BAB V
BEBERAPA MODEL DISTRIBUSI PELUANG PEUBAH ACAK KONTINU

Pada bab sebelumnya, khususnya pada BAB II kita telah mengenal distribusi peluang secara umum baik untuk peubah acak diskrit maupun peubah acak kontinu. Pada bab IV kita telah mempelajari beberapa model distribusi peluang khususnya untuk peubah acak diskrit beserta karakteristiknya. Pada bab ini kita akan mempelajari beberapa model distribusi peluang untuk peubah acak kontinu, antaranya adalah model distribusi peluang seragam, gamma, beta, normal dan lain-lain. Model-model distribusi khusus ini sering digunakan dalam statistika terapan, cabang statistika lainnya dan sebagai prasayarat untuk mempelajari statistika matematika lanjutan (inferensial). Beberapa fenomena alam yang distribusinya bias didekati oleh model-model distribusi peluang khusus peubah acak kontinu, contohnya antara lain waktu tunggu dengan persyaratan tertentu adalah berdistribusi gamma, dan waktu terjadinya gempa di alam ini dapat didekati oleh distribusi peluang eksponensial (gamma khusus). Pembicaraan distribusi peluang khusus kontinu dalam bab ini lebih ditekankan pada pengenalan teori dan karakteristik dari masing-masing model, jadi bukan pada terapan atau asal-usulnya.

5.1 Distribusi Seragam

Nilai-nilai dari peubah acak X yang berdistribusi ini adalah berupa sebuah intervai buka (α, β), berarti rangenya adalah S_x = (α, β) = {x/α < x < β }, fkp-nya bernilai sama (seragam) pada interval ini.

Definisi:

Peubah acak X berdistribusi seragam atau berdistribusi uniform pada interval buka (α, β) dan dinamakan peubah acak uniform, jika fkp-nya berbentuk:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, \alpha < x\beta \\ 0, \text{ x lainnya} \end{cases}$$

Catatan:

Peubah acak X berdistribusi seragam pada (α, β) ditulis dengan X : $\cup$ (α, β) .

Teorama:

Jika X : $\cup$ (α, β) maka rerata, varians dan fpm-nya dari X adalah:

(1) $\mu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ (2) $\sigma^2 = \frac{1}{12}(\alpha - \beta)^2$ (3) $M_x(t) = \frac{e^{t\beta} - e^{t\alpha}}{t(\beta - \alpha)}, t$

Bukti:

(1) $\mu = E[X] = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\alpha - \beta} x dx = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

(2) $\sigma^2 = E\left[X^2\right] - E^2\left[X\right]$, dengan $E^2\left[X\right] = \frac{1}{4}(\alpha + \beta)^2$, dan $F\left[X^2\right] = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\alpha - \beta} x^2 dx$

$\frac{1}{3(\beta - \alpha)}\left[x^3\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{3}(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2)$, maka

$\sigma^2 = \frac{1}{3}(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) - \frac{1}{4}(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) =$

$\frac{1}{12}(\alpha - \beta)$

(3) $M_{x(t)} = E\left[e^{eY}\right] = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\beta - \alpha} e^{eY} dx = \frac{1}{E(\beta - \alpha)}\left[e^{eX}\right]_\alpha^\beta = \frac{e^{t\beta} - e^{t\alpha}}{t(\beta - \alpha)}$

Contoh 5.1

Diketahui X : $\bigcup(5.2)$.

a) Tentukan Fkp, fd dan fpm dari X.

b) Hitung rerata, varians dan simpangan baku dari X.

Penyelesaian:

a) Dalam hal ini α = -5, β = 2, maka Fkp dari X adalah f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{7}, -5 < x < 2 \\ \text{o, x lainnya} \end{cases}$

Misalkan F fungsi distribusi dari X, maka F(x) = P[X≤x] = $\int_{-x}^{x} f(t)di$

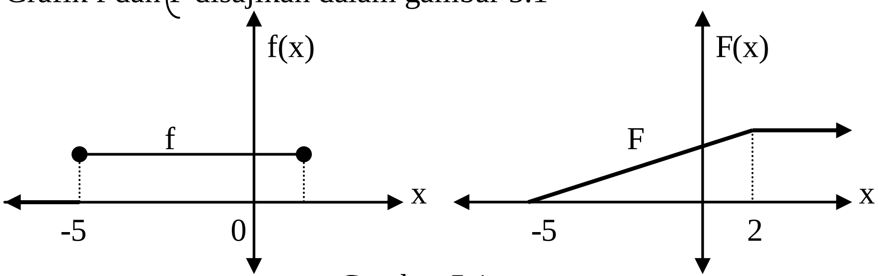
Untuk x < -5 ⇒ F(x) = $\int_{-x}^{-5} 0dt = 0$

Untuk –5 < x < 2 ⇒ F(x) = $\int_{-x}^{-5} 0dt + \int_{-5}^{x} \frac{1}{7}dt = \frac{1}{7}\Big]_{-5}^{x} = \frac{1}{7}(x+5)$

Untuk x ≥ 2 ⇒ F(x) = $\int_{-x}^{-5} 0dt + \int_{-5}^{2} \frac{1}{7}dt + \int_{2}^{\infty} 0dt = 1$

Jadi F(x) = $\begin{cases} 0; x \le -5 \\ \frac{1}{7}(x+5); -5, x, 2 \\ 1; x \ge 2 \end{cases}$

Grafik f dan F disajikan dalam gambar 5.1



Gambar 5.1

Misalkan M_x dari X, maka:

$M_x(t)$ = E$\left[e^{2X}\right] = \frac{1}{7}\int_{-5}^{2} e^{2X} \quad dx = \frac{1}{7}e^{2X}\Big]_{-5}^{2} = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{7t}$

b) $\mu = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(-5+2) = \frac{-3}{2}$

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}(\alpha-\beta)^2 = \sigma^2 = \frac{1}{12}\_-5-2)^2 = \frac{49}{12} \text{ dan } \sigma = \frac{7}{\sqrt{12}}$$

5.2 Distribusi Gamma

Definisi:

Peubah acak X berdistribusi gamma dan dinamakan teubah acak gamma jika Fkp-nya berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta^a}} x^{a-1} e^{\frac{-x}{\beta}}, x > 0(\alpha, \beta > 0) \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

Catatan:

Fungsi Γ: $R^+ \to R$, dengan $\Gamma\alpha = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ dinamakan fungsi gamma, jika α bilangan bulat positif, maka $\Gamma\alpha = (\alpha-1)!$.Rumus rekursi fungsi gamma adalah $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma\alpha.$ Peubah acak x berdistribusi gamma dengan parameter α dan β ditulis X : G (α, β) .

Teorama:

Jika X : G(α, β) , maka rerata, varians dan fpm dari X adalah:

(1) $\mu = \alpha\beta$ (2) $\sigma^2 = \alpha\beta^2$ (3) $M_x(t) = (1-\beta t)^{-\alpha, 1 < -\frac{1}{\beta}}$

Bukti:

(1) $\mu = E[X] = \int_{-x}^{x} xf(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma\alpha\beta^\alpha} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx$

$$= \frac{1}{\Gamma\alpha\beta^\alpha}\int_0^x x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

Misalkan $\frac{x}{\beta} = y,$ maka x = βy dan dx = β dy dan karena 0 <x< ∞ , maka 0<y< ∞

Maka $\mu = \frac{1}{\Gamma\alpha\beta^{\alpha}} \int_{0}^{x} (\beta y)^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$

$= \frac{\beta}{\Gamma\alpha} \int_{o}^{x} y^{\alpha} e^{-y} dy$

$= \frac{\beta}{\Gamma\alpha} \Gamma(\alpha + 1)$

$= \frac{\beta}{\Gamma\alpha} \alpha - \sqrt{\alpha}$

$= \alpha\beta$

(2) Coba sendiri sebagai latihan.

