TEOREMA SISA

1. Nilai Sukubanyak

Apa yang dimaksud sukubanyak (polinom)?
Ingat kembali bentuk linear seperti $2x + 1$ atau bentuk kuadrat $2x^2-3x + 5$ dan juga bentuk pangkat tiga $2x^3 - x^2 + x - 7$. Bentuk-bentuk tersebut termasuk sukubanyak (polinom).

Bentuk umum sukubanyak adalah $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ dengan n bilangan cacah dan $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ konstanta tidak nol. Sukubanyak dalam x biasa dituliskan mulai dari pangkat tertinggi dari x turun hingga pangkat terendah *Derajat* suatu sukubanyak adalah pangkat tertinggi dari sukubanyak itu. Pada suku banyak $2x^3 - x^2 + 3x - 9$, 2 adalah koefisien x^3, -1 adalah koefisien x^2, 3 adalah koefisien x dan -9 disebut suku tetap.

Bentuk seperti $(x-3)(2x^2 + x -2) + 3x -7$ juga termasuk sukubanyak sebab dapat dituliskan dalam bentuk $2x^3-5x^2-2x-1$. Dengan menyatakan suku banyak sebagai f(x), maka nilai sukubanyak itu jika x diganti dengan 2 adalah f(2).
Misalkan $f(x) = 2x^3-5x^2-2x-1$, maka $f(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 - 2(2)-1 = 2.8 - 5.4-4 -1 = -9$

Tugas 1

1. Tentukan derajat dari setiap sukubanyak berikut!
   a. $4x^2 + 3x + 2$
   b. $x^3 - x - 11$
   c. $5 - x^2 + 3x^4$
   d. $8x + 3$
   e. 6
2. Susunlah menurut urutan pangkat turun dari x, dan sebutkan derajatnya
   a. $4x^2 + x^4 + 1$
   b. $(2x -3)(1 - 3x)$
   c. $(x+1)(x+2)(x-3)$
   d. $(2 - x)^2$
3. Tentukan koefisien
   a. x^3 dalam $(2x-9)(3x^2 +11)$
   b. x^2 dalam $(3x +4)(1-2x)$
   c. x dalam $(x+1)(x^2 + x + 5)$
4. Hitunglah
   a. $f(-1)$ jika $f(x) = x^4 - x^2 -1$
   b. $f(3)$ jika $f(x) = x^3 = 8x + 3$
5. Hitunglah nilai sukubanyak berikut ini untuk x yang disebutkan
   a. $x^3 + 7x^2 -4x + 3$ untuk $x = 5$
   b. $7x^4 -20x^2 +15x + 2$ untuk $x = -2$

2. Cara lain untuk menghitung nilai sukubanyak

Cara subsitusi untuk menghitung nilai sukubanyak seperti pada tugas 1 merupakan cara yang panjang, kecuali dalam keadaan yang sederhana. Pada kesempatan ini akan kita pelajari cara lain yang dapat dipakai untuk menghitung nilai semua sukubanyak.

Misalkan $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dan akan dihitung f(h) untuk h suatu bilangan real.

Dengan cara subsitusi harus dihitung nilai $f(h) = ah^3 + bh^2 + ch + d$

$$\begin{aligned} f(h) &= ah^3 + bh^2 + ch + d \\ &= (ah^3 + bh^2 + ch) + d \\ &= (ah^2 + bh + c)h + d \\ &= [(ah + b)h + c]h + d \end{aligned}$$

Dengan membalik proses itu maka kita dapat membentuk $ax^3 + bx^2 + cx + d$ dengan cara berikut”

1. Kalikan a dengan h dan tambahkanlah b maka didapat ah + b
2. Kalikan ah + b dengan h dan tambahkan lah c maka didapat $ah^2 + bh + c$
3. Kalikan $ax^3 + bx^2 + cx + d$ dengan h dan tambahkanlah d didapat $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Cara mengalikan dan menjumlahkan itu dapat disusun dalam skema berikut ini.

$$\begin{array}{c|cccc} h & a & b & c & d \\ & & ah & ah^2 + bh & ah^3 + bh^2 + ch \\ \hline & a & ah + b & ah^2 + bh + c & \underline{\underline{ah^3 + bh^2 + ch + d}} \end{array}$$

$\nearrow$ berarti dikalikan h

Contoh:

Hitunglah f(3) jika $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 18$

Jawab:

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & 4 & 0 & -18 \\ & & 6 & 30 & 90 \\ \hline & 2 & 10 & 30 & \boxed{72} \end{array}$$

72, jadi f(3) = 72

Perhatikan contoh;

1. Baris pertama sebelah kanan garis tegak memuat kofisien setiap perpangkatan dari x dalam urutan pangkat turun. Jika salah satu perpangkatan tidak ada maka koefisiennya nol, jadi harus diisikan nol pada tempat koefisien suku itu
2. Setap panah menunjukkan perkalian dengan 3 yang kemudian diikuti dengan penjumlahan

