^2 \Big[= \frac{18}{135} x = \frac{2}{15} x$

jadi f_x (x) = $\begin{cases} \frac{2}{15} x, 1 < x < 4 \\ 0; xlainnya \end{cases}$

f_y (y) = $\int_R f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^4 \frac{4}{135} xydx + \int_3^{\infty} 0dx$

= $\frac{2}{135} x^2 y \Big]_1^4 = \frac{2}{9} y$

jadi f_y (y) = $\begin{cases} \frac{2}{9} 9; 0 < x < 3 \\ 0; ylainnya \end{cases}$

b). P[1 < x < 3, 1 < y < 2] = $\int_1^1\int_1^2 \frac{4}{135} xydydx = \frac{2}{135}\int_1^1 \left[xy^2\right]_1^2 dx$

$$= \frac{2}{135}\int_1^3 3xdx = \frac{2}{135}x^2\left[\frac{3}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{34}{135}$$

P [1 < x < 3] = $\int_1^3 f_x(x)dx = \int_1^3 \frac{2}{15}xdx = \frac{1}{15}\left[x^2\right]_1^3 = \frac{8}{15}$

P [1 < y < 2]= $\int_1^2 f_y(y)dy = \int_1^2 \frac{2}{9}xdx = \frac{1}{9}\left[y^2\right]_1^2 = \frac{1}{3}$

2.5 Distribusi Bersyarat

Di bab 1, kita telah mengenal peristiwa bersyarat dan peluangnya. Penulisan A/B diartikan sebagai peristiwa A relatif terhadaP B, dan penulisan.

P(A/B) adalah peluang peristiwa A relatif terhadaP B, dengan *P*(A/B) =

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, P (B) = 0. Dalam hal ini peristiwa A dan B belum tentu himpunan bagian dari R (umum). Bagaimana, bila kita memiliki dua peubah acak atau dua peristiwa yang mana peristiwa tersebut merupakan himpunan bagian dari R^2, sedangkan peristiwa yang satu atau peubah yang satu diketahui (telah terjadi) ? Untuk menjawab ini, perhatikan ilustrasi berikut :

Misalkan X dan Y dua peubah acak diskrit dengan f (x, y), $f_x(x)$ dan $f_y(y)$, masing-masing adalah fkp bersama dari X dan Y, fkp marjinal dari X dan fkp marjinal dari Y.

Misalkan pula A = {(x,y)| x = a, -∞ < y < ∞ } ⊂ R^2

B = {(x,y)| x = -∞ < x < ∞,y = b} ⊂ R^2

maka P(B/A) = $\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(x=a, y=b)}{P(x=a)} = \frac{f(a,b)}{f_y(a)}$

Sedangkan P(B/A) = P $({}^{y=b}/_{x=a})$

Jadi P ($^{y=b}/_{x=a}$) = $\dfrac{f(a,b)}{f_x(a)}$

Untuk sembarang X = x dan Y = y maka

P(Y=y/x) = $\dfrac{f(x,y)}{f_x(x)}$

Bila f (y/x) menyatakan peluang bersyarat dari Y jika diketahui X = x, maka :

f (y/x) = $\dfrac{f(x,y)}{f_x(x)}, f(x) > 0$

dapat ditunjukkan, bahwa f (y/x) suatu fkp (bersyarat). Selanjutnya hubungan ini bisa diperluas untuk peubah acak kontinu, seperti akan didefinisikan berikut ini :

Definisi :

Jika X dan Y dua peubah acak dengan f(x, y), $f_x(x)$ dan $f_y(y)$ masing-masing adalah fkp bersama dari X dan Y, fkp marjinal dari X dan fkp marjinal dari Y maka fungsi

(1). F(x/y) = $\dfrac{f(x,y)}{f_y(y)}, f_y(y) > 0$ dinamakan fkp bersyarat dari X, jika diketahui Y =y

2). F (y/x) = $\dfrac{f(x,y)}{f_x(x)}, f_x(x) > 0$ dinamakan fkp bersyarat dari Y, jika diketahui X – x

Catatan

Dapat dtunjukkan bahwa 9 (x/y) dan f (y/x) benar-benar sebuah fkp , yaitu dengan menganggaPx, y diskrit. Jelas f (x/y) = $\dfrac{f(x,y)}{f_y(y)}, f_x(x)$ ≥ 0, dan karena

$$\sum_x f(x/y) = \sum_x \frac{f(x,y)}{f_y(y)} = \frac{1}{f_y(y)}\sum_x f(x,y) = \frac{1}{f_x(y)} f_y(y) = 1$$

maka f (x/y) adalah sebuah fkp . Dengan cara yang sama untuk f (y/x) dan dengan menganggaPbahwa X. Y diskrit, walaupun X. Y kontinu !