(3) $M_x(t)$ = E $\left[e^{2X}\right] = \int_{0}^{x} e^{2X} - \frac{1}{\Gamma\alpha\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$

$= \frac{\Gamma}{\Gamma\alpha\beta^{\alpha}} \int_{0}^{x} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{1}{\beta}t\right)x} dx$

Misalkan $\left(\frac{1}{\beta} - t\right)x = y,$ maka x = $\frac{\beta y}{1-\beta t}$ dan dx = $\frac{\beta}{1-\beta t} - dy$

Sehingga:

$M_x(t)$ = $\frac{1}{\Gamma\alpha\beta^{\alpha}} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^{\alpha-1} y^{\alpha-1} e^{-y} - \frac{\beta}{1-\beta t} dy$

$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha\beta^{\alpha}} - \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}} \int_{0}^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$

$= \frac{1}{\Gamma\alpha(1-\beta t)^{\alpha}}$

= (1 - $\beta t)^{-\alpha}$, dengan 1 - $\beta t > 0$ atau t < $\frac{1}{\beta}$

Catatan:

Melalui fpm kita bias menentukan μ dari σ^{∞}. Silahkan anda coba sebagai latihan.

Contoh 5.2

Diketahui X : G(2.3).

a) Tentukan fkp dan fpm dari X.

b) Hitung rerata dan varians dari X.

c) Hitung ([X>3].

Penyelesaian:

a) Berdasarkan definisi dan dengan $\alpha = 2,\ \beta = 3,$ maka fkp dari X adalah:

$$\text{fx)} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma 2 3^2} x^{2-1} e^{-\frac{x}{3}}, x > 0 \\ 0, \text{ x } \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{fx)} = \begin{cases} \frac{1}{9} x e^{-\frac{x}{3}}, x > 0 \\ 0, \text{ x } \leq 0 \end{cases}$$

Berdasarkan teorema tentang fpm untuk peubah acak gamma dengan $\alpha = 2$ dan $\beta = 3,$ maka fpm dari X adalah:

b) $\mu = \alpha - \beta = 2 - 3 = 6$ dan $\sigma = \alpha\beta^2 = 2 - 3^2 = 18$

c) $\text{P}[X > 3] = 1 - P[X \leq 3],$ dengan

$$\text{P}[X \leq 3] = P[0 < X \leq 3] = \int_0^3 \frac{1}{9} x e^{-\frac{x}{3}} - \int_0^3 \frac{1}{9}(-3) x d\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 x d\left(e^{-\frac{x}{3}}\right) = -\frac{1}{3}\left[x e^{-\frac{x}{3}} - \int e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^3$$

$$= -\frac{1}{3}\left[x e^{-\frac{x}{3}} + 3e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^3$$

$$= -\frac{1}{3}\left[3e^{-1} + 3e^{-1} - 0 - 3e^0\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{6}{e} - 3\right]$$

$= 1 - \frac{2}{e}$

Maka $P[X > 3] = 1 - \left(1 - \frac{2}{e}\right) = \frac{2}{e} = 0,7358$

5.3 Distribusi Eksponensial

Definisi:

Peubah acak X berdistribusi Eksponensial dengan parameter θ dan dinamakan peubah acak eksponensial jika fkp-nya berbentuk:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{0}}, x > 0 (\theta > 0) \\ 0, \text{ x } \leq 0 \end{cases}$$

Catatan:

Pada kenyataannya distribusi eksponensial diperoleh dari peubah acak $G(\alpha, \beta)$ dengan parameter $\alpha = 1$ dan $\beta = \theta$. Jika X : Ekp (θ) adalah penulisan untuk peubah acak X berdistribusi eksponensial dengan parameter θ, maka berarti x : $G(1, \theta)$.

Teorama:

Jika X : Ekp $(\theta) = G(1, \theta)$, maka rerata, Varians dan fpm dari X adalah:

(1) $\mu = \theta$ (2) $\sigma^2 = \theta^2$ (3) $M_x(t) = (1 - \theta t)^{-1}, 1 < \frac{1}{\theta}$

Bukti:

Karena X : Ekp$(\theta) = G(1, \theta)$, maka kita bias menggunakan karakteristik distribusi gamma (dengan $\alpha = 1$ dan $\beta = \theta$)

Sehingga:

(1) $\mu = \alpha\beta = 1.\theta = \theta$ (2) $\sigma^2 = \alpha\beta^2 = 1.\theta^2 = \theta^2$

(3) $Mx(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha} = (1 - \theta t)^{-1}$

Contoh 5.3

Diketahui X : Exp$\left(\frac{1}{2}\right)$.

a) Tentukan fkp, fpm dan f.d dari X.

b) Sektsa grafik fkp dan grafik f.d secara terpisah.

c) Hitung rerata, varians dan P$\left[-2 < X \le \frac{1}{2}\right]$.

Penyelesaian:

a) X : Exp$\left[\frac{1}{2}\right]$berarti parameter $\theta = \frac{1}{2}$, maka fk:

fx) = $\begin{cases} 2e^{-2x}, x > 0 \\ 0, \text{ x } \le 0 \end{cases}$

dan fpm $M_X(t)$ = $\left(1 - \frac{1}{2}t\right)^{-1}$

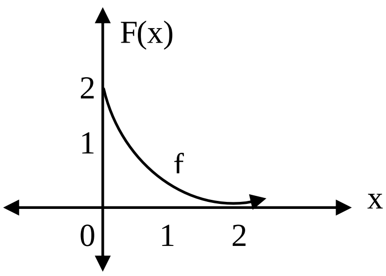
Misal F fungsi distribusi dari X, maka F(x) = P$\left[X \le x\right] = \int_{-x}^{x} f(t)dt$.

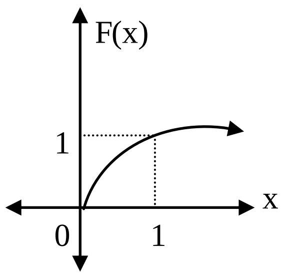
Untuk x $\le 0 \Rightarrow$ F(x) = $\int_{-\infty}^{\infty} 0dt = 0$

Untuk x > 0 $\Rightarrow$ F(x) = $\int_{-x}^{x} 0dt + \int_{0}^{y} 2e^{-2t}dt = -e^{-2t}\int_{0}^{x} 1 - e^{-2x}$

Jadi, F(x) = $\begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1\text{-e}^{-2x}, x>0 \end{cases}$

b) Sketsa grafik fkp f dan fungsi distribusi F ditunjukan pada gambar 5.2.





c) Karena X : Exp$\left(\frac{1}{2}\right)$, maka $\mu = \frac{1}{2}$ dan $\sigma^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ P$\left[-2 < X \le \frac{1}{2}\right]$

$$\int_{-2}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{-2}^{0} 0dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$= 1 - e^{-1} = 0{,}6322$

atau dengan menggunakan fungsi distribusi F diperoleh:

P$\left[-2 < X \le \frac{1}{2}\right] = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(-2) = 1 - e^{-1} - 0 = 0{,}6322$].

