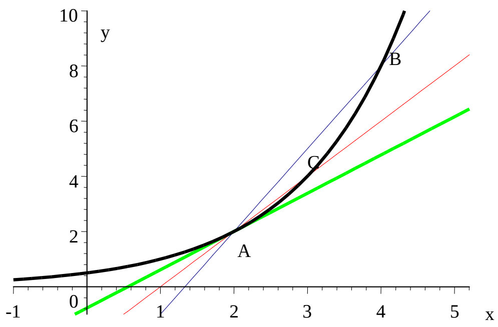
TURUNAN FUNGSI

1. Gardien Garis singgung Kurva

Perhatikan grafik fungsi f pada gambar berikut.



Gambar 1

Titik A, B, dan C terletak pada grafik f, bila absisnya berturut-turut x_1, x_2, dan x_3, maka koordinat titik A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), dan C(x_3, f(x_3)). Garis AB memotong grafik f memiliki gradien $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Garis AC memotong grafik f memiliki gradien $\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$. Misalkan selisih absis titik C dan absis titik C sama dengan h, maka $x_3 = x_1 + h$, sehingga gradien garis AC sama dengan $\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{(x_1 + h) - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

Jika titik C pada grafik terus digeser mendekati titik A, maka x_3 mendekati x_1 atau sehingga selisihnya yaitu h mendekati 0, ditulis $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$ dilambangkan dengan f ’(x_1) yang memiliki makna gradien garis singgung kurva f di titik A(x_1, f(x_1)).

Contoh :

Tentukan gradien garis singgung kurva f(x) = x^2 -1 di titik x = 2

Jawab:

Gradien garis singgung di x = 2 adalah f ’(2) = $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ =

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{((2+h)^2 - 1) - (2^2 - 1)}{h}$ = $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(4 + 4h + h^2 - 1) - 3}{h}$ = $\lim\limits_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$ =

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h}$ =

$\lim\limits_{h \to 0} (4+h)$ = 4.

Tugas 1

1. Tentukan gradien garis singgung f(x) = x^2, di titik (1,1).
2. Tentukan gradien garis singgung f(x) = x^2 + x di titik (-1,0).
3. Jika g(x) = x^2 + 4x, carilah g '(2)
4. Jika h(x) = $2x^2$ + 1, carilah h '(1)

2. Fungsi Turunan

Misalkan y = f (x) adalah sebuah fungsi, notasi f '(a) = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ memiliki arti gradien garis singgung kurva f di x = a, seringkali dibaca "turunan fungsi f di x = a".

Turunan fungsi f disembarang titik x dilambangkan dengan f '(x) dengan definisi f '(x) = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Proses mencari f ' dari f disebut penurunan; dikatakan bahwa f diturunkan untuk mendapatkan f '..

Contoh 1:
Carilah turunan fungsi f yang dinyatakan dengan f(x) = x^2 + 5 pada x = 3

Jawab:

Turunan f pada x = 3 ialah f ' (3) = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2+5-(3^2+5)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2+5-9-5}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(6+h)=6$$

Contoh 2:
Carilah turunan fungsi f yang ditentukan oleh f(x) = x^3 langsung dari definisi.

Jawab:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh^2+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2$$

Contoh 3.
Diketahui f(x) = $1/x^2$. Carilah f ‘(x) langsung dari definisi.

Jawab:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{h(x+h)^2x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{h(x+h)^2x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-h(2x+h)}{h(x+h)^2x^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x^2+2xh+h^2)x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x^4+2x^3h+x^2h^2)} = \frac{-2x}{x^4}$$

$$= \frac{-2}{x^3}$$

Tugas 2

Gunakan definisi fungsi turunan f ’(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ untuk memeriksa nilai f ‘(x) untuk tiap-tiap soal di bawah ini.

1. f(x) = x ; f ‘(x) = 1
2. f(x) = 3x ; f ‘(x) = 3
3. f(x) = x^2 ; f ‘(x) = 2x
4. f (x) = $5x^2$; f ‘(x) = 10x
5. f(x) = $3x^2 + 1$; f ‘(x) = 6x
6. f (x) = 3 ; f ‘(x) = 0
7. f(x) = 2x – 5 ; f ‘(x) = 2
8. f(x) = $2x^3$; f ‘(x) = $6x^2$
9. f(x) = 1/x ; f ‘(x) = $-1/x^2$
10. f(x) = $2/x^2$; f ‘(x) = $-4/x^3$

3. Turunan Beberapa Fungsi Khusus

(i). Turunan fungsi-fungsi konstan

Jika f(x) = c, dengan c konstan, maka:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Turunan fungsi konstan adalah nol.

(ii). Turunan x^n (n bilangan bulat positif)

Untuk n = 1, maka f(x) = x, dan f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ = $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}$ =

$\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$ = $\lim_{h\to 0} 1 = 1$.

Untuk n = 2, maka f(x) = x^2, dan f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ =

$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ = = $\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$ = $\lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$.

Untuk n = 3, maka f(x) = x^3 dan f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ = $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ =

$\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$ = $\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh^2+h^2)}{h}$ = $\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)$

= $3x^2$

.

Dari uraian di atas diperoleh

f(x)	x	x^2	x^3
f '(x)	1	2x	$3x^2$

Bila diperhatikan dengan seksama, tampak pola turunan untuk x^4, x^5, dan seterusnya, sehingga dapat disimpulkan turunan dari f(x) = x^n adalah f '(x) = n x^{n-1}

Kesimpulan tersebut dapat dibuktikan dengan menggunakan definisi turunan sebagai berikut..

Misalkan f(x) = x^n, maka f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ = $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$

$$(x+h)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n$$

$\binom{n}{k}$ adalah kombinasi k unsur dari n unsur, dengan $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Selanjutnya f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$ =

$\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+nx^{n-1}h+\ldots+nxh^{n-1}+h^n)-x^n}{h}$ =

$$\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+...+nxh^{n-1}+h^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(nx^{n-1}+...+nxh^{n-2}+h^{n=1})}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}(nx^{n-1}+\ldots+nxh^{n-2}+h^{n=1} = \text{nx}^{\text{n-1}}$$

Jika f(x) = x^n, maka f '(x) = n x^{n-1} , dengan n bilangan bulat positif.

(iii). Turunan ax^n (n bilangan bulat positif)

Misalkan f(x) = ax^n , a suatu konstanta , maka f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^n-ax^n}{h}$ =

$\lim_{