Tugas 2

Pakailah skema tersebut untuk menghitung
1. f(-1) jika $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$
2. f(-4) jika $f(x) = x^3 + 2x^2 + 6x + 8$
3. f(½) jika $2x^3 - 3x^2 + 9x + 12$

Hitunglah nilai setiap suku banyak berikut ini untuk nilai x yang diberikan :
4. $5x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 1$ untuk x = 0,6
5. $5x^3 + 4x^2 + 3{,}68$ untuk x = - 0,4

3. Pembagian Sukubanyak

Masih ingat pembagian bilangan asli?
Pembagian 3693 : 15 dapat dikerjakan seperti berikut.

$$\begin{array}{r|r} & 246 \\ \hline 15 & 3693 \\ & \underline{3000} \\ & 693 \\ & \underline{600} \\ & 93 \\ & \underline{90} \\ & 3 \end{array}$$

Pembagian itu menunjukkan:

$$\begin{aligned} 3693 &= (15 \times 200) + 693 \\ &= (15 \times 200) + (15 \times 40) + 93 \\ &= (15 \times 200) + (15 \times 40) + (15 \times 6) + 3 \\ &= (15 \times 246) + 3 \end{aligned}$$

Pembagian berhenti disini karena sisanya 3, kurang dari 15
Jadi 3693 = (15 x 246) + 3
Pada pembagian tersebut: 3693 adalah bilangan **yang dibagi**
15 dinamakan **pembagi**
246 dinamakan **hasil bagi**
3 dinamakan **sisa**

Sekarang perhatikan pembagian polinom $2x^2 + 3x - 4$ oleh $x - 2$

$$\begin{array}{r|l} & 2x + 7 \\ \hline x - 2 & 2x^2 + 3x - 4 \\ & \underline{2x^2 - 4x} \\ & \qquad 7x - 4 \\ & \qquad \underline{7x - 14} \\ & \qquad\qquad 10 \end{array}$$

Pembagian itu menunjukkan :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 4 &= (x - 2)2x + 7x - 4 \\ &= (x - 2)2x + (x - 2)7 + 10 \\ &= (x - 2)(2x + 7) + 10 \end{aligned}$$

Pembagian berhenti di sini karena sisanya 10 berderajat lebih rendah daripada $x - 2$

Pada pembagian di atas $2x^2 + 3x - 4$ adalah polinom **yang dibagi** , $x - 2$ merupakan **pembagi,** $2x + 7$ merupakan **hasil bagi,** dan 10 merupakan **sisa.**

Tugas 3

Kerjakanlah setiap pembagian dan sajikanlah hasilnya dalam bentuk:
Yang dibagi = (pembagi × hasil bagi) + sisa

1. 543 : 13
2. 2046 : 31
3. $(6x^2 – 28x - 15) : (x – 5)$
4. $(x^3 + 2x^2 + 3x + 6) : (x – 2)$
5. $(2x^3 – 4x^2 – 5x + 9) : (x + 1)$
6. Tentukanlah sisa pada pembagian $x^2 + 3x + 5$ dengan $x – 1$
   Bandingkanlah sisa itu dengan f(1) jika $f(x) = x^2 + 3x + 5$
7. Tentukanlah sisanya jika $x^2 – 8x – 3$ dibagi dengan $x + 2$
   Bandingkanlah sisa itu dengan f(- 2) jika $f(x) = x^2 – 8x – 3$
8. Tentukanlah sisa pada pembagian $x^3 – 3x^2 + x + 8$ dengan $x – 2$
   Bandingkanlah sisa tersebut dengan f(2) jika $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 8$

4. Pembagian $ax^3 + bx^2 + cx + d$ dengan $x – b$

Misalkan $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx + d$. Ada dua cara pembagian f(x) oleh x- h.
Cara 1: Pembagian bentuk panjang sukubanyak f(x) tersebut oleh x - h

$$
\begin{array}{llll}
 & ax^2 \quad + \ (ah + b)x \quad + (ah^2 + bh + c) & & \\
\hline
x – h \ \big/ & ax^3 + bx^2 & + cx & + d \\
 & \underline{ax^3 – ahx^2} & + cx & \\
 & (ah + b)x^2 & & \\
 & \underline{(ah + b)x^2 – (ah^2 + bh)x \qquad .} & & \\
 & \qquad (ah^2 + bh + c)x & & + d \\
 & \qquad \underline{(ah^2 + bh + c)x – (ah^3 + bh^2 + ch)} & & \\
 & \qquad\qquad \underline{\underline{ah^3 + bh^2 + ch\ d = sisa}} & &
\end{array}
$$

