LIMIT FUNGSI

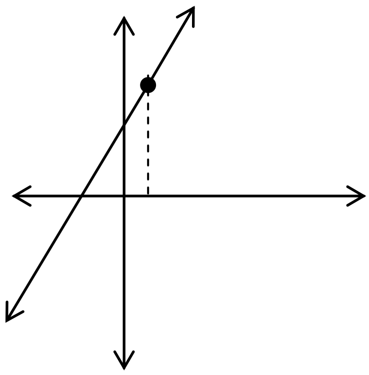
1. Limit f(x) untuk x $\rightarrow$ c

Tinjau sebuah fungsi f(x) = $\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$, apakah fungsi f tersebut sama dengan fungsi g(x) = x -2 ? Daerah asal dari fungsi g adalah semua bilangan real, sedangkan daerah asal fungsi f adalah bilangan real tetapi x $\neq$ 1. Dengan demikian g(x) $\neq$ f(x) sebab daerah asal dan daerah hasilnya tidak sama. Nilai fungsi g untuk x = 1 adalah g(1) = 1 -2 = -1, sedangkan nilai f untuk x = 1 tidak terdefinisi sebab f(1) = $\dfrac{1^2+1-2}{1-1}$ = $\dfrac{0}{0}$ merupakan bentuk tak tentu.

Pertanyaan selanjutnya, apakah untuk x sekitar 1 nilai f itu ada? Dengan menggunakan kalkulator, coba kita cari nilai-nilai f untuk nilai-nilai x yang dekat dengan 1, seperti 0,9, 0,95, 0,99 juga 1,1, 1,05, dan 1,01 seperti terlihat dalam tabel 1.

Tabel 1

x	$\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$
0,9	2,9
0,95	2,95
0,99	2,99
1	Tidak terdefinisi
1,01	3,01
1,05	3,05
1,1	3,1



Gambar 1

Ternyata nilai f untuk sekitar x = 1 mendekati 3 baik untuk didekati dari kiri (bilangan kurang dari 1) maupun dari kanan (bilangan lebih dari 1).
Nilai f (x) untuk x sekitar 1 disebut nilai limit f(x) untuk x menuju 1 ditulis

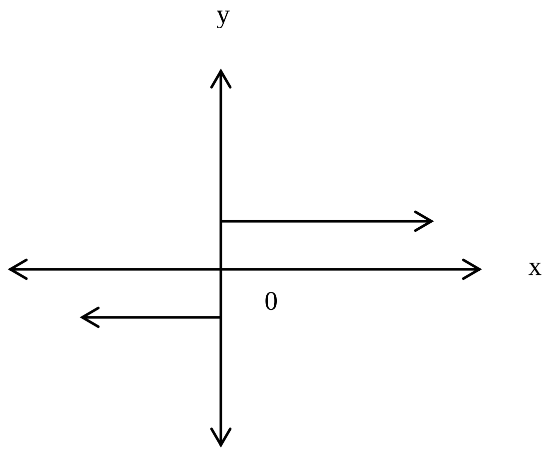
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 3$$

Nilai atau bilangan real x sekitar 1 maksudnya bilangan-bilangan x yang selisihnya dengan 1 sangat kecil (mendekati 0).

Sekarang perhatikan g(x) = $\dfrac{|x|}{x}$ untuk x = 0 jelas nilai g tak terdefinisi. Sekarang kita cari nilai-nilai g untuk x sekitar 0 baik dari sebelah kiri 0 atau sebelah kanan 0.

Tabel 2

x	$\frac{\lvert x\rvert}{x}$
-0,1	-1
-0,01	-1
-0,001	-1
0	Tidak terdefinisi
0,00	1
0,01	1
0,1	1



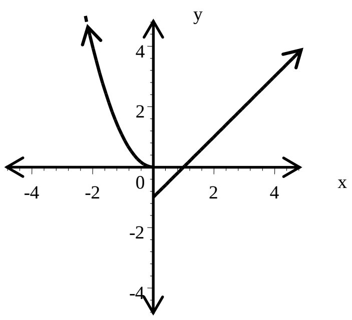
Gambar 2.

Didekati dari sebelah kiri 0 nilai g adalah -1 sedangkan untuk nilai sebelah kanan 0 adalah 1. Nilai g untuk x sekitar 0 berbeda, bila demikian $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ tidak ada

Tugas 1

Dengan menggambarkan grafik fungsi, bila ada carilah nilai limit fungsi berikut.