5.4 Distribusi Chi-Kuadrat

Distribusi Chi-Kuadrat adalah juga hal khusus dari distribusi gamma G(α, β), dengan $\alpha = \frac{1}{2}v, v$ bilangan bulat posistif dan $\beta = 2$.

Definisi:

Peubah acak X berdistribusi chi kuadrat dan dinamakan peubah acak chi-kuadrat jika fkp-nya berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{v}{2}}2^{\frac{v}{2}}} x^{\frac{(v-2)}{2}} e^{-\frac{3}{2}}, x > 0 (v = 1,2,3,\ldots) \\ 0, \text{ x } \le 0 \end{cases}$$

Catatan:

v adalah parameter dari peubah acak chi kuadrat dan dinamakan *derajat bebas* atau *derajat kebebasan*. Peubah acak X berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan ditulis X : X^2_{Av}

Teorama:

Jika X : $\text{X}^2_{(v)}$, maka rerata, varians dan fpm dari X adalah:

(1) $\mu = v$ (2) $\sigma^2 = 2v$ (3) Mx(t) = (1-2t)$\frac{v}{2}$, $t < \frac{1}{2}$

Bukti:

Karena X : $X^2_{(v)} \Leftrightarrow X : G\left(\frac{1}{2}v,2\right)$, maka

(1) $\mu = \alpha\beta = \left(\frac{1}{2}v\right).2 = v$

(2) $\sigma^2 \alpha\beta^2 = \left(\frac{1}{2}v\right).2^2 = 2v$

(3) $M_x(t) = (1-\beta t)^{-\alpha} = (1-2t)^{-\frac{v}{2}}, t < \frac{1}{2}$

Contoh 5.4

Diketahui X : $X^2_{(4)}$.

a) Tentukan fkp dan fpm dari X.
b) Hitung rerata dan varians X.
c) Sketsa grafik fkp X.
d) Hitung P[0<X,9,5] secara matematis (kalkulus) dan dengan menggunakan table distribusi chi-kuadrat.
e) P[X<x] = 0,0025. Tentukan nilai x secara matematis dan secara table!

Penyelesaian:

a) X : $X^2_{(4)}$ atau X : G(2,2), maka fkp dari X adalah;

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{4}{2}}.2^{\frac{4}{2}}} x^{\frac{(4-2)}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \\ 0, \ x \le 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \\ 0, \ x \le 0 \end{cases}$$

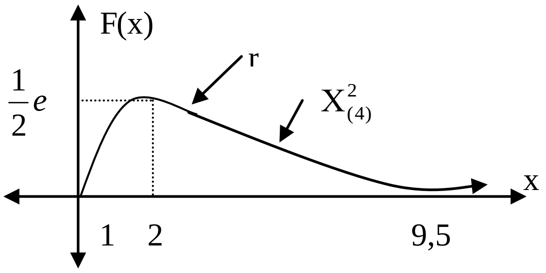
Sedangkan fpm-nya adalah:

$M_x(t) = (1 - 2t)^{\frac{4}{2}} = (1-2t)^{-2}$

b) $\mu = v = 4$ dan $\sigma^2 = 2v = 8$

c) Pembuat maksimum dari f diperoleh dengan cara:

f(x) = $\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{8}xe^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}x\right) = 0 \Rightarrow x = 2,$ dan puncak dari kurva f adalah: $\left(2, \frac{1}{2}e^{-1}\right)$sketsa grafik disajikan pada gambar 5.3.



Gambar 5.3

d) Secara matematis:

$$P\left[0 < X < 9{,}5\right] = \int_0^{9,5} \frac{1}{4}xe^{\frac{x}{2}}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{9,5} xa\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[xe^{-\frac{x}{2}} - \int e^{-\frac{x}{2}}dx\right]_0^{9,5} = -\frac{1}{2}\left[xe^{-\frac{x}{2}} + 2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{9,5}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[9{,}5e^{-4,75} - 2\right] \approx 0{,}95$$

Dengan table distribusi chi-kuadrat versi pertama, yaitu $P[X \le x] = F[0 < X < x],$ dan dalam soal ini x = 9,5. Langkahnya adalah sebagai berikut lihat kolom pertama untuk derajat kebebasan yaitu v = 4 dari 4 ke kanan tentukan angka 9bilangan) 9,5 karena tidak ada, maka diambil pendekatannya yaitu 9,49. Dari sini lihat ke atas yaitu ke judul baris peluang. Ternyata menunjukkan bilangan 0,95. Ini menunjukkan bahwa P[0,x<9,5] = 0,95.

e) Secara matematis:

$$\mathrm{P}\left[X \le x\right] = P\left[0 < X < x\right] = \int_0^x \frac{1}{4} t e^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2}\left[t e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{-\frac{1}{2}} \right]_0^x$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{-\frac{x}{2}} - 2 \right] = 0{,}005$$

$$\Rightarrow x e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{-\frac{x}{2}} = 1{,}95 \Rightarrow \frac{x+2}{1{,}95} e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow x = 0{,}48$$

Dengan table distribusi chi-kuadrat versi pertama, untuk v = 4 dan pualng 0,025 diperoleh x = 0,484.

5.5 Distribusi Beta

Definisi:

Peubah acak X berdistribusi beta dan dinamakan peubah acak jika fkp-nya berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma\alpha.\Gamma\beta} . x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}, 0 < x < 1 (\alpha, \beta > 0) \\ 0 \text{ ; x lainnya} \end{cases}$$

Catatan:

α dan β adalah parameter-parameter untuk distribusi beta, jika $\alpha = \beta = 1$.

Maka distribusi beta berupa peubah uniform X : $\bigcup(0,1)$

Teorama:

Jika peubah acak X berdistribusi beta dengan parameter α dan β, maka rerata dan variansnya adalah:

(1) $\mu = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ (2) $\sigma^2 = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

Silahkan anda buktikan teorama ini, dengan petunjuk gunakan fungsi beta, yaitu:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-a)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Contoh 5.5

Jika X peubah acak berdistribusi beta dengan parameter $\alpha = 1$ dan $\beta = 4$, maka hitung:

a) Rerata X b) $\Gamma\left[X \geq \frac{1}{4}\right]$

Penyelesaian:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma 5}{\Gamma 1.\Gamma 4} x^{1-1}(1-x)^{4-1}; 0 < x < 1 \\ 0; \text{ x lainnya} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4(1-x)^3 \ ; 0<x<1 \\ 0 \ ; \text{ x lainnya} \end{cases}$$

a) $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 4x(1-x)^3 dx$

$$= 4\int_0^1 x^{2-1}(1-x)^{4-1}dx = 4\frac{\Gamma 2.\Gamma 4}{\Gamma(2+4)} = 4.\frac{1!3!}{5!} = 4.\frac{1}{20} = 0{,}2$$

Bila dengan teorama maka diperoleh hasil yang sama, yaitu $\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$

b). $P\left[X \geq \frac{1}{4}\right] = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} f(x)dx = \int_{\frac{1}{4}}^{1} 4(1-x)^3 dx + \int_1^{\infty} 0dx = -(1-x)^4\Big]_{\frac{1}{4}}^{1} = C + \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 0{,}3164$