Cara 2 : Pembagian **sintetik** adalah cara yang singkat dan skematik, seperti menentukan nilai $ax^2 + bx^2 + cx + d$ jika x diganti dengan h yang telah dilakukan pada bagian terdahulu.

$$
\begin{array}{c|llll}
h & a & b & c & d \\
 & & ah & ah^2 + bh & ah^3 + bh^2 + ch \\
\hline
 & a & ah + b & ah^2 + bh + c & \underline{\underline{ah^3 + bh^2 + ch + d = f(h)}}
\end{array}
$$

Dengan membandingkan kedua perhitungan tersebut, maka tampak bahwa jika $f(x) = ah^3 + bh^2 + ch + d$ dibagi dengan $x – h$:

1. Sisa pembagian adalah $f(h) = ah^3 + bh^2 + ch + d$
2. Koefisien hasil bagi $ax^2 + (ah + b)x + (ah^2 + bh + c)$ tepat sama dengan bilangan-bilangan yang terjadi pada baris terbawah pada perhitungan cara 1 tanpa f(h)

Contoh 1
Tentukanlah hasil bagi dan sisa pada pembagian $3x^3 – 5x + 10$ dengan $x – 2$.
Jawab:

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 3 & 0 & -5 & 10 \\
 & & 6 & 12 & 14 \\
\hline
 & 3 & 6 & 7 & \multicolumn{1}{|c}{24}
\end{array}$$

Hasil baginya $3x^2 + 6x + 7$ dan sisanya 24

Contoh 2
Bagilah $x^3 + 3x^2 – 4x + 1$ dengan $x + 3$. Tulislah sukubanyak itu dalam bentuk $f(x) = (x + 3), h(x) + s$ dengan h(x) hasil bagi dan s sisa

Jawab:
Pembagi $x + 3 = x – (- 3)$

$$\begin{array}{c|cccc}
-3 & 1 & 3 & -4 & 1 \\
 & & -3 & 0 & 12 \\
\hline
 & 1 & 0 & -4 & \multicolumn{1}{|c}{13}
\end{array}$$

Hasil baginya $x^2 – 4$ dan sisanya 13, jadi $x^3 + 3x^2 – 4x + 1 = (x + 3) (x^2 – 4) + 13$

Tugas 4
Pakailah pembagian sintetik seperti pada contoh untuk menentukan hasil bagi dan sisa jika:

1. $x^2 – 4x – 8$ dibagi $x – 3$
2. $x^3 + 6x^2 + 3x + 1$ dibagi $x – 2$
3. $x^3 + 4x^2 – 3x – 11$ dibagi $x + 4$
4. Jika $p(x) = x^3 + 2x^2 – x – 2$ buktikanlah bahwa $x + 2$ adalah habis membagi dari p(x). Kemudian faktorkanlah p(x)
5. Dari faktor-faktor linear $x – 1$, $x + 2$ dan $x + 3$ manakah (jika ada) yang merupakan faktor dari $x^3 + 2x^2 – 5x – 6$

5. Teorema Sisa

Apakah benar jika sukubanyak f(x) dibagi x – h sisanya f(h)?. Dari pengalaman mengerjakan Tugas 3 menunjukkan bahwa hal itu benar untuk beberapa keadaan. Lagi pula pembagian sintetik nampak menunjukkan bahwa menentukan sisa pembagian oleh x – h adalah proses yang sama seperti menghitung f(h). Kita harus yakin bahwa hasilnya adalah benar untuk setiap keadaan.
Jika suatu sukubanyak f(x) dibagi dengan x – h maka hasil baginya adalah suatu sukubanyak yang lain yang dapat dinyatakan dengan h(x). Sisa s akan merupakan suatu konstanta yang tidak memuat x, sebab jika s masih memuat x maka pembagian itu masih dapat dilakukan satu langkah lagi.

Dari pasal 3 dapat diketahui bahwa persamaan dasar yang menghubungkan f(x) dengan x – h , h(x) dan s adalah :
F(x) = (x – h) h(x) + s   yang benar untuk semua x
Sekarang kita dapat menyebutkan teorema umum dan membuktikannya.

Teorema:

Jika sukubanyak f(x) di bagi x – h maka sisa terakhir adalah f(h).

Bukti:

Misalkan pembagian f(x) oleh x – h hasil baginya h(x) dan sisanya s. Derajat s lebih rendah satu daripada derajat x – h, karena itu s merupakan konstanta. Padahal f(x) = (x – h) h(x) + s untuk semua x (persamaan dasar). Jika x diganti h maka didapat:

f(h) = (h – h) h(x) + s
  = 0.h(x) + s
  = 0 + s
jadi f)h) = s

Hasil itu terkenal sebagai **Teorema Sisa**

Contoh.
Tentukanlah sisa jika $x^3 - 3x + 5$ dibagi x + 2

Jawab.
Perhatikan bahwa x + 2 = x – (- 2)

Cara 1.