1. $\lim\limits_{x \to 2} 4x - 6$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$
3. Periksa apakah $\lim\limits_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ ada!
4. Perhatikan grafik fungsi f berikut ini, dengan f(x) = $\begin{cases} x^2, x < 0 \\ x - 1, x \geq 0 \end{cases}$



Gambar 3

Apakah $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ada? Berikan alasan!

2. *Teorema Subsitusi*

Ingat kembali fungsi sukubanyak f yang memiliki bentuk

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

Juga fungsi rasional dengan pembilang dan penyebutnya berupa fungsi sukubanyak dengan bentuk

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

- Jika f suatu fungsi sukubanyak maka $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$
- Jika f suatu fungsi rasional dan untuk x = c penyebutnya tidak nol, maka $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Contoh 1

Hitunglah $\lim\limits_{x \to 2}(2x^2 - 3)$

Jawab:

Karena f(x) = $2x^3 - 3$ adalah suatu fungsi sukubanyak, maka

$\lim\limits_{x \to 2} 2x^2 - 3$ = f(2) = 2.2^2 -3 = 5

Contoh 2

Carilah $\lim\limits_{x \to 2} \frac{7x^3 + x^2 - 5x - 40}{3x^2 + x - 10}$

Jawab:

$$\lim_{x \to 2} \frac{7x^3 + x^2 - 5x - 40}{3x^2 + x - 10} = f(2) = \frac{7(2)^3 + (2)^2 - 5.2 - 40}{3.2^2 + 2 - 10} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$$

Contoh 3

Carilah $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Karena untuk x = 2 nilai fungsi pembilang dan penyebut sama dengan 0, maka Teorema Subsitusi tidak berlaku. Bentuk 0/0 disebut bentuk tak tentu, dan untuk mencari nilai limitnya dilakukan penyederhanaan aljabar dengan faktorisasi seperti berikut.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x+1) = 3$$

Pembilang dan penyebut dapat dibagi (x-2) sebab untuk $x \to 2$, $x - 2 \neq 0$

Tugas 2

Carilah nilai limit berikut ini.

1. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{3x - 5}$
2. $\lim\limits_{y \to 2} \left(\frac{4y^2 + 8y}{y + 4} \right)^{1/3}$

3. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 2}$

4. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

5. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 14 - 51x - 2}{x^2 - 4x - 21}$

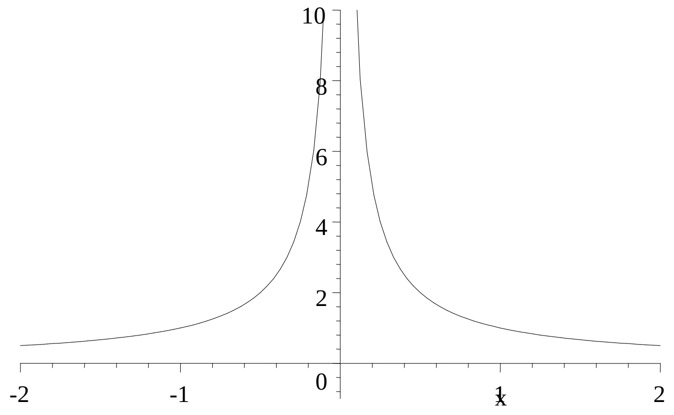
3. Limit Fungsi di Takhingga dan Limit Fungsi Bernilai Takhingga

Perhatikan fungsi f(x) = $\left|\frac{1}{x}\right|$, x ≠ 0, untuk menggambar grafik fungsi tersebut perhatikan nilai f(x) yang disusun pada Tabel 3.

Tabel 3

x	$\left\|\frac{1}{x}\right\|$	x	$\left\|\frac{1}{x}\right\|$
…	…	….	….
…	…	…	…
…	…	…	….
0,0001	10000	-0,0001	10.000
0,001	1000	-0,001	1000
0,01	100	-0,01	100
0,1	10	-0,1	10
0,5	2	-0,5	2
1	1	-1	1
2	0,5	-2	0,5
4	0,25	-4	0,25
10	0,1	-10	0,1
20	0,05	-20	0,05
50	0,02	-50	0,02
100	0,01	-100	0,01
1.000	0,001	-1.000	0,001
10.000	0,0001	-10.000	0,0001
…	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…

Berdasarkan Tabel 3 di atas dapat digambarkan grafi f(x) =$\left|\frac{1}{x}\right|$, dengan x ≠ 0 seperti terlihat pada Gambar 4 berikut



Gambar 4

Berdasarkan Gambar 4 dan Tabel 3, dapat disimpulkan

(1) untuk x $\to \infty$ maka nilai f(x) = $\left|\frac{1}{x}\right| \to 0$,

(2) demikian pula x $\to 0$ nilai f(x) = $\left|\frac{1}{x}\right| \to \infty$,

Dengan kata lain (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{1}{x}\right| = 0$ dan (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right| = \infty$, yang pertama merupakan contoh nilai limit fungsi di takhingga, sedangkan yang kedua adalah limit fungsi bernilai tak hingga.