5.6 Distribusi Normal

Distribusi normal adalah salah satu model distribusi untuk peubah acak kontinu, yang paling sering digunakan dalam menyelesaikan permasalahan baik dalam statistika terapan, dalam penelitian, dalam bidang ilmu lain, maupun cabang-cabang statistika lainnya. Karena alas an praktis itulah barangkali dinamakan dengan istilah "normal". Pada perkembangannya distribusi ini pertama kali dipelajari oleh tiga orang ahli, yaitu Abraham de Moivre, F. Laplace dan Karl Gauss. Sehingga distribusi normal dinamakan pula *distribusi Gauss*. Bentuk umum model distribusi normal diberikan dalam defiasi berikut:

Definisi:

Peubah acak X yang memiliki mean μ dan varians σ^2 dikatakan berdistribusi normal dan dinamakan peubah acak normal dengan rerata (mean) μ dan varians σ^2 atau disingkat X : $N(\mu, \sigma^2)$, $jikafkp - nyaberbentuk$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma\frac{x-\mu}{}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

$$(-\infty < \mu < \infty, \text{dan } 0 < \sigma^2 < \infty)$$

Catatan:

Dapat ditunjukkan bahwa fungsi f dengan persamaan di atas benar-benar sebuah fkp dari X, yaitu jelas $f(x) \geq 0, \forall x \in \Re$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \sqrt{2\pi = 1}$$

Teorama:

Jika X : $N(\mu, \sigma^2)$, maka rerata, varians, dan fpm dari X adalah:

(1). $E[X] = \mu$ (2). Var $(X) = \sigma^2$ (3). $M_x(t) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, t \in \Re$

Bukti:

(1). $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x . \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} dx = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu) e^{-\frac{1}{2}z^2} zdz$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} .0 + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} . \sqrt{2\pi = \mu}$$

Dengan alas an g(z) = $ze^{-\frac{1}{2}z^2}$ fungsi ganjil, sehingga $\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0.$

(2). Var (X) = $E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - E^2[X]$, dengan $E[X^2]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 . \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx = \sigma^2 + \mu^2$$

(Silahkan anda tunjukkan, sebagai latihan!), sehingga

Var (X) = $\sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$

(3). $M_x(t) = E[e^{2}] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e \frac{\sigma^2 \infty x^2 tz^{-\frac{1}{2}} \mu^2}{\sigma^2} dx$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\frac{1}{2}[x-(\sigma t+\mu)]}{\alpha^2}} . e \frac{-\frac{1}{2}\sigma^4 t^2 + \mu\sigma^2 t}{\sigma^2} dx$$

$$= e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} . \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e \frac{-\frac{1}{2}[x-(\sigma t+\mu)]}{\sigma} dx$$

$$= e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} . \int_{-\infty}^{\infty} N(\sigma^2 t + \mu, \sigma^2) dx$$

$$= e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, t \in \Re \text{ (terbukti)}$$

Catatan:

Untuk menghitung rerata dan varians dari X dapat menggunakan tpm dari X, yaitu:

$E[X]$ = $M_x(0)$ = μ dan Var (X) = $M_x(0)$-[$M_x(0)$] = $\sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$

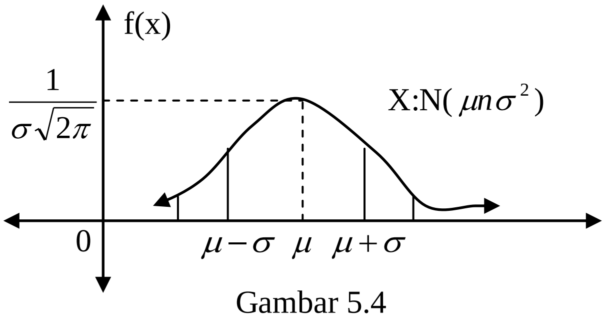
Sifat-sifat Kurva Normal

Grafik fkp X : N(μ, σ^2) mempunyai sifat-sifat:

1. Simetris terhadap garis x = μ.
2. Maksimum f = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ di x = μ.
3. Sumbu X adalah asimtot datar.
4. x = $\mu - \sigma$ dan x = $\mu + \sigma$ adalah absis-absis titik belok.

Coba anda buktikan dengan bantuan kalkulus!

Sketsa grafik fkp X:N(μ, σ^2) diperlihatkan pada gambar 5.4!



Gambar 5.4

Dengan menggunakan sifat-sifat kurva normal, jelaslah bahwa:

(1). $P[X \le \mu] = P[X \ge \mu]$

(2). $P[\mu-\sigma \le X \le \mu] = P[\mu \le X \le \mu+\sigma]$

(3). $P[\mu-2\sigma \le X \le \mu] = P[\mu \le X \le \mu+2\sigma]$

5.7. Distribusi Normal Baku

Untuk mempermudah penyelesaian maslah peluang sehubungan dengan distribusi normal, biasanya digunakan melalui distribusi normal baku (sudah ditabelkan).

Definisi:

Peubah acak XLN(μ,σ^2) dengan $\mu = \theta$ dan $\sigma^2 = 1$ dinamakan berdistribusi normal buku dengan fkp:

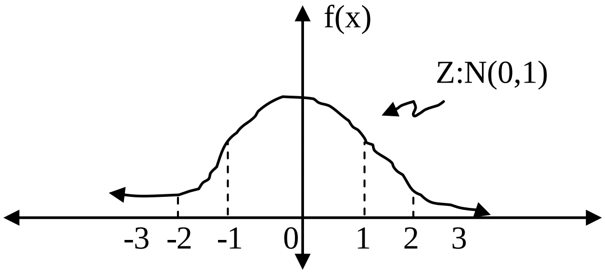
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

atau X:N(0,1) adalah peubah acak normal baku.

Dengan teorama atau karakteristik peubah acak normal umum, maka dapat dibuktikan bahwa jika X:N(0,1), maka rerata, varians dan fpm-nya berturut-turut adalah:

$E(X) = 0$, var $(X) = 1$, dan $M_x(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

Grafik fkp peubah acak Z:N(0,1) diperlihatkan pada gambar 5.5!



Gambar 5.4

Telah dibuat table distribusi normal baku dalam beberapa versi untuk menghitung peluang peubah acak Z:N(0,1) bernilai tertentu, antara lain:

(1). Versipertama adalah table yang menyatakan $P[0 \leq Z \leq z]$.

(2). Versi kedua table yang menyatakan $P[-\infty \leq Z \leq z]$.dengan z ≥ 0 dan ada juga table dengan $\approx < 0$.

Misalnya untuk z = 1,65 maka berdasarkan table pertama $P[0 \leq Z \leq 1{,}65]$ = 0,451 dan $P[-\infty \leq Z \leq 1{,}65]$ = 0.951 menurut table kedua. Hubungan table versi pertama dengan versi kedua untuk z > 0 adalah $P[-\infty \leq Z \leq z] = 0{,}5 + P[0 \leq Z \leq z]$.

Teorama:

Jika X:N(μ, σ^2), maka Z = $\dfrac{X-\mu}{\sigma} : N(0{,}1)$.