$F(x) = x^3 - 3x + 5$

$F(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 5$

$= -8 + 6 + 5$

$= 3$

jadi sisanya 3 `

Cara 2

$$\begin{array}{r|rrr|r} -2 & 1 & 0 & -3 & 5 \\ & & -2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & \boxed{3} \end{array}$$

jadi sisanya 3

Catatan:

Jika yang ditanyakan hanya sisanya maka cara substitusi adalah mudah asalkan pengganti x merupakan bilangan-bilangan bulat yang sederhana, misalnya 1, - 1, 2, 3. Cara 2 pada umumnya lebih baik.

Pembagian dengan ax – b

Karena $ax - b = a(x - b/a)$ maka pada pembagian $f(x)$ dengan $x - b/a$ sisanya adalah $f(b/a)$ dan hasil baginya $h(x)$

Karena itu $f(x) = (x - b/a).h(x) + f(b/a)$

$\mathbf{f(x) = (x - b).(h(x)/a) + f(b/a)}$

Hal itu menunjukkan bahwa bila $f(x)$ dibagi dengan $ax - b$ maka sisanya $f(b/a)$

Contoh

Tentukanlah hasil bagi dan sisanya jika $f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x - 1$ dibagi $2x - 1$

Jawab:

$$\begin{array}{r|rrr|l} ½ & 2 & 1 & 5 & -1 \\ & & 1 & 1 & 3 \\ \hline & 2 & 2 & 6 & \boxed{2 = f(½)} \end{array}$$

$f(x) = (x - ½)(2x^2 + 2x + 6) + 2 = (2x - 1)(x^2 + x + 3) + 2$

jadi hasil baginya $x^2 + x + 3$ dan sisanya 2

Catatan

Sisa $f(1/2) = 2.(1/2)^3 + (1/2)^2 + 5(1/2) - 1 = 2$ cocok

Tugas 5

Dengan memakai teorema sisa, tentukanlah sisa pembagian :

1. $2x^3 - 4x^2 + 3x - 6$ oleh $x - 2$
2. $x^3 + 4x^2 + 6x + 5$ oleh $x + 2$
3. $x^4 + x^2 - 16$ oleh $x + 1$
4. $x^3 - x + 27$ oleh $x + 9$
5. $x^6 - x^3 - 1$ oleh $x - 2$

Tentukanlah sisa pada pembagian:

6. $4x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ oleh $2x - 1$
7. $2x^3 + x^2 + x + 10$ oleh $2x + 3$

Tentukanlah hasil bagi dan sisa jika:

8. $3x^3 + 5x^2 - 11x + 8$ dibagi oleh $3x - 1$
9. $2x^3 + 7x^2 - 5x + 4$ dibagi $2x + 1$

Tentukanlah a sehingga:

10. $4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 8x + a$ habis dibagi $2x - 1$
    Tentukanlah hasil baginya

6. Sisa Pembagian Sukubanyak oleh Bentuk Kuadrat.

Telah kita ketahui bahwa sisa pembagian suatu sukubanyak oleh $x - h$ atau oleh $ax - b$ berbentuk konstanta. Suatu konstanta boleh disebut sukubanyak berderajat nol, sedangkan bentuk linear merupakan sukubanyak berajat satu. Telah dikemukakan sebelumnya sisa pembagian suatu sukubanyak derajatnya lebih rendah dari derajat pembaginya. Dengan demikian sisa pembagian suatu sukubanyak oleh bentuk kuadrat sisanya berderajat 1 atau 0.

Contoh 1

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\quad x + 4 \quad \text{(hasilbagi)} \\ \hline
x^2 - 2x - 3 & x^3 + 2x^2 - x - 5 \\
 & x^3 - 2x^2 - 3x \\ \cline{2-2}
 & \quad 4x^2 + 2x - 5 \\
 & \quad 4x^2 - 8x - 12 \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad 10x + 7 \text{ (sisa)}
\end{array}
$$

Pembagian $x^3 + 2x^2 - x - 5$ oleh $x^2 - 2x - 3$. hasilbaginya $x + 4$ dan sisanya $10x + 7$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x + 1 \quad \text{(hasilbagi)} \\
\hline
x^2 - 2x - 3 & 2x^3 - 3x^2 - 8x + 1 \\
 & 2x^3 - 4x^2 - 6x \quad - \\
\cline{2-2}
 & \quad x^2 - 2x + 1 \\
 & \quad x^2 - 2x - 3 \quad - \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 4 \text{ (sisa)}
\end{array}
$$

Pembagian $2x^3 - 3x^2 - 8x - 5$ oleh $x^2 - 2x - 3$. hasilbaginya $2x + 1$ dan sisanya 4.

Dari contoh di atas dapat disimpulkan bahwa sisa pembagian sukubanyak oleh bentuk kuadrat paling tinggi berderajat satu (linear).