Dari fakta $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ dapat diturunkan bahwa untuk k bilangan asli

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^k} = 0$,

karena $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^k} = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x})^k = \left(\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x})\right)^k = 0^k = 0$

Tugas 3
Tentukan nilai limit berikut

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty} x+1$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}$

4. Teorema Utama Limit Fungsi

Bila n bilangan asli, k suatu konstanta, serta f dan g fungsi yang memiliki limit di x = c, maka

(1) $\lim\limits_{x \to c} k = k$

(2) $\lim\limits_{x \to c} x = c$

(3) $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

(4) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

(5) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

(6) $\lim\limits_{x \to c} f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x).\lim\limits_{x \to c} g(x)$

(7) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}, \lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

(8) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to c} f(x)]^n$

(9) $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$

Penggunaan sifat-sifat limit fungsi di atas dapat dilihat dari contoh-contoh berikut.

Contoh 1

Tentukan $\lim\limits_{x \to 3} 4x^2$

Jawab:

$$\lim_{x \to 3} 4x^2 \underset{(3)}{=} 4 \lim_{x \to 3} x^2 \underset{(8)}{=} 4\ [\lim_{x \to 3} x]^2 \underset{(2)}{=} 4\ [3]^2 = 36$$

Contoh 2

Tentukan $\lim\limits_{x \to 2} (2x^3 - 4x)$

Jawab:

$$\lim_{x \to 2} (2x^3 - 4x) \underset{(5)}{=} \lim_{x \to 2} 2x^3 - \lim_{x \to 2} 4x \underset{(3)}{=} 2 \lim_{x \to 2} x^3 - 4 \lim_{x \to 2} x \underset{(8)}{=} 2(\lim_{x \to 2} x)^3 - 4 \lim_{x \to 2} x$$

$$\underset{(2)}{=} 2.(2)^3 - 4.2 = 8$$

Contoh 3

Tentukan $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{10 - x^2}}{2x}$

Jawab:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{10 - x^2}}{2x} \underset{(7)}{=} \frac{\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{10 - x^2}}{\lim\limits_{x \to 1} 2x} \overset{(9)}{\underset{(3)}{=}} \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 1} 10 - x^2}}{2 \lim\limits_{x \to 1} x} \overset{(5)}{\underset{(2)}{=}} \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 1} 10 - \lim\limits_{x \to 1} x^2}}{2.1}$$

$$\overset{(1)}{\underset{(8)}{=}} \frac{1}{2} \sqrt{10 - (\lim_{x \to 1} x)^2} \underset{(2)}{=} \frac{1}{2} \sqrt{10 - 1} = 4,5$$

Contoh 4

Carilah $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 3x - 10}{x^2 - 5x + 2}$

Jawab:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3x - 10}{x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}$$ pembilang dan penyebut dibagi x^2.

Berdasarkan teorema utama limit diperoleh

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + 3 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} - 10 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 - 5 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + 2 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

Contoh 5

Carilah $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \frac{2+0}{\sqrt{1}} = 2$$

Pembilang dan penyebut dibagi x dan ingat di dalam tanda akar harus dibagi x^2, karena x = $\sqrt{x^2}$

Contoh 6

Carilah $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{2x^2+3x} - \sqrt{2x^2-5})$

Jawab:

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{2x^2+3x} - \sqrt{2x^2-5}) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{2x^2+3x} - \sqrt{2x^2-5}) \times \frac{\sqrt{2x^2+3x} + \sqrt{2x^2-5}}{\sqrt{2x^2+3x} + \sqrt{2x^2-5}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\frac{(2x^2+3x)-(2x^2-5)}{\sqrt{2x^2+3x} + \sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x\to-\infty} (\frac{3x+5}{\sqrt{2x^2+3x} + \sqrt{2x^2-5}}) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\frac{3+\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{3}{x}} + \sqrt{2-\frac{5}{x^2}}}) = \frac{3+0}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2+0}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Tugas 4

Untuk soal nomor 1 sampai dengan 3 diketahui $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ dan 4. $\lim_{x\to a} g(x) = -1$

Carilah nilai limit berikut.