Bukti:

Akan dicari fpm dari peubah acak Z, sebagai berikut:

Misalkan $M_z(t)$ fpm dari Z, maka:

$$M_z(t) = E\left[e^{tz}\right] = E\left[e^{t\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right] = E\left[e^{-\frac{\mu}{\sigma}}.e^{\frac{t}{\sigma}x}\right] = e^{-\frac{\mu}{\sigma}}.E\left[e^{\frac{t}{\sigma}x}\right] = e^{-\frac{\mu}{\sigma}}M_x\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

$$= e^{-\frac{\mu}{\sigma}}.e^{\frac{\mu}{\sigma}+\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} = e^{\frac{1}{2}t^2} = e^{\sigma t+\frac{1}{2}1^2t^2}$$

Jika kita perhatikan fpm untuk peubah acak normal, maka Z:N(0,1).

Catatan:

Permasalahan normal umum dapat diselesaikan dengan normal baku (standar) melalui transformasi:

$\text{X:N}\left(\mu,\sigma^2\right)\to Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}:N(0,1)$

Misalnya, menghitung:

$$P\left[x_1\le X\le a_2\right]=P\left[\frac{x_1-\mu}{\sigma}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right]=P\left[z_1\le Z\le z_2\right]$$

Contoh 5.6

Diketahui peubah acak X:N(μ,σ^2). Dengan table distribusi normal baku, hitung:

a). $P\left[\mu\le X\le\mu+\sigma\right]$

b). $P\left[\mu+\sigma\le X\le\mu+2\sigma\right]$

c). $P\left[X\ge\mu+3\sigma\right]$

Penyelesaian (Menggunakan Tabel Versi I):

a). $P\left[\mu\le X\le\mu+\sigma\right]=P\left[\dfrac{\mu-\mu}{\sigma}\le\dfrac{X-\mu}{\sigma}\le\dfrac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right]=P\left[0\le Z\le 1\right]=0{,}341$

b). $P\left[\mu+\sigma\le X\le\mu+2\sigma\right]=P\left[\dfrac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\le\dfrac{X-\mu}{\sigma}\le\dfrac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right]$

$=P\left[1\le Z\le 2\right]=P\left[0\le Z\le 2\right]-P\left[0\le Z\le 1\right]$

= 0,477 – 0,341 = 0,136

c). $P\left[X\ge\mu+3\sigma\right]=P\left[\dfrac{X-\mu}{\sigma}\le\dfrac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right]=P\left[Z\ge 3\right]=0{,}5-P\left[0\le Z3\right]$

= 0,5 – 0,499 = 0,001

Contoh 5.7

Misalkan berat badan bayi lahir berdistribusi normal dengan rerata 2,5 kg dan varians 2 kg.

a). Jika X menyatakan berat badan bayi baru lahir, tentukan persamaan fkp dan fpm dari X.

b). Hitung peluang berat badan bayi baru lahir antara 2 kg dan 3 kg.

c) Dari 10.000 bayi baru lahir, berapakah harapan banyaknya bayi yang beratnya lebih dari 4,5 kg.

Penyelesaian:

a). Diketahui peubah acak X:N(2,5,2), maka fkp dari X adalah:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-2,5}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{4}\left(x^2-5x+6,25\right)}$$

fpm-nya adalah:

$M_x(t) = e^{2,5t+t^2}$

b). Misalkan A = Berat badan bayi baru lahir antara 2 kg dan 3 kg.
= {x/2 < X < 3}

Maka:

$$P(A) = P[2 < X < 3] = P\left[\frac{2-2,5}{\sqrt{2}} < \frac{X-2,5}{\sqrt{2}} < \frac{3-2,5}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= P[-0,35 < Z < 0,35]$$

$$= 2.P[0 < Z < 0,35] = 2.(0,137) = 0,274$$

c). P = [Berat badan bayi baru lahir lebih dari 4,5 kg]

$$= P[X > 4,5] = P\left[Z > \frac{4,5-2,5}{\sqrt{2}}\right] = P[Z > 1,41] = 0,5 - P[0 < Z < 1,41]$$

$$= 0,5 – 0,420 = 0,08.$$

Maka banyaknya bayi baru lahir yang beratnya lebih dari 4,5 kg adalah 10.000 x 0,08 = 800 orang.

Teorema:

Jika $X : N(\mu, \sigma^2)$, maka peubah acak $V = \left(\frac{X-\mu}{V}\right)^2$ berdistribusi Chi-Kuadrat dengan derajat kebebasan 1, atau $V : X^2_{(1)}$

Bukti:

$$X : N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} Z : N(0,1)$$

Akan dibuktikan V = $Z^2 : X^2_{(1)}$

Misalkan F adalah fungsi distribusi dari V, maka:

Misalkan $z^2 = y$ atau
$z = \sqrt{y}$, 0 < z < $\sqrt{v}$ $\Rightarrow 0 < y < v$ dan
$$dz = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$$

$$F(v) = P[V \le v] = P[Z^2 \le v]$$
$$= P[-\sqrt{v} \le Z \le \sqrt{v}]$$

$$= \int_{-vv}^{vv} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

$$= 2\int_{0}^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

$$= \int_{0}^{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy$$

$$= \int_{0}^{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy$$

$$= \int_{0}^{v} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}} v^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} dy$$

$$= \int_{0}^{v} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}2^{\frac{1}{2}}}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy$$

$$= \int_{0}^{v} f(y)dy$$

Integran pada ruas kanan yaitu $f(y) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}2^{\frac{1}{2}}}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$ adalah fkp dari peubah acak

$X^2_{(1)}$

Jadi, $V : X^2_{(1)}$ (Terbukti).

5.8 Distribusi Student T

Distribusi yang akan dibicarakan dalam pasal ini dinamakan distribusi T karena peubah acaknya menggunakan huru T atau disebut juga distribusi student, karena distribusi ini ditemukan oleh seorang mahasiswa 9student).

Definisi:

Peubah acak T dinamakan berdistribusi student T dengan derajat kebebasan r disingkat dengan T:T (r) jika fkp-nya berbentuk:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\sqrt{\pi r}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{r}\right)^{\frac{r+1}{2}}} \qquad \begin{array}{l} -\infty < t < \infty \\ (r = 1,2,3,\ldots) \end{array}$$

Beberapa teorema sehubungan dengan peubah acak student berikut, pembuktiannya ditangguhkan!

Teorema:

Jika peubah acak T:T(r), maka rerata dan varians dari T adalah:

1) $\mu_r = E[T] = 0, r = 1,2,3,...$

2) $\sigma_r^2 = \text{var}(T) = \frac{r}{r-2}, r > 2$ untuk r = 1,2 (tidak ada)

Teorema:

Jika peubah acak W dan peubah acak V bebas stochastic dengan W:N(0,1) dan $V : X^2_{(1)}$ maka peubah acak $T = \frac{W}{\sqrt{\frac{V}{r}}}$ berdistribusi student T dengan derajat kebebasan r

Beberapa sifat kurva (grafik) fkp peubah acak student T:T(r)

1) Kurva simetris terhadap garis atau sumbu t = 0.

2) Maksimum $f = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{r}{2}\right)\sqrt{\pi r}}$ di t = 0.

3) Memiliki asimtor datar yaitu sumbu T (absis).

4) P [T $\leq 0] = P[T \geq 0]$.