Contoh 2.9

Misalkan f (x, y) = $\begin{cases} \dfrac{4}{135} \text{x,y ;1 <x<4,0<y<3} \\ \text{O: x,y lainnya} \end{cases}$ fkp bersama dari X dan Y a). Tentukan fkp bersyarat dari X jika diketahui Y – y dan fkp bersyarat dari Y jika dikethui X = x

b). Hitung peluang bersyarat dari 1 < X < 2, jika diketahui Y = 2

c). Hitung peluang bersyarat dari 1 < Y < 2, jika diketahui X = 3

Penyelesaian

Jelas X dan Y adalah peubah acak kontinu.

a). Misalkan f (x/y) fkp bersyarat dari X jika diketahui Y = y maka

f (x/y) = $\dfrac{f(x,y)}{f_y(y)}$, dengan f_y (y) = $\begin{cases} \dfrac{2}{9}\text{y, } 0< y < 3 & \text{fkp marjinal dari Y} \\ 0\text{, y lainnya (Lihat contoh 2.8)} \end{cases}$

untuk 1 < x < 4, dan 0 < y < 3 ⇒ f (x/y) = $\dfrac{\frac{4}{135}xy}{\frac{2}{9}9} = \dfrac{2}{15}x$

untuk x, y lainnya ⇒ f (x/y) = 0

maka f (x/y) = $\begin{cases} \dfrac{2}{15}x, y < \text{x} < 4{,}0 < \text{y} < 3 \\ \text{0; x, y lainnya.} \end{cases}$

Misalkan f (x/y) fkp bersyarat dari Y jika diketahui X = x maka

f (y/x) = $\dfrac{f(x,y)}{f_n(N)}$ dengan f_x (x) = $\begin{cases} \dfrac{2}{15}\text{X; I < x < 4 fkp marjinal dari x} \\ \text{0; x Lainnya (lihat contoh 2.8)} \end{cases}$

untuk 1 < x < 4, 0 < y < 3 ⇒ f (y/x) = $\dfrac{\frac{4}{135}xy}{\frac{2}{15}x} = \dfrac{2}{9}y$

jadi f (y/x) = $\begin{cases} \dfrac{2}{9}y : I < \text{x} < 4{,}0 < \text{y} < 3 \\ \text{0; x, y lainnya} \end{cases}$

b). P[1< x < 2 / y = 2] = peluang bersyarat dari 1 < x < 2 jika diketahui y = 2

$$= \int_1^2 f(x/2)dx = \int_1^2 \frac{2}{15} x dx = \frac{1}{15} x^2 \Big[_1^2 = \frac{1}{5}$$

c). P[- 1< y < 2 / x = 3] = peluang bersyarat dari - 1 < y < 2 jika diketahui x = 3

$$= \int_{-1}^2 4(y/3)dy = \int_{-1}^2 0dy + \int_0^2 \frac{2}{9} y dy = \frac{2}{9} y^2 \Big|_0^2 = \frac{4}{9}$$

Contoh 2.10

Misalkan X dan Y mempunyai fkp bersama

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{21}; x = 1, 2, 3\ y = 1, 2 \\ 0;\ x, y \text{ lainnya} \end{cases}$$

a). Tentukan f (x, y) dan f (y/x)

b). Hitung P[x = 0, 1, 2/y = 1]

c). Hitung P[y = 0, 1, / x = 2]

Penyelesaian

Jelas X dan Y dua peubah acak diskrit

a). f (x/ y) = $\frac{f(x, y)}{f_y(y)}$, dengan f_y (y) = $\begin{cases} y+2; y = 12 \\ 0; ylainnya \end{cases}$ lihat contoh 2.7

untuk x = 1, 2, 3, , y = 1, 2, ⇒ f (x/ y) = $\frac{\frac{1}{21}(x+y}{\frac{(y+2}{7}} = \frac{x+y}{3y+6}$

Maka f (x/ y) = $\begin{cases} \frac{\frac{x+y}{3y+6}}{0; xylainnya}; x = 1,2,3 y = 1,2 \end{cases}$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y}{f_x(x)} \quad \text{dengan } f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{21} & = 1, 2, 3 \text{ (lihat contoh 2.7)} \\ 0; x lainnya \end{cases}$$

Untuk x = 1, 2, 3, y = 1, 2 $\Rightarrow$ f (y/ x) = $\dfrac{\frac{1}{21}(x+y)}{\frac{1}{21}(2x+3}=\dfrac{x+y}{2x+3}$

Maka f (y/ x) = $\begin{cases} \frac{1}{9}(x+y); x=1,2,3, y=1,2 \\ 0; x, y lainnya \end{cases}$

b). Hitung P[x= 0, 1, 2/y = 1] = P(x = 0/y = 1) + P[x = 1/y = 1] – P[x = 2/y = 1] = f (0/1) + f (1/1) + f (2/1).