1. $\lim_{x\to a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$
2. $\lim_{x\to a} \sqrt[3]{g(x)}[f(x)+3]$
3. $\lim_{x\to a} \left[|f(x)| + |3g(x)| \right]$

Hitunglah

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-5)(3-x)}$

5. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+x+3}{x^2-1}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x-2}{x^3-1}$ 7. $\lim\limits_{y\to-\infty} \dfrac{9y^3+1}{y^2-2y+2}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$

Untuk soal nomor 9 dan 10. carilah $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ apabila $\lim\limits_{x\to a} f(x)=3$

9. f(x) = $3x^2$ + 2x + 1

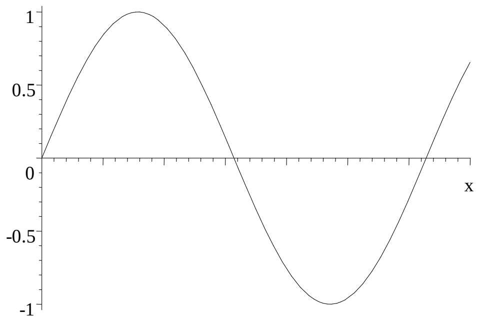
10. f(x) = $\dfrac{3}{x^2}$

5. Limit Fungsi Trigonometri

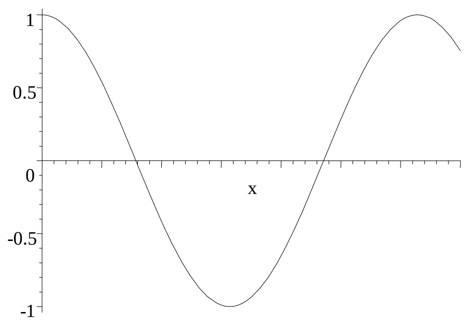
Pada fungsi trigonometri sering digunakan dua macam satuan sudut yaitu derajat dan radian. Simbol sin x^0 berarti satuan yang digunakan adalah satuan derajat, sedangkan bila satuan radian disimbolkan sin x saja. Dalam limit trigonometri satuan yang digunakan adalah satuan radian.

Seperti telah kita ketahui bahwa 1 putaran = 360^0 = 2π radian = 2.(3,14) radian, atau 1 radian $\approx$ 57, 3^0 . Perlu diingat bahwa satuan radian tidak pernah ditulis dibelakang ukuran sudut. Jadi bila ukuran sudut tidak ada simbul derajatnya berarti satuannya adalah radian. Sebagai contoh, sin 30 tidak sama dengan sin30^0 , sin 30^0 = ½ tetapi sin 30 artinya sin 30 radian = - 0,99.

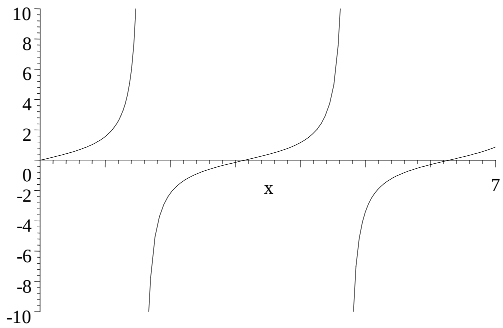
Teorema subsitusi dapat digunakan untuk menentukan nilai limit fungsi di suatu titik dari fungsi sukubanyak sebab grafik fungsi tersebut berupa kurva yang tidak terputus putus (ingat daerah asalnya bilangan real). Sekarang kita mengingat kembali tentang grafik fungsi f(x) = sin x, g(x) = cos x, dan h(x) = cos x.



f(x) = sin x



g(x) = cos x



h(x) = tan x

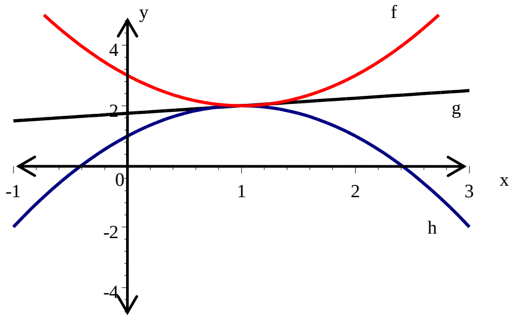
Tugas 5

Berdasarkan gambar-gambar di atas, carilah nilai limit berikut.