Contoh 5.8

Diketahui peubah acak T berdistribusi student T:T(1).

a) Tentukan fkp dari T yaitu f(t).

b) Sketsa grafik f.

c) Hitung $P[0 \leq T \leq 1]$

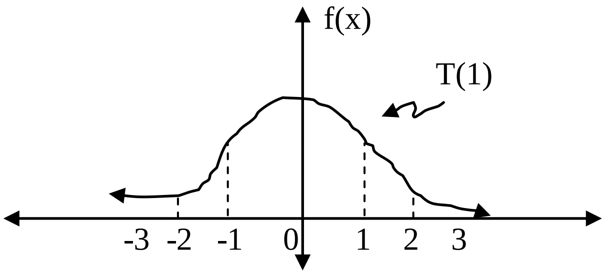
Penyelesaian:

Dalam hal ini peubah acak student T memiliki derajat kebebasan r = 1, maka fkp dari T adalah: $f(t) = \dfrac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \cdot \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{r^2}{1}\right)^{1}} = \dfrac{1}{\pi\left(1+t^2\right)}, -\infty < t < \infty,$ dengan $\pi \approx 3{,}14$ dan

$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$!

a) Maksimum $f = \dfrac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} = \dfrac{1}{\pi} \approx 0{,}32$ dan kurva berpuncak pada titik (0,0.32).

Sedangkan untuk t = ± 1, fungsi f bernilai ≈ 0,16. Sketsa grafik f diperlihatkan pada gambar 5.6!



Gambar 5.6

b) $P[0 \le T \le 1] = \int_0^1 \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1} t\right]$$

$$\frac{1}{\pi}.\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Catatan;

Untuk menyelesaikan permasalahan peluang sehubungan dengan peubah acak berdistribusi student T, maka beberapa ahli telah membuat tabelnya, antara lain versi pertama menyetakan:

$$P(T \le t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{\pi v}\left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{\frac{(v+1)}{2}}} dx$$

Dengan v judul kolom 1 menyatakan derajat kebebasan, judul baris 1 menyatakan peluangnya yaitu $P[T \le t]$ dan pada kolom daftar atau sel-selnya menyatakan nilai t bersangkutan.

Contoh 5.9

Diketahui peubah acak T:T(10).

a) Hitung $P[T > 2{,}228]$.

b) Hitung t, agar $P[T \le t] = 0{,}995$.

c) Hitung t, agar $P[-t \le T \le t] = 0{,}90$.

d) Hitung t, agar $P[T \ge t] = 0{,}025$.

Penyelesaian:

a) $P[T > 2{,}228] = P[T < -2{,}228, atau T > 2{,}228]$.

$$= 2.P[T > 2{,}228]$$

$$= 2(1 - P[T \le 2{,}228])$$
$$= 2(1 - 0{,}975)$$
$$= 2(0{,}025) = 0{,}05 = 5\%$$

b) Dengan table versi pertama, untuk derajat kebebasan v = 10 dan peluang 0,995, maka t table = 3,169.

c) Dengan sifat kesimetrian kurva student T tehadap 0, maka $P[-1 \le T \le t] = 0{,}90,$ sama artinya dengan $P[T \le t] = 0{,}90 + \frac{1}{2}(1 - 0{,}90) = 0{,}95.$

Berdasarkan tabel distribusi student T dengan v = 10 dan peluang 0,95 maka diperoleh t = 1,812.

d) $P[T \ge t] = 0{,}025$ sama artinya dengan $P[T \le t] = 0{,}975$ berdasarkan tabel, maka diperoleh t = 2,228.

Catatan:

Ada kalanya nilai t tabel atau nilai peluang sehubungan dengan distribusi student T tidak terdapat pada tabel. Untuk mengatasi ini maka harus dilakukan nilai pendekatan dengan intepolasi!

$$= \begin{cases} \dfrac{8f}{(1+2f)^3} & ,f > 0 \\ 0 & ,f \le 0 \end{cases}$$

b) Untuk f = 0, maka g (0) = 0, dan untuk $f \to \infty,$ maka:

$\lim\limits_{f\to\infty} g(f) = \lim\limits_{f\to\infty} \dfrac{8f}{(1+2f)^3} = 0$ ini menunjukan bahwa asimtot datar kearah $f \to \infty$

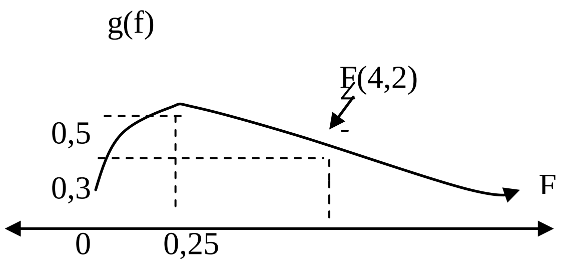
adalah sumbu F positif.

c) Pembuat maksimum dari g dicari dengan g^1 (f) = 0, dan

$$g^1(f) = \frac{8(1+2f)^3 - 48f(1+2f)^2}{(1+2f)^6} = \frac{8(1+2f)^2(1-4f)}{(1+2f)^4} = \frac{8(1-4f)}{(1+2f)^4} = 0$$

$\Rightarrow f = \dfrac{1}{4}$ jadi maksimum g = 0,59 untuk f = $\dfrac{1}{4}$ = 0,5

d) Dengan menggunakan hasil dari (b) dan (c) dan titik (1, 0,3) pada grafik, maka sketsa grafik g seperti diperlihatkan pada gambar 5.7!



Gambar 5.7

e) $P[F \le 19{,}2] = \int_0^{19{,}2} \frac{8f}{(1+2f)^3} df \approx 0{,}95$ berdasarkan tabel F

Contoh 5.11

Diketahui F:F (5, 10).

a) Cari nilai a yang memenuhi $P[0 < F < a] = 0{,}95$.

b) Cari nilai b agar $P[F \le b] = 0{,}05$.

c) Hitung $P[F \le 4]$.

Penyelesaian:

a) Berdasarkan tabel F yaitu untuk $r_1 = 5,\quad r_2 = 10,$ dan $P[F \le f] = 0{,}95,$ maka diperoleh a = 3,33.

b) Karena pada tabel F tidak ada $P[F \le f] = 0{,}05,$ maka harus digunakan kebalikannya, yaitu karena F:F (5,10), maka $F^{-1} = \frac{1}{F} : F(10{,}5)$

Jadi, $P[F \le b] = P\left[\frac{1}{F} \ge \frac{1}{b}\right] = P\left[F \ge \frac{1}{b}\right] = 1 - P\left[F^{-1} \le \frac{1}{b}\right] = 0{,}05$

$\frac{1}{b} = 4{,}74$ atau b = 0,211.

c) Karena pada badan daftar F:F (5,10) tidak ada nilai f = 4, maka harus digunakan pendekatan dengan interpolasi yaitu:

$$P[F \le 4] = 0{,}95 + \frac{4-3{,}33}{4{,}24-3{,}33}(0{,}975-0{,}95) = 0{,}9684$$