Dengan f (x/1) = $\begin{cases} \frac{1}{9}(x+y); x=1,2,3 \\ 0; x lainnya \end{cases}$

Maka P[x = 0, 1, 2/y = 1] 0 + $\frac{2}{9}+\frac{3}{9}=\frac{5}{9}$

2.6 diskrit Kumulatif (Fungsi Distribusi)

Ada kalanya ingin mengetahui peluang suatu peristiwa adalah himpunan bagian dari R bernilai kurang dari atau lebih dari suatu bilangan tertentu. Seringkali kita ingin mengetahui peluang peubah acak kurang dari atau sama dengan nilai tertentu, yaitu P[X = x] atau juga ingin mengetahui P [A>x] Untuk ini kita akan mendefinisikan sebuah fungsi lagi yaitu fungsi F : R $\rightarrow$ R.

Definisi

Fungsi F : R $\rightarrow$ R dengan F (x) = P [X $\leq$ x] dinamakan fungsi distribusi dari X dan himpunan semua pasangan (x, F (x)) dinamakan distribusi kumulatif dari X

Untuk menentukan fungsi distribusi dari X adalah sebagai berikut :

- Jika X p, a diskrit dengan fkp f (x), maka

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t<x} f(t)$$

- Jika X p, a kontinu dengan fkp f (x), maka

$$F(x) = P(X \le x) \int_{-x}^{N} f(t)\,dt$$

Catatan

- Demi kamudahan sebaiknya huruf yang digunakan untuk menyatakan fkp dan t, d dari X harus sama. Untuk fkp dengan huruf kecil dan f, d derngan huruf besar
- Komplemen dari fungsi distribusi, yaitu P[X > x], dilambangkan dengan F (x) = P[X > x] = 1 – P[X ≤ x] = 1 – F (x)

Contoh 2.11

Misalkan S adalah ruang sampel dari tiga kali pengetosan sebuah mata uang seimbang, dan peubah acak X = banyak muka dengan S_x = {0, 1, 2, 3}

a). Tentukan f yaitu fkp dari X

b). Tentukan F : R → R, yaitu fungsi distribusi dari X

Penyelesaian

a). Berdasarkan contoh 2.2, maka fkp dari X adalah :

$$f(x)=P(X,x) = \begin{cases} \\ \dfrac{1}{8} n = 0,2 \\ \hline \dfrac{3}{8} .x = 1,2 \\ 0, xlainnya \end{cases}$$

b). Karena X : S → R adalah peubah acak diskrit, maka F (x) = P(X ≤ x) = $\sum_{t<x} f(t)$

Misal untuk x = 0 ⇒ F (0) = P(X ≤ 0) $\sum_{t<x} f(t)$ = f(0) $\sum_{t<x} f(t) = \dfrac{1}{8}$

untuk x = 0, 6 ⇒ F (0, 6) = P(X ≤ 0, 6) = $\sum_{t<x} f(t)$ = $\sum_{t<x} f(t) + f(10)$

untuk x = 1 $\Rightarrow$ F (1) = P(X $\leq$ 1) = $\sum_{t<x} f(t)$ = f (1) + $\sum_{t<x} f(t) + f(10) +$

$\sum_{t<x} f(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$

untuk x = 2 $\Rightarrow$ F (2) = P(X $\leq$ 2) = $\sum_{t<x} f(t)$ = f(2) $\sum_{t<x} f(t)$ f(1)

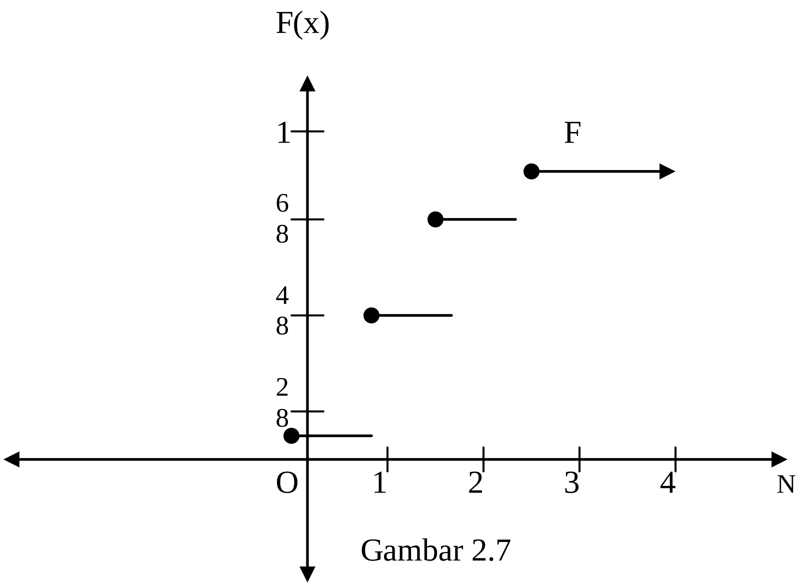
$\sum_{0<1<1} f(t) + f(10) + \sum_{1<0} f(t) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

untuk x = 3 $\Rightarrow$ F (3) = P (X $\leq$ 3) = $\sum_{1<3} f(t)$ = f (3) $-$ f (2) $-$ f (1) +

f (0) = 1

$$\text{Jadi F (x)} = \begin{cases} 0; x < 0 \\ \frac{1}{8}; 0 < y < 1 \\ \frac{4}{8}, 1 < x < 2 \\ \frac{7}{8}, 2 < x < 3 \\ 1, x > 3 \end{cases}$$