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$ 2. $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x$ 3. $\lim\limits_{x \to \pi} \tan x$
4. $\lim\limits_{x \to a} \sin x$ 5. $\lim\limits_{x \to b} \cos x$ 6. Adakah nilai $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$? Mengapa?

Sebelum kita membicarakan limit fungsi trigonometri, sekarang perhatikan suatu teorema yang penting mengenai limit fungsi yang dikenal dengan **Teorema Apit:**

Misalkan f, g, dan h adalah fungsi yang memenuhi f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) untuk semua x yang memuat c. Jika $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$



Gambar 4

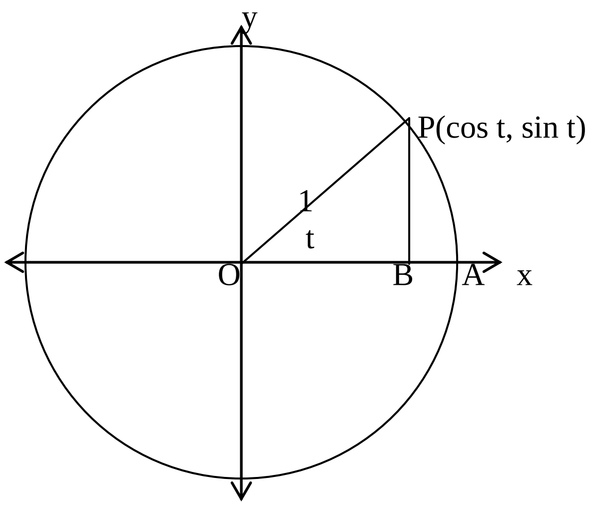
Sebagai contoh, perhatikan sketsa grafik f, g, dan h pada Gambar 4., f(x) = x^2 -2x + 3,
g(x) = ¼ x + 7/4, dan h(x) = $-x^2$ + 2x +1. Untuk -1 ≤ x ≤ 3 terlihat f(x)≤ g(x) ≤ h(x). sehingga

$$\lim_{x\to 1} f(x) \le \lim_{x\to 1} g(x) \le \lim_{x\to 1} h(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1}(x^2 - 2x + 3) \le \lim_{x\to 1} g(x) \le \lim_{x\to 1}(-x^2 + 2x + 1)$$

$$\Rightarrow 2 \le \lim_{x\to 1}(\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}) \le 2 \Rightarrow \lim_{x\to 1}(\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}) = 2$$

Ambil kasus untuk c = 0, akan ditunjukkan bahwa $\lim_{t\to 0} \sin t = 0$. Misalkan t > 0 dan titik A,B, dan P dengan lingkaran berjari-jari satu satuan (lingkaran satuan). Dari Gambar 5., dapat diperoleh kesimpulan 0 < BP < Busur AP. Sedangkan BP = $\frac{BP}{1}$ = sin t dan panjang busur AP = $\frac{t}{2\pi} \times 2\pi.1$ = t, sehingga disimpulkan 0 < sin t < t. Berdasarkan teorema apit

$$0 < \lim_{t\to 0} \sin t < \lim_{t\to 0} t \Rightarrow 0 < \lim_{t\to 9} \sin t < 0 \Rightarrow \lim_{t\to 9} \sin t = 0.$$



Gambar 5.

Selanjutnya dengan menggunakan identitas trigonometri dapat dicari

$$\lim_{t\to 0}\cos t = \lim_{t\to 0}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\lim_{t\to 0}\sin t\right)^2} = \sqrt{1-0^2} = 1$$

Sekarang akan ditunjukkan $\boldsymbol{\lim_{t\to c}\sin t = \sin c}$. Misalkan h = t –c, sehingga h $\to$ 0 ekivalen dengan t $\to$ c

$$\lim_{t\to c}\sin t = \lim_{h\to 0}\sin(c+h) = \lim_{h\to 0}\left(\sin c\cos h + \cos c\sin h\right)$$

Ingat identitas sin (A + B) = sin A cos B + cos A sin B

$\lim_{h\to 0}\left(\sin c\cos h + \cos c\sin h\right) = \sin c\lim_{h\to 0}\cos h + \cos c\lim_{h\to 0}\sin h$ = sin c. 1 + cos c. 0 = sin c.