Apabila pembagi bentuk kuadrat itu bisa difaktorkan sebagai perkalian bentuk linear, untuk mencari sisa pembagian itu dapat dilakukan sebagai berikut.

Contoh:
Tentukan sisa pembagian $x^3 + 2x^2 - x - 5$ oleh $x^2 - 2x - 3$.
Karena pembaginya $x^2 - 2x - 3$ dapat difaktorkan sebagai $(x-3)(x + 1)$, misalkan $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 5$ dan sisa pembagian $f(x)$ oleh $x^2 - 2x - 3$ adalah $ax + b$, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$f(x) = (x^2 - 2x - 3)\, h(x) + (ax + b)$.
$f(x) = (x - 3)(x + 1)h(x) + (ax + b)$.
$f(3) = (3 - 3)(3 + 1)h(3) + (a.3 + b) \Rightarrow$.
$37 = 0.4\, h(3) + (3a + b)$
$37 = 0 + 3a + b \ . \Rightarrow 3a + b = 37$ …….. (1)

$f(x) = (x - 3)(x + 1)h(x) + (ax + b)$.
$f(-1) = (-1 - 3)(-1 + 1)h(-1) + (a.-1 + b) \Rightarrow$.
$-3 = -4.\, 0.\, h(-1) + (-a + b)$
$-3 = 0 - a + b \ . \Rightarrow -a + b = -3$ …….. (2)

Dari persamaan (1) dan (2)
$$
\begin{array}{rl}
3a + b &= 37 \\
-a + b &= -3 \quad - \\
\hline
4a \qquad &= 40
\end{array}
$$
diperoleh $a = 10$

Dengan subsitusi ke persamaan (1) $3.\,10 + b = 37$ diperoleh $b = 7$.
Jadi sisa pembagian $x^3 + 2x^2 - x - 5$ oleh $x^2 - 2x - 3$ adalah $10x + 7$

Tugas 6.

1. Tentukan sisa pembagian $2x^3 – 4x^2 – 5x – 2$ dibagi $(x -1)(x + 2)$
2. Tentukan $x^4 - 3x^2 + 2x + 4$ oleh $x^2 + x – 2$.
3. Bila f(x) suatu suku banyak dibagi oleh $x^2 - 5x + 6$ sisanya $3x – 7$. Tentukan sisa pembagian f(x) oleh $x – 3$.
4. Jika suatu sukubanyak f(x) dibagi $x +1$ bersisa -3 dan bila f(x) dibagi $x -1$ bersisa 5. Tentukan sisa pembagian f(x) oleh $x^2 – 1$.
5. Diketahui sukubanyak $f(x) = 2x^4 + px^3 + qx$. Jika f(x) dibagi $x^2 -2x – 3$ bersisa $6x + 32$ tentukan p dan q.

7. Teorema Faktor

Masih ingat yang disebut faktor ? 2 adalah faktor dari 6, karena 6 dibagi 2 hasilbaginya 3 dan sisanya 0, dapat ditulis $6 = 2 \times 3 + 0$. Seperti pada bilangan asli, pada sukubanyak, $(x -1)$ faktor dari $x^3 -1$, sebab $x^3 – 1$ dibagi $x – 1$ hasilbaginya $x^2 + x + 1$ dan sisanya 0, ditulis $x^3 -1 = (x-1)(x^2 +x +1) + 0$.

Teorema

Misalkan f(x) suatu sukubanyak, $f(h) = 0 \Leftrightarrow (x – h)$ merupakan faktor dari f(x)

Bukti

Menurut teorema sisa $f(x) = (x – h).h(x) + f(h)$

Jika $f(h) = 0$ maka $f(x) = (x – h).h(x)$ berarti bahwa $x – h$ merupakan faktor dari f(x)

Sebaliknya jika $x – h$ merupakan faktor dari f(x) maka $f(x) = (x – h).h(x)$ untuk suatu sukubanyak h(x)

Karena itu $f(h) = (h – h).h(h) = 0.h(h) = 0$

Jadi $f(h) = 0 \Leftrightarrow (x – h)$ merupakan faktor dari f(x)

Contoh

Tentukanlah faktor-faktor dari $2x^3 + x^2 – 13x + 6$

Jawab.

Perhatikanlah jika $x – h$ merupakan faktor sukubanyak itu maka h merupakan pembagi dari 6, yaitu $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Kita coba dengan nilai- nilai itu.

Jelaslah $f(1) \neq 0$ Mengapa?

$F(- 1) \neq 0$. Mengapa?