Grafik dari F seperti tangga, tidak turun (F fungsi tangga) seperti disajikan dalam gambar 2.7



Gambar 2.7

Contoh 2.12

Misal peubah acak X dengan fkp g (x) = $\begin{cases} \frac{3}{8} x2,0; x,2 \\ 0, x, lainnya \end{cases}$

a). Tentukan G : R→ R yaitu fungsi distribusi dari X

b). Tentukan G : R→ R yaitu komplemen dari X

Penyelesaian

a). Jelas X adalah peubah acak kontinu, maka G (x) = P[X ≤ x] = $\int_{-z}^{x}$ g (t) dt.

Karena daerah definisi dari g terbagi dalam 3 himpunan bagian dari R yaitu saling lepas (3 partisi dari R) yakni x ≤ 0, 0 <x <2 dan x ≥ 2, maka kita akan cari rumus G untuk nilai x pada masing-masing partisi.

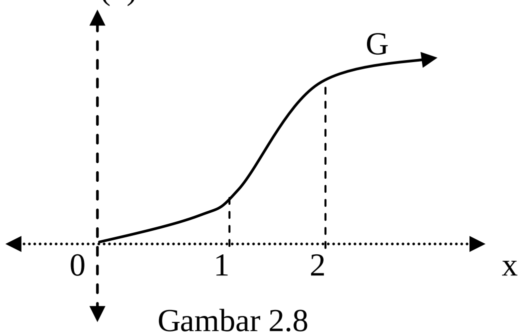
Untuk x ≤ 0 ⇒ G (x) = $\int_{-z}^{x} 0dt=0$

Untuk 0 < x < 2 ⇒ G (x) = $\int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{3}{8} t^2 dt = \frac{1}{8} t^3 \Big]_0^x = \frac{1}{8} x^3$

Untuk x ≥ 2 ⇒ G (x) = $\int_{(t)}^{0} 0dt + \int_{0}^{2} \frac{3}{8} dt^2 ' + \int_{2}^{0} 0dt + \frac{1}{8} x^3 \Big]_0^2 = 1$

Jadi G (x) = $\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{1}{8} x^3, 0 < x < 2 \\ 1 x \ge 2 \end{cases}$

Grafik G tidak turun dan kontinu dimana-mana, seperti yang disajikan dalam gambar 2.8



Gambar 2.8

b). Ğ = 1 – G (x) = $\begin{cases} 1.x \leq 0 \\ 1-\frac{1}{8}x^3, 0 < x < z \\ 0, x \geq 2 \end{cases}$

Sifat-sifat (fungsi distribusi)

Jika F : R $\rightarrow$ R fungsi distribusi dari X, maka

1). Range F = [0, 1]

2). F tak turun

3). F kontinu kanan

4). F (∞) = $\underset{x \longrightarrow \infty}{Iim}$ F (x) = 1, dan F (-∞) = $\underset{x \longrightarrow -\infty}{Iim}$ F (x) = 0

Khusus untuk X peubah acak kontinu, maka sifat (3) F kontinu. Silahkan anda buktikan 4 sifat untuk fungsi distribusi tersebut.

Sifat

Jika F : R $\rightarrow$ R fungsi distribusi dari X, maka :

1). P(X = a$^+$) = F (a$^-$) = . F (x) $\underset{x \longrightarrow a^+}{Iim}$ F (x) - $\underset{x \longrightarrow a^-}{Iim}$ F (x)

2). P[a < x $\leq$ b] = F (b) – F (a)

Sifat

1). Jika f dan F berturut-turut adalah fkp dengan fd dari peubah acak <u>kontinu X</u>,

maka f ^{1}(x)= $\frac{dF(x)}{dx}$ (jika turunannya ada)

2). Jika f dan F berturut-turut adalah fkp dan fd dari peubah acak diskrit X

dengan f (x) = {x_1, x_2 ……, x_n)

Maka f (x) = P(X = x) = $\begin{cases} F(x^+) - F(x^t) tx \in S_X \\ 0, xlainnya \end{cases}$