Dengan menggunakan identitas cos t = $\sqrt{1-\sin^2 t}$ dapat ditunjukkan $\boldsymbol{\lim_{t\to c}\cos t = \cos c}$

$$\lim_{t\to c}\cos t = \lim_{t\to c}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\lim_{t\to c}\sin t\right)^2} = \sqrt{1-\sin^2 c} = \sqrt{\cos^2 c} = \cos c.$$

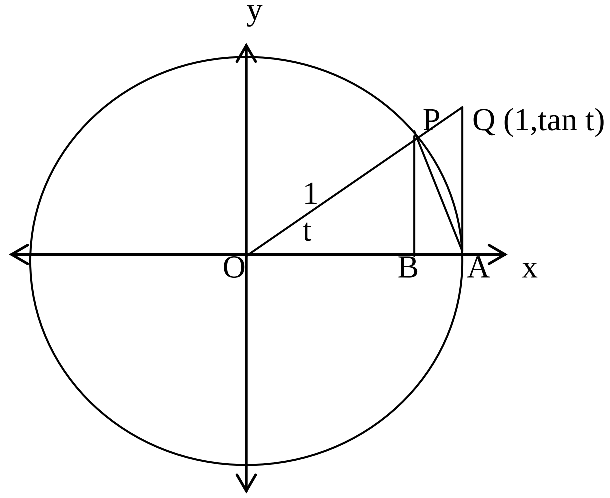
Teorema Limit Trigonometri Khusus

1. $\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1$
2. $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$
3. $\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t} = 1$
4. $\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t} = 1$

Bukti:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1$$

Perhatikan luas daerah Δ OAP, luas juring OAP, dan luas daerah Δ OAQ pada Gambar 6., diperoleh kesimpulan



Gambar 5.

Luas daerah Δ OAP $\leq$ Luas Juring OAP $\leq$ Luas daerah Δ OAQ

Luas daerah Δ OAP = $\dfrac{alas \times tinggi}{2} = \dfrac{OA \times BP}{2} = \dfrac{1 \times \sin t}{2} = \dfrac{\sin t}{2}$

Luas Juring OAP = $\dfrac{t \times luas\,\text{lingkaran}}{2\pi} = \dfrac{t \times \pi(1)^2}{2\pi} = \dfrac{t}{2}$

Luas daerah Δ OAQ = $\dfrac{alas \times tinggi}{2} = \dfrac{OA \times AQ}{2} = \dfrac{1 \times \tan t}{2} = \dfrac{\tan t}{2}$

Selanjutnya diperoleh

$$\frac{\sin t}{2} \leq \frac{t}{2} \leq \frac{\tan t}{2} \Rightarrow \sin t \leq t \leq \tan t \Rightarrow 1 \leq \frac{t}{\sin t} \leq \frac{1}{\cos t}$$

$$\lim_{t\to 0} 1 \leq \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \leq \lim_{t\to 0} \frac{1}{\cos t} \Rightarrow 1 \leq \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \leq \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \cos t} \Rightarrow 1 \leq \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \leq 1.$$

Berdasarkan Teorema Apit disimpulkan $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\sin t} = 1$

Bukti:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{\frac{t}{\sin t}} \right) = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\sin t}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{t} \right) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t \cos t} \right) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t} \times \frac{1}{\cos t} \right) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \times \lim_{t\to 0} \frac{1}{\cos t} =$$

1 . 1 = 1

Contoh

Carilah nilai limit berikut

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}$

Jawab:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 4 \dfrac{\sin 4x}{4x}$ = 4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{4x}$ =4.1 =4

(b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{6x}}{\frac{\tan 2x}{6x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{1}{3}\times\frac{\tan 2x}{2x}} = \frac{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}}$$

Misalkan y = 3x dan z = 2x, jika x $\to$ 0, maka y $\to$ 0 dan z$\to$0

$$\frac{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}} = \frac{\frac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}{\frac{1}{3}\lim\limits_{z\to 0}\frac{\tan z}{z}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Tugas 5

Hitunglah

1. (a) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos^2 t}{1+\sin t}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\tan x}{\sin x}$

2. (a) $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta}{2\theta}$ (b) $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\tan 5\theta}{\sin 2\theta}$

3. (a) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(3t)+4t}{t\sec t}$ (b) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos 2t}{t^2}$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}$ (b) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 z}{1-\sin z}$

5. Hitunglah $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ untuk

   (a) f(x) = sin x (b) f(x) = tan x