5.10 Soal-Soal Latihan

1. Diketahui peubah acak X berdistribusi seragam pada interval buka (-2,5), atau $X : \bigcup(-2{,}5)$.
   a) Tentukan fkp, fungsi distribusi dan fpm dari X.
   b) Sketsa grafik fkp dan fungsi distribusi
   c) Hitung $P[X < 0]$ dengan menggunakan fkp, dan dengan menggunakan f.d. Kemudian bandingkan kedua hasil ini.
   d) Hitung rerata, varians dan simpangan baku dari X.
2. Diketahui peubah acak X berdistribusi gamma parameter $\alpha = 3$ dan $\beta = 2,$ atau X:G(3,3).
   a) Tentukan fkp dan fpm dari X.
   b) Hitung rerata dan variansnya.
   c) Sketsa grafik fkp-nya.
   d) Hitung P[X<4].
3. Diketahui peubah acak X berdistribusi eksponensial dengan parameter $\theta = 3 atau X : Exp(3)$.
   a) Tentukan fkp, fd dan fpm dari X.
   b) Sketsa grafik fkp dan fd dari X pada system koordinat yang sama.
   c) Hitung rerata, varians dan P[-5<X<3].
4. Diketahui peubah acak X berdistribusi Chi-Kuadrat dengan derajat kebebasan v = 6 atau $\chi^2_{(6)}$
   a) Tentukan fkp dan fpm dari X.
   b) Hitung rerata dan varians dari X dengan menggunakan fpm dari X.
   c) Sketsa grafik fkp X.
   d) Hitung P[0<X<14,4] secara kalkulus dan dengan menggunakan tabel Chi-Kuadrat.
   e) Jika P[X ≥ χ] = 0,95. Tentukan nilai χ secara kalkulus dan secara tabel.

5. Diketahui peubah acak X berdistribusi beta dengan parameter $\alpha = 2$ dan $\beta = 2$ atau X : Beta(,2,2).
   a) Tentukan fkp, fd dan fpm dari X.
   b) Sketsa grafik fkp dan fd pada system koordinat yang berbeda.
   c) Hitung rerata dan varians X.
   d) Hitung $P[-2 \le X \le \frac{1}{2}]$.
6. Diketahui peubah acak X berdistribusi normal dengan parameter $\mu = 4$ dan $\sigma^2 = 25$, atau X : N(4,25).
   a) Tentukan fkp dan fpm dari X.
   b) Sketsa grafik fkp X. *(Petunjuk: Gunakan sifat-sifat kurva normal)*.
   c) Hitung $P[-1 < X < 9]$ dengan kalkulus.
7. Misalkan NEM siswa SD tahun 2000 berdistribusi normal dengan rerata 35,00 dan varians 150.
   a) Jika X menyatakan NEM siswa SD tahun 2000, tenyukan persamaan fkp dan fpm dari X.
   b) Dengan transformasi $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ dan tabel distribusi normal baku, hitung peluang NEM siswa tahun 2000 antara 25,00 dan 40,00.
   c) Jika 10% dari lulusan SD tahun 2000 diambil untuk disekolahkan ke luar negeri yaitu diambil siswa yang NEM-nya tinggi. Hitunglah batas terendah dari NEM untuk masuk dalam kelompok 10%.
   d) Jika semuanya ada 500.000 NEM, berapakah harapan banyaknya siswa yang NEM-nya kurang dari 15,00.
8. Jika $X:N(\mu,\sigma^2)$, maka $P[\mu, < X < \mu,+ \ \sigma] = 2,341$ dan $P[\mu, < X .< \mu,+ \ \sigma] = 0,478$, buktikan secara kalkulus.
9. Jika X :B(n,θ) dengan n cukup besar ($n \to \infty$), maka X dapat dihampiri dengan $N(\mu,\sigma^2)$ dimana $\mu = n\theta$ dan $\sigma^2 = n\theta(1- \theta)$. Gunakan kenyataan ini untuk menyelesaikan soal berikut pendekatan kurva normal:

Suatu ujian pilihan ganda terdiri atas 200 soal masing-masing dengan 4 pilihan dan hanya satu jawaban yang benar. Tanpa memahami sedikitpun maslahnya dan hanya dengan menerka saja, berapakah peluang seorang murid menjaab 50 sampai dengan 60 soal dengan benar,

10. Jika dua peubah acak Z_1 dan Z_2 saling bebas dengan Z_1 :N(0,1) dan Z_2 :N(0,1), maka peubah acak V = $Z_1^2 + Z_2^2$ berdistribusi Chi-Kuadrat dengan derajat kebebasan 2 atau V : $\chi^2_{(2)}$. Buktikan! *(Petunjuk: Gunakan fpm dari V dan teorema yang ada).*
11. Jika $X_1, X_2, \ldots, X_{11}$ saling bebas dengan X_1:N(μ_1,σ_1^2), maka :

    $$Y = \sum_{i=1}^{n} X_1 \quad :N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu \;, \sum_{i=1}^{n} \sigma_1^2\right)$$. Buktikan!
12. Diketahui peubah acak berdistribusi student T : T(3).
    a) Tentukan fkp dari T, yaitu *f*(*t*).
    b) Sketsa grafik *f*.
    c) Hitung P[0 < T < 1].
13. Diketahui peubah acak T : T(30).
    a) Hitung rerata dan varians T.
    b) Hitung P[-2,750 < T < 2,750] dan P[T ≤ 1,800].
    c) Hitung t agar P[T$|$ ≤ t] = 0,95.
    d) Coba, dengan menggunakan pendekatan kurva normal untuk menghitung soal bagian (b) dan (c), kemudian bandingkan hasilnya. *(Petunjuk: ν = 30 dianggap besar, sehingga T dapat didekati dengan* T : N(μ_1,σ_T^2).
14. Diketahui peubah acak F berdistribusi Fisher dengan parameter r1 = 2 dan r2 = 4 atau F:F(2,4).
    a) Tentukan persamaan fkp dari F yaitu *g(f)*.
    b) Tentukan maksimum g dan pembuat maksimumnya.
    c) Sketsa garfik g.
    d) Hitung P[F ≥ 18,0].

15. Diketahui peubah acak F : F (10,8).
    a) Hitung rerata dan varians dari F.
    b) Cari b agar P[0≤ F ≤ b] = 0,95.
    c) Cari c agar P[0≤ c] = 0,05.
    d) Hitung P[F≤ 4,8].
16. Disuatu kota pemakaian air sehari (dalam juta liter) berdistribusi hampiran gamma dengan parameter α = 2 dan β = 3. Bila kemampuan menyediakan air hanya 9 juta liter perhari, berapakah peluang pada suatu hari tertentu persediaan air tidak mencukupi.
17. Misalkan lamanya waktu untuk melayani seorang pengunjung di cafetaria berdistribusi eksponensial dengan rerata 4 menit. Berapakah seorang pengunjung akan dilayani paling lama dalam 10 menit.
18. Jika X_1,X_2,X_3dan X_4 empat peubah acak saling bebas dengan X_1:Exp$\left(\frac{1}{2}\right)$,

    I = 1,2,3,4 maka Y = $\sum_{1=1}^{4} X_t$ berdistribusi gamma *Weibull* dengan parameter α =

    4 dan β=$\frac{1}{\lambda}$. Buktikan! (*Petunjuk: Gunakan dengan fpm* Y).
19. Peubah acak X dikatakan mempunyai distribusi *Weibull* dengan parameter α dan β, jika fpk-nya berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta\chi^{\beta-1}e^{-\alpha\chi^{\beta}} & ,\chi > 0 \\ & \end{cases}$$

    a) Buktikan bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
    b) Buktikan bahwa rerata dan variansnya adalah:

$$\mu = \alpha^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$\sigma^2 = \alpha^{-\frac{2}{\beta}}\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\left[1+\frac{1}{\beta}\right]^2\right\}$$

20. Jika e^{-3t+8r^2} adalah fpm dari peubah acak X.

a) Tentukan fpm dari peubah acak Y = 2X – 1

b) Hitung P[-1 < X < 9]

c) Hitung P[1 < Y < 4]

DAFTAR PUSTAKA

BHAT B.R, *Modern Probability An Introductory Tex Book*, Wilwy Castern Limited, 1981.