Contoh 2.13

Diketahui peubah acak diskrit X dengan fd

$$F(x) = \begin{cases} 0; x < 1 \\ \frac{1}{15}; 1 \le x < 2 \\ \frac{3}{15}; 2 \le x < 3 \\ \frac{6}{15}; 3 \le x < 4 \\ \frac{10}{15}; 4 \le x < 5 \\ 1; x \ge 5 \end{cases}$$

a). Hitung P[X = 3], P[X = $2\frac{1}{2}$] dan P[$1\frac{1}{2} \le X \le 4$]

b). Tentukan f (x) yaitu fkp dari X

c). Tentukan F (x) yaitu komplemen dari F

Penyelesaian

a). $P[X = 3] = F(3^+) = \underset{x \to 3^+}{Iim} F(x) \; \underset{x \to 3^-}{Iim} F(x) = \frac{6}{15} - \frac{3}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

$P[X = 2\frac{1}{2}] = F(2\frac{1}{2}^+) - F(2\frac{1}{2}^-) = \underset{x \to 2\frac{1}{2}^+}{Iim} F(x) - \underset{x \to 2\frac{1}{2}^-}{Iim} F(x)$

$= \frac{3}{15} - \frac{3}{15} = 0$

$P[1\frac{1}{2} \le X < 4] = P[X = 1\frac{1}{2}] + P[1\frac{1}{2} < X \le 4] - P[X = 4]$

$= F(1\frac{1}{2}^+) - F(1\frac{1}{2}^-) + 4(4) - F(1\frac{1}{2}) - F(4^+) + F(4^-)$

$= \frac{1}{15} - \frac{1}{15} + \frac{10}{15} - \frac{1}{15} - \frac{10}{15} + \frac{6}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

b). Berdasarkan rumus dari F (x) dapat diketahui, bahwa Sx – {1, 2, 3, 4, 5}

Untuk x = 1 $\Rightarrow P[X = 1] = F(1^+) - F(1^-) = \frac{1}{15} - 0 = \frac{1}{15}$

Untuk x = 2$\Rightarrow$ P[X = 2] = F (2^+) – F(2^-) = $\frac{3}{15}-\frac{1}{15}=\frac{2}{15}$

Untuk x = 3$\Rightarrow$ P[X = 3] = F (3^+) – F(3^-) = $\frac{6}{15}-\frac{3}{15}=\frac{3}{15}$

Untuk x = 4$\Rightarrow$ P[X = 4] = F (4^+) – F(4^-) = $\frac{10}{15}-\frac{6}{15}=\frac{4}{15}$

Untuk x = 5$\Rightarrow$ P[X = 5] = F (5^+) – F(5^-) = 1- $\frac{10}{15}=\frac{5}{15}$

Untuk x > 5$\Rightarrow$ P[X = x] = F (x^+) – F(x^+) = 1- 1 = 0

Untuk x < 1$\Rightarrow$ P[X = x] = F (x^+) – F(x^{+-}) = 0 – 0 = 0

Jadi

$$f(x) = P[X = x] = \begin{cases} \frac{x}{15}; x = 1,2,3,4,5 \\ 0; xlainnya \end{cases}$$

$$\text{c). } F(x) = P[X = x] = 1 - F(x) = \begin{cases} 1; x < 1 \\ \frac{14}{15}; 1 \le x < 2 \\ \frac{12}{15}; 2 \le x < 3 \\ \frac{9}{15}; 3 \le x < 4 \\ \frac{5}{15}; 4 \le x < 5 \\ 0; x > 5 \end{cases}$$

Contoh 2.14

Misalkan peubah acak kontinu X mempunyai fungsi distribusi

$$G(x) = \begin{cases} 0; x \le o \\ 1 - e^{2x}; x > 0 \end{cases}$$

a). Hitung P[- 1 < x < 1], dan P[X = 5]

b). Tentukan g (x) yaitu fkp dari X

c). Tentukan G (x) yaitu komplemen dari fungsi distribusi G dan dengan menggunakan ini, hitung P[X > 5]

Penyelesaian

a). P[-1 < x <1]= P [-1 < x ≤ 1] G (1) = G (-1) = - 0 $\quad 1 - \frac{1}{_e2} < 0$, S65