Kita mencoba menghitung f(2):

2	2	1	- 13	6
		4	10	- 6
2		5	- 3	0 = f(2)

Karena f(2) = 0 maka x – 2 merupakan faktor sukubanyak itu dan faktor yang lain ialah $2x^2 + 5x - 3$

Jadi $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = (x - 2)(2x^2 + 5x - 3)$

$= (x - 2)(2x - 1)(x + 3)$

Catatan

Faktor yang koefisien-koefisiennya merupakan bilangan rasional seringkali dinamakan faktor rasional misalnya x – 2 dan 2x – 1. Tetapi $x\sqrt{2} - 1$ bukan faktor rasional. Kita terutama akan memperhatikan faktor-faktor yang rasional.

Tugas 7

Dengan memakai teorema faktor buktikanlah bahwa:

1. x – 1 dan x – 6 adalah faktor-faktor dari $x^2 - 7x + 6$
2. x – 4 adalah faktor dari $2x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 3x - 4$
3. 2x – 1 adalah faktor dari $2x^3 + x^2 + 5x - 3$
4. x – 1 adalah faktor dari $x^3 - (2a + 1)x^2 + (a^2 + 2a)x - a^2$

Faktorkan sukubanyak berikut.

5. $x^4 - 7x + 6$
6. $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$
7. $3t^3 - 4t^2 - 3t + 4$
8. $2t^3 - 5t^2 + 4t - 21$
9. Tentukanlah k sehingga $x^3 - 3x^2 + kx + 6$ mempunyai faktor x + 3
10. Tentukanlah p sehingga $2x^4 + 9x^3 + 5x^2 + 3x + p$ habis dibagi 2x – 1
11. Jika x + 2 merupakan faktor dari $x^3 + kx^2 - x - 2$ tentukan k dan faktor lain untuk nilai k tersebut
12. Diketahui $x^2 + 2x - 3$ merupakan faktor dari sukubanyak $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + ax + b$. Tentukanlah a dan b dan kemudian faktorkanlah f(x).

8. Akar-akar Rasional dan Persamaan Sukubanyak

Dari bagian 5 didapat:

Jika f(x) suatu sukubanyak, (x – h) faktor dari f(x) $\Leftrightarrow$ f(h) = 0.

Tetapi f(h) = 0 $\Leftrightarrow$ h akar persamaan f(x) = 0

Kesimpulan:

Jika f(x) adalah suatu sukubanyak, maka (x – h) faktor dari f(x) $\Leftrightarrow$ h akar persamaan f(x) = 0

Contoh:

Buktikanlah bahwa 2 merupakan akar persamaan $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ dan tentukanlah akar-akar yang lain. Tentukanlah juga titik-titik potong kurva $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ dengan sumbu x.

Jawab.

Misalkan $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

f(x) dibagi x – 2

2	1	- 2	- 1	2
		2	0	- 2
	1	0	- 1	0 = f(2)

f(2) = 0 $\Leftrightarrow$ 2 merupakan akar persamaan f(x) = 0. Pada pembagian tersebut hasil baginya $x^2 - 1$

Jadi persamaannya: $(x - 2)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)(x + 1) = 0$

Himpunan penyelesaiannya adalah {2, 1, - 1}.

Kurva y = (x – 2)(x – 1)(x + 1) memotong sumbu x bila y = 0.

Titik potongnya A(2, 0), B(1,0), dan C(- 1, 0)

Tugas 8

1. Buktikan bahwa – ½ merupakan akar persamaan $4x^3 - 24x^2 + 27x + 20 = 0$ dan tentukanlah akar-akar yang lain
2. Jika 3 merupakan akar persamaan $x^3 - 37x + k = 0$ tentukanlah k dan akar-akar yang lain.
3. Tentukan akar-akar persamaan $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$

4. Buktikanlah bahwa persamaan $x^3 + x^2 - x + 2 = 0$ hanya mempunyai satu akar nyata
5. Diketahui $x - 2$ merupakan faktor dari $f(x) = 2x^3 + kx^2 + 7x + 6$. Tentukan k, kemudian selesaikanlah persamaan $f(x) = 0$ untuk nilai k tersebut.
6. Tentukanlah koordinat titik potong-titik potong kurva $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ dengan sumbu x.

9. Mendekati Akar Nyata dari Persamaan Sukubanyak

Jika akar nyata dari persamaan $f(x) = 0$ tidak rasional, maka dapat diadakan pendekatan yang rasional. Pendekatan itu dilakukan dengan menggambar grafik $y = f(x)$ dan membaca absis titikpotong-titik potong grafik dengan sumbu x

Untuk memperoleh pendekatan yang lebih baik terhadap suatu akar, misalnya α, maka digambar grafik baru dari $y = f(x)$ disekitar $x = \alpha$ dengan memilih satuan skala yang lebih besar. Proses itu dapat diulang sampai nilai akar itu tercapai dengan angka sifnifikan sebanyak yang dikehendaki

Contoh

Buktikanlah bahwa $x^3 + x - 3 = 0$ mempunyai akar nyata antara 1 dan 1,5. Tentukanlah pendekatan akar tersebut dengan di bulatkan sehingga satu tempat desimal.