HOGG R.V, and CRAIG A.T, *Introduction To Muthematical Statistic*, Forth Edition, Maemillam Publishing Co.yuc. New York, 1983

ROSS S.M, *Introduction To Probability Models*, Sixth Edition, Akademik Press, USA, 2000

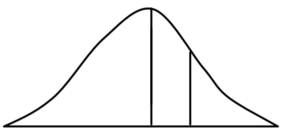
ROSS S.M, *Stochastic Prcesses*, Jhon Wiley & Son. Inc. New York, 1983

Walpole R.E, and Majers R.H, *Probability and Statistics for Engineers and Scienctic's* Teen Edition, Maemillam Publishing Co. yuc, 1978

TABEL I

DISTRIBUSI NORMAL (VERSI I)

$$P[0 < Z < z] = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}r} dt$$



DAFTAR

LUAS DIBAWAH LENGKUNGAN NORMAL STANDAR DARI 0 KE Z
(Bilangan dalam Badar daftar menyatakan desimal)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0358	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0673	0714	0754
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1061	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1338	1406	1442	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1841	1879
0.5	1915	1960	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2494	2518	2549
0.7	2586	2612	2642	2678	7004	2734	2764	2794	2823	2752
0.8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3078	3105	3133
0.9	3153	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3385
1.0	3416	3418	3461	3483	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3661	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	38660	3868	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4213	4217	4222	4226	4261	4265	4279	4292	4305	4319
1.5	4342	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4462	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4561	45664	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4636
1.8	4647	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767

2.0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4863	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	3893	3896	3898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	1981	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4987	4987	4987	4988	4988	4998	4998	4998	4990	4990
3.1	4990	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3.2	4993	4993	4993	4994	4994	2994	2994	2994	4995	4995
3.3	4995	4995	4995	4996	4996	4996	4996	4996	4996	4996
3.4	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997
3.5	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998
3.6	4999	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998
3.7	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3.8	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3.9	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000

Sumber: Theory and Froblema of Statistic, Spiregel, M.M Ph.D., Schrum Publishing Co., New York, 1961.

TABEL II

DISTRIBUSI NORMAL (VERSI II)

$$P[Z \le z] = \int^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{y}} dt$$

Z	N(Z)	Z	N(Z)	Z	N(Z)
0.00	0.500	1.10	0.864	2.05	0.980
0.05	0.520	1.15	0.875	2.10	0.982
0.10	0.540	1.20	0.885	2.15	0.984
0.15	0.560	1.25	0.894	2.20	0.986
0.20	0.579	1.82	0.900	2.25	0.986
0.25	0.599	1.30	0.903	2.30	0.989
0.30	0.618	1.35	0.911	2.326	0.990
0.35	0.637	1.40	0.919	2.35	0.991
0.40	0.655	145	0.926	2.40	0.992
0.45	0.674	1.50	0.933	2.45	0.993
0.50	0.691	1.55	0.939	2.50	0.994
0.55	0.709	1.60	0.945	2.55	0.995
0.60	0.726	1.645	0.950	2.576	0.995

0.65	0.742	1.65	0.951	2.60	0.995
0.70	0.758	1.70	0.955	2.65	0.996
0.75	0.778	1.75	0.960	2.70	0.997
0.80	0.788	1.80	0.964	2.75	0.997
0.85	0.802	1.85	0.968	2.80	0.997
0.90	0.806	1.90	0.971	2.85	0.998
0.95	0.829	1.95	0.974	2.90	0.998
0.100	0.841	1.960	0.975	2.95	0.998
0.105	0.883	2.00	0.977	3.09	0.999

TABEL III

DISTRIBUSI CHI-KUADRAT

$$p = [x \leq X] = \int_0^X \frac{1}{\Gamma\left(\frac{0}{2}\right) 2^{\frac{0}{2}}} - t^{\frac{0}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}} dt$$

	$\Pr(X \leq t)$					
V	**0.01**	**0.025**	**0.05**	**0.95**	**0.975**	**0.99**
1	0.000	0.001	0.004	3.84	5.02	6.63
2	0.020	0.051	0.103	5.99	7.38	9.21
3	0.115	0.216	0.352	7.81	9.35	11.3
4	0.297	0.484	0.711	9.49	11.1	13.3
5	0.554	0.831	1.15	11.1	12.8	15.1
6	0.872	1.24	1.64	12.6	14.4	16.8
7	1.24	1.69	2.17	14.1	16.0	18.5
8	1.65	2.18	2.73	15.5	17.5	20.1
9	2.09	2.70	3.33	16.9	19.0	21.7
10	2.56	3.25	3.94	18.3	20.5	23.2
11	3.05	3.82	4.57	19.7	21.9	24.7
12	3.57	4.40	5.23	21.0	23.3	26.2
13	4.11	5.01	5.89	22.4	24.7	27.7
14	4.66	5.63	6.57	23.7	26.1	29.1

15	5.23	6.26	7.26	25.0	27.5	30.6
16	5.81	6.91	7.96	26.3	28.8	32.0
17	6.41	7.56	8.67	27.6	30.2	334
18	7.01	8.23	9.39	28.9	31.5	34.8
19	7.63	8.91	10.1	30.1	32.9	36.2
20	8.26	9.59	10.9	31.4	34.2	37.6
21	8.90	10.3	11.6	32.7	35.5	38.9
22	9.54	11.0	12.3	33.9	35.8	40.3
23	10.2	11.7	13.1	35.2	35.1	41.6
24	10.9	12.4	13.8	36.4	39.4	43.0
25	11.5	13.1	14.6	37.7	40.6	443
26	12.2	13.8	15.4	38.9	41.9	45.6
27	12.9	14.6	16.2	40.1	42.2	47.0
28	13.6	15.3	16.9	41.3	44.5	48.3
29	14.3	16.0	17.7	42.6	45.7	19.6
30	15.0	16.8	18.5	43.8	47.0	50.9

- This table is abridged and adapted from "Tables of Percentage Points of the Incomplete Beta Function and of the Chi-Square Distribution, "Biometrika, 32 (1941) It is published here with the kind permission of Professor E. S. Pearson on belialt of the author, Catherine M. Thompson, and of the Biometrika Trusteer.

TABEL IV

DISTRIBUSI STUDENT T

$$P = [T \leq 1] = \int \frac{\Gamma\begin{bmatrix} V+1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\sqrt{\pi\upsilon.\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{\upsilon}\right)^{\frac{(\upsilon+1)}{2}}}} dx \qquad \left[\Pr(T \leq -t) = 1 - \Pr(T \leq t)\right]$$

	$\Pr(T \leq t)$				
V	**0.90**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	**0.995**
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977

	15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
	16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.624
	17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
	18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
	19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.864
	20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
	21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.834
	22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
	23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.087
	24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
	25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
	26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
	27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
	28	1.313	1.701	2048	2.467	2.763
	29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
	30	1.310	1.697	2042	2.457	2.750

- This table is abridged from Table III of Fisher and Yates : Statistical Table far Biological Agricultural, and Medical Research. Published by Oliver and Boyd, I td Edinburgh, by permission of the authors and publishers.