P[X = x 5] = G (5$^-$) = (1 – e^{-10}) – (1 – e-^{10}) = o

b). g (x) = G (x) $\frac{dG(x)}{dx}$

Untuk x ≤ 0 ⇒ g (x) = $\frac{d(0)}{dx} = 0$

Untuk x ≥ 0 ⇒ g (x) = $\frac{d(1-e^{-2x})}{dx} = 2e^{-2x}$

Jadi g (x) = $\begin{cases} 2e^{-2x}.x > 0 \\ 0.x \leq 0 \end{cases}$

c). Untuk x ≤ 0 ⇒ G (x) = 1- G (x) = 1 – 0

Untuk x ≥ 0 ⇒ Ğ (x) = 1- G (x) = 1 – (1-2-^{2x}) = e^{2x}

Jadi Ğ(x) = .$\begin{cases} 1, x \leq 0 \\ e^{-2x}, x > o \end{cases}$

Dan O [X > 5] = Ğ (5) = e^{-10} = 0 = 0,00005

2.7. Kebebasan Stokastik

Pada Bab 1 kita telah mempelajari dua peristiwa yang bergantungan (dependent), dan dua peristiwa yang saling bebas (independent). Untuk mengingatkan ana bahwa A dan B adalah peristiwa saling bebas, jika P(A ∩ B) = P(A). P(B) dan P(A/B) = P(A), dan P(B). maksud bebas disini adalah bebas dalam peluang atau bebas stokastik dengan kata lain peluang terjadinya peristiwa yang satu untuk mempengaruhi peluang terjadinya peristiwa yang lain. Untuk dua peubah acak kita perlu mengetahui konsep atau aturan dua peubah acak yang saling bebas. Hal ini sangat perlu kita ketahui sebab sangat berguna terutama untuk statistik ”inferensial dan statistik” lanjutan.

Definisi

Misalkan peubah acak X dan Y mempunyai, fkp bersama f (x, y) dengan fkp marjinalnya, f_x (x), x € S_x dan f_y (y), y € S_y peubah acak X dan Y dikatakan saling bebas (bebas stokastik) jika f $_x$(x), f_y (y), $\forall$ (x, y) € S_x (x) $\otimes$ S.

Catatan

Syarat perlu untuk dua peubah acak salinr bebas, adalah fkp bersamanya terdefinisi pada produk cartesius dari kedua rangenya (ruangnya). Dapat ditunjukkan bahwa dua peubah acak saling bebas apabila fkp bersyarat sama dengan fkp marjinalnya yakni f (x/y) = f_x (x) = dan f (y/x) = f_y (y). Juga dapat dibuktikan bahwa jika fkp bersamanya merupakan perkalian dua faktor tak negatif, dengan masing-masing faktor mempunyai bentuk dalam x saja atau y saja, maka X dan Y saling bebas.

Contoh 2.15

Periksa apakah pasangan oeubah acak berikut saling bebas ?

1). X, Y dengan fkp bersama f (x, y) = $\begin{cases} \dfrac{x+y}{21}, x = 1,2,3; v = 1,2 \\ 0, x, y, lainnya \end{cases}$

2). X, Z dengan fkp bersama g (x, z) = $\begin{cases} \dfrac{4}{135}, xz; 1 < x < 4, 0 < z < 3 \\ 0, x, z, lainnya \end{cases}$

3). Y, Z dengan fkp bersama g (y, z) = $\begin{cases} 2; 0 < y < z < 1 \\ 0; y, z.lainnya \end{cases}$

Penyelesaian

1). Berdasarkan contoh 2.7 diperoleh f_x (x) = $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{21} : x = 1,2,3, \\ 0, xlainnya \end{cases}$

dan f_y (y) = $\begin{cases} \dfrac{y+2}{7}; y = 1,2 \\ 0, ylainnya \end{cases}$

Dalam hal ini S_x {1, 2, 3} dan S_y {1, 2} dan f (x, y)terdefinisi pada $S_x \otimes S_y$

Karena ada (1, 1) $\in$ S_x $\otimes$ S_y, sedemikian sehingga f (1, 2)

$= \frac{2}{21} \neq \frac{5}{21}.\frac{3}{7}$ = f_x (1), f_y (1), maka peubah acak X dan Y tidak bebas stokastik

2). Berdasarkan contoh 2.8 diperoleh g_x (x) = $\begin{cases} \frac{2}{15} x.1 < x < 4, dan \\ o, xlainnya \end{cases}$

g_z (z) = $\begin{cases} \frac{2}{9} z, 0 < z < 3 \\ 0, zlainnya \end{cases}$

Dalam hal ini S_x = (1, 4) dan Sz = (0, 3) dan g (x, z) terdefinisi pada $S_x \otimes S_z$

Karena g (x, z) = $\frac{4}{135} - xz = \frac{2}{15} x.\frac{2}{9} z$ = g_x (x) , g_z (z), $\forall$ (x, z) $\in S_x \otimes$ S_z, maka peubah acak X dan Z saling bebas stokstik

3). Karena h (y, z) tak terdefinisi pada $S_y \otimes S_z$, maka peubah acak Y dan Z tidak bebas stokastik