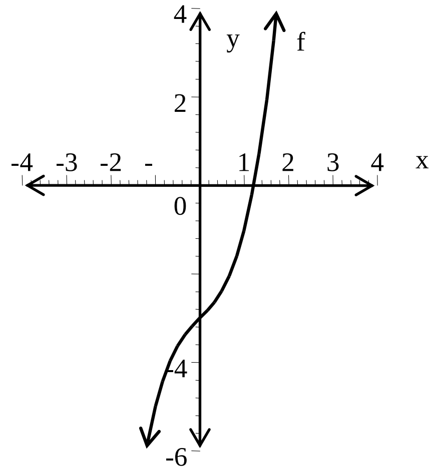
Jawab

Misalkan $f(x) = x^3 + x - 3$

$f(1) = 1 + 1 - 3 = - 1$ (negatif), grafik dari $y = f(x)$ terletak diatas sumbu x di dekat $x = 1,5$

1,5	1	0	1	-3
		1,5	2,25	4,875
	1	1,5	3,25	1,875 = f(1,5)

$f(1,5) = 1,875$ (positif) , artinya grafik $y = f(x)$ terletak di atas sumbu x di dekat $x = 1,5$. Oleh karena itu tentu grafik memotong sumbu x diantara $x = 1$ dan $x = 1,5$. Jadi persamaan itu mempunyai akar α sehingga $1 < \alpha < 1,5$. Hal itu nampak dari sketsa grafik dari $y = x^3 - x - 3$ pada Gambar 1.



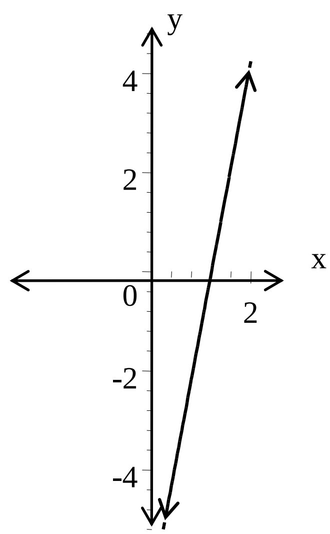
Gambar 1

Kita simpulkan bahwa 1,1 < α < 1,5

1,1	1	0	1	- 3
		1,1	1,21	2,431
	1	1,1	2,21	- 0,57 $\approx$ f(1,1)

1,3	1	0	1	- 3
		1,3	1,69	3,497
	1	1,3	2,69	0,50 $\approx$ f(1,2)

Dengan pendekatan sebagai garis yang menghubungkan titik A(1,1, -0,57) dan B(1,3, 0,50) seperti pada Gambar 2., tampak bahwa 1,2 < α < 1,22. Ini dikuatkan dengan perhitungan dimana f(1,2) = -0,072 (negatif) dan f(1,22) = 0,036 (positif). Jadi α = 1,2 dibulatkan sampai satu desimal.



Gambar 2

Tugas 9

1. Buktikanlah bahwa salah satu akar persamaan $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ terletak di antara 0 dan 1
2. Buktikanlah bahwa salahsatu akar persamaan $x^4 + x^2 - 1{,}95 = 0$ terletak di antara 0 an 1 dan yang lain diantara – 1 dan 0
3. a. Buktikanlah bahwa salah satu akar persamaan $x^2 - 3x + 1 = 0$ terletak di antara 0 dan 0,5

   b. Gambarkan garis lurus untuk pendekatan grafik $y = x^2 - 3x + 1$ untuk $0 \leq x \leq 0{,}5$, seperti ditunjukkan pada Gb. 2
4. Buktikanlah bahwa $x^3 - 2x = 5$ mempunyai akar diantara 2 dan 2,2. Tentukanlah akar itu dengan dibulatkan sampai satu tempat desimal
5. Buktikanlah bahwa kurva $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 3$ memotong sumbu x di antara $x = -2$ dan $x = -1$ dan $x = 0$ dan diantara $x = 4$ dan $x = 5$
6. Buktikanlah bahwa $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ mempunyai akar di antara 1,5 dan 2. Tentukanlah akar itu dengan pembulatan sampai satu tempat desimal.

10. Pertidaksamaan Sukubanyak

Masih ingat mencari himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat?

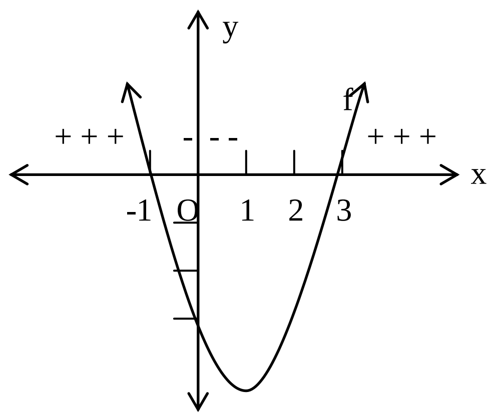
Contoh .

Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 - 2x - 3 < 0$

Jawab:

Misalkan $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

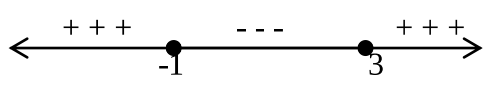
Titik potong grafik f diperoleh dari $f(x) = (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3$ atau $x = -1$ yaitu (3,0) dan (-1,0). Grafik f terbuka ke atas karena $a = 1 > 0$, sehingga sketsa grafik fungsi kuadrat f sebagai berikut.



Grafik f fungsi kuadrat tersebut terletak di atas sumbu x untuk $x < -1$ atau $x > 3$, dan terletak di bahwah sumbu x untuk $-1 < x < 3$.

Himpunan penyelesaian dari $x^2 - 2x - 3 < 0$ adalah menentukan nilai x sehingga grafik $f(x) = x^2 - 2x - 3$ terletak di bawah sumbu x.

Untuk mempersingkat penulisan dalam menentukan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat itu seringkali grafik fungsi kuadratnya tidak digambar secara lengkap, tetapi hanya absis titik-titik potong grafik dengan sumbu x saja, sebagai batas-batas interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan kuadrat tersebut. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan $x^2 - 2x - 3 < 0$ cukup dibuat gambar seperti berikut.



Tanda + memiliki arti pada interval itu nilai $f > 0$ atau grafik f di atas sumbu x, sedangkan tanda – memiliki arti pada interval itu nilai $f < 0$ atau grafik f di bawah sumbu x. Sedangkan pada $x = -1$ dan $x = 3$ nilai f adalah 0 atau grafik f memotong sumbu x.

Cara menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat di atas, dapat digunakan untuk menentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan sukubanyak.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian dari x^3 -7x + 6 ≥ 0

Jawab:

Misalkan f(x) = x^3 -7x + 6

f(1) = 1^3 -7.1 + 6 = 0, artinya x – 1 faktor dari f(x).

Untuk mencari hasilbaginya dapat digunakan pembagian sintetik sebagai berikut.

1	1	0	-7	6
		1	1	-6
	1	1	-6	0

Dari pembagian sintetik di atas diperoleh f(x) = x^3 -7x + 6 = (x -1)(x^2 + x -6) =
(x -1)(x + 3)(x – 2)

Absis titik potong grafik f dengan sumbu x diperoleh dari f(x) = 0 atau
(x -1)(x + 3)(x – 2) = 0 yaitu x = 1, x = -3, dan x = 2. Dengan demikian sumbu x terbagi menjadi empat daerah (interval) yaitu x < -3, -3 < x < 1, 1 < x < 2, dan x > 2. Untuk menentukan nilai f itu positif atau negatif pada masing-masing interval cukup dengan menghitung nilai f untuk sebuah x pada interval itu.

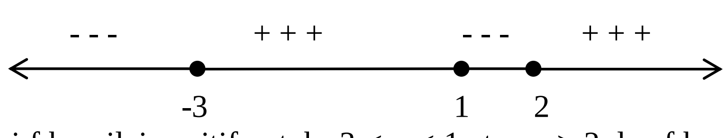
-4 terletak pada interval x < -3, dan f(-4) = $(-4)^3$ – 7.4 + 6 = -64 -28 + 6 = -86 <0, maka nilai f < 0 untuk semua x pada interval x < 3

0 terletak pada interval -3 < x < 1, dan f(0) = 0^3 – 7.0 + 6 = 6 > 0, maka nilai f > 0 untuk semua x pada interval -3 < x < 1

1½ terletak pada interval 1 < x < 2, dan f(1½) = $1½^{3}$ – 7.1½ + 6 = -9/8 < 0, maka nilai f < 0 untuk semua x pada interval 1 < x < 2

3 terletak pada interval x > 2, dan f(3) = 3^3 – 7.3 + 6 = 12 > 0, maka nilai f > 0 untuk semua x pada interval x > 2.

Keterangan di atas dapat digambar seperti berikut.



Fungsi f bernilai positif untuk -3 < x < 1 atau x > 2 dan f bernilai negatif pada x < -3 atau 1 < x < 2.

Jadi himpunan penyelesaian dari x^3 -7x + 6 > 0 adalah {x : -3 < x < 1 atau x > 2 }.

Tugas 10.

1. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari $x^3 + x^2 – x – 1 < 0$
2. $x^3 - 4x^2 + 5x – 2 \leq 0$
3. $x^3 - x^2 + 3x – 10 > 0$
4. $x^4 – 1 \geq 0$
5. $2 \cos^3 x^0 + 3 \cos^2 x^0 – 8 \cos x^0 + 3 < 0$ untuk $0 \leq x \leq 360$