2.8 Soal-soal Latihan

1. Tiga mata uang homogen bersisi B dan M ditos sekaligus. Jika S ruang sampel dari eksperimen ini X : S $\rightarrow$ R sebuah relasi dengan X ≡ ”banyaknya muka ”
   a. Periksa apakah X sebuah peubah acak pada S ?
   b. Tentukan S_x yaitu ruang range
   c. Apakah X peubah acak diskrit atau peubah acak kontinu ?
   d. Tentukan distribusi dari X
2. Ambil ruang sampel S pada soal nomor 1, jika p, a X ≡ ”banyaknya muka ”dan p, a Y ≡ ”selisih banyaknya muka dan belakang”
   a. Tentukan S_{xy}, yaitu range atau ruang gabungan (bersama) dari X dan Y
   b. Tentukan distribusi bersama dari X dan Y
3. Misal S adalah ruang sampel pengetosan, dua dadu jujur sekaligus. Jika p, a X : S $\rightarrow$ R dan p, a Y : S $\rightarrow$ R dengan X ≡ “jumlah pasangan angka dadu” dan Y ≡ ”selisih (beda) positif dari pasangan angka dadu”

a. Tentukan S_x, S_y, dan S_{xy}

b. Jika fungsi

f : R = $S_x \cup \; S_x^c \rightarrow$ R dengan f (x) = P_x (X – x) = $P[X^{-1}(x)]$

dan f (x) = 0, $\forall$ €. S_x^c Tentukan : rumus f, apak f sebuah fkp dari X.

c. Dengan prosedur seperti (b) tentukan fkp dari Y

d. Hitung $P[(x, y) = (12, 0)]$, $P[(x, y) = (12, 5)]$, dan $P[(x, y) = (4, 2)]$

4. Periksa, apakah fungsi-fungsi pada R berikut merupakan fkp dan p, a yang bersangkutan atau bukan !

a. f (x) = $\begin{cases} \frac{2x}{15}; z = 1,2,3,4,5 \\ 0, xlainnya \end{cases}$ c. g_z (z) = $\begin{cases} 1; y = 0 \\ 0, ylainnya \end{cases}$

b. h (x) = $\begin{matrix} \frac{1}{8}x^2; 0 < x < 5 \\ 0, xlainnya \end{matrix}$ d. I (z)= $\begin{cases} \frac{1}{3}; 2 < z < 5 \\ 0, zlainnya \end{cases}$

5. Ditentukan fungsi f : R $\rightarrow$ R dengan f (x) = $\begin{cases} k(\frac{1}{3})^x; x = 1,2,3,.. \\ 0, xlainnya \end{cases}$

a. Tentukan k agar f sebagai fkp dari p, a X.

b. Hitung P[0 ≤ x < 3]

6. Fungsi g : R $\rightarrow$ R didefinisikan dengan g (x) = $\begin{cases} x; 0 < x \le 1 \\ 2 - x; 1 < x < p \\ 0; xlainnya \end{cases}$

a. Tentukan P agar g sebagai fkp dari x

b. Tentukan G (x), yaitu fungsi distribusi dari X

c. Hitung P[$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$] dengan menggunakan g, dan G.

Bandingkan hasilnya

7. Fungsi F_n : R $\rightarrow$ R didefinisikan dengan f_n (x) = $\begin{cases} 2(1-\frac{2x}{n})^{n-1}; 0 < x < \frac{n}{2} \\ 0; xlainnya \end{cases}$

a. Buktikan, $\forall$n $\in$ N, f_n adalah fkp dari x

b. Buktikan bahwa fungsi distribusi dari X adalah

F_n(x) = $\begin{cases} 0; x \leq 0 \\ 1-\left(1-\frac{2x}{n}\right)^n; 0 < x < \frac{n}{2} \\ 1; x \geq \frac{n}{2} \end{cases}$

8. Diketahui fungsi f : $R^2 \rightarrow$ R dengan f (x, y) = $\begin{cases} k(x+2y); x, y = 0,1,2,3,\ldots \\ 0; x, ylainnya \end{cases}$

a. Tentukan k agar f merupakan fkp bersama dari X dan Y

b. Hitung P[X = 2, Y = 1], dan P[X ≥ 2, Y ≤ 2]

9. Ditentukan fungsi f : $R^2 \rightarrow$ R dengan f (x, y) = $\begin{cases} kxy; 0 < x, y < 1 \\ 0; x, ylainnya \end{cases}$

a. Tentukan k agar f merupakan fkp bersama dari X dan Y

b. Hitung P[0 < x < $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ < y < 2], P[x = y], P[x ≤ y]

10. Diketahui fungsi f : $R^3 \rightarrow$ R dengan f (x, y, z) = $\begin{cases} x(y+kz); 0 < x, y, z < 1 \\ 0; x, y, zlainnya \end{cases}$

a. Tentukan k agar f merupakan fkp bersama dari X, Y dan Z

b. Hitung P[0 < x < $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ < y ≤ 1, $\frac{3}{4} < z < \frac{3}{2}$], dan P[x < 2y, 0 < z < $\frac{1}{2}$]

11. Misalkan fkp dari p, a X adalah f (x) = $\begin{cases} \frac{3}{26}x^2, 1 < x < 3 \\ 0, xlainnya \end{cases}$

a. Gambar grafik dari P

b. Hitung P[2 < x < 4], dan P[-2 < x < 2]

c. Tentukan konstanta k agar P[X ≤ k] = P[X ≥ k]

Catatan : k dinamakn median dari X.

12. Misalkan fkp dari p, a W adalah g(w) = $\begin{cases} 9w^2 - 2, 0 < w < 1 \\ 0; wlainnya \end{cases}$

a. Tentukan fungsi distribusi dari W (=G), dan komplemennya (G).

b. Sketsa grafik G dan Ĝ dalam satu sumbu koordinat.

c. Hitung P[0 ≤ W ≤ 0, 5]

d. Tentukan m agar P[W ≤ m] = 0, 5 (m median dari W)

13. Misalkan fungsi distribusi dari p, a X adalah

F (x) = 0 : x < 1

$= \frac{1}{3}$; 1 ≤ x < 3

$= \frac{1}{2}$; 3 ≤ x < 6

$= \frac{7}{8}$; 7 ≤ x < 10

= 1 ; 10 ≤ x < 15

a. Sketsa grafik F

b. Hitung *P*[x = 6] P[x = $6\frac{1}{2}$], dan P[2 < x < 7]

c. Tentukan fkp dari X

14. Peubah acak X memiliki fkp f (x) = $\begin{cases} \frac{1}{x^2}, 1 < x < \infty \\ 0, xlainnya \end{cases}$

Jika A = {x | 1 < x < 4} dan B = {3 < x < 6}, hitung P(A), P(B), P(A ∩ B), dan P(A ∪ B)

15. Misalkan fkp gabungan dari X dan Y adalah :

f (x, y) = $\begin{cases} \frac{x+2y}{18}; (x,y) = (1,1),(2,1),(2,2) \\ 0,(x,y)lainnya \end{cases}$

a. Tentukan fkp marjinal dari X

b. Tentukan fkp marjinal dari Y

c. Tentukan fkp bersyarat dari X jika diketahui Y = y

d. Hitung P[X/y = 2], P[X = 2/y = 2], P[X = 2] dan P[Y = 2]

16. Misalkan *f (x, y)* = $\begin{cases} 21x^2y^3; 0 < x < y < 1 \\ 0; x, ylainnya \end{cases}$ adalah fkp bersama dari X dan y

a. Tentukan fkp marginal dari X dan f,k,p marginal dari Y

b. Tentukan f,k,p bersyarat dari *X* jika diketahui *Y* = *y*, dan f,k,p bersyarat dari Y jika diketahui *X* = *x*

c. Hitung P [0 < x < 0, 4 / y = 0, 3] ; P[Y > ½ / x = 0, 2], P[Y > ½], dan P[0 < x < 0, 4]

17. Peubah acak Y dan Z memiliki f, k, P bersama

g (y, z) = $\begin{cases} 24(1 - z - y); z > 0, y > 0, z + y < 1 \\ 0; y, zlainnya \end{cases}$

a. Tentukan f, k, P marginal dari Z

b. Tentukan fkp bersyarat dari Y jika diketahui Z = z

c. Hitung *P*[o < y < 0, 5 / z = 0, 5]

d. Hitung *P*[0 < z < 0, 5, 0 < y < 0,5], *P*[0 < z < 0, 5], dan P[0 < y < 0, 5]

18. Jika X dan Y memiliki f, k, *P*bersama

g (x, y) = $\begin{cases} x + y; 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0; x, ylainnya \end{cases}$

Periksa apakah X dan Y bebas stokastik ?

1. Jika f, k, *P*bersama dari U dan V adalah

g (u, v) = $\begin{cases} 12uvy(1 - v); 0 < u, v < 1 \\ 0; u, vlainnya \end{cases}$

a. Temukan f, k, P marginal dari U dan f, k, P marginal dari V

b. Periksa apakah U dan V bebas stokastik ?

c. Periksa apakah *P*[0 < u - 0, 5, v – 0, 5] = 0 < u < 0, 5] ?

d. Periksa apakah *P*[0 < u < 0, 5, 0 < v < 0, 5] = *P*[0 < u < 0, 5] x

P[0 < v < 0, 5] ?

2. Misalkan f dan F masing-masing adalah f, k, *P*dan f, d bersama dari p, a X_1, X_2 ....., X_n, dengan F (x_1, x_2, ...x_n) = *P*[$X_1 \leq x_1$, $X_2 \leq x_2$ ......$X_n \leq x_n$]

   Jika n, p, a tersebut kontinu maka

   $\frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots . x_n}{\partial x_1, \partial x_2, \ldots \partial x_n}$ = f (x_1, x_2, ...x_n)

   Dengan menggunakan konsep ini

   Tentukan fungsi distribusi bersama dari x, y, z, jika f, k, P bersamanya

   $$f\,(x, y, z) = \begin{cases} e^{-(x+y+z)}; 0 < x, y, z < \infty \\ 0; x, y, z lainnya \end{cases}$$

   Periksa, apakah $\frac{\partial^y F(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z} = f\,(x, y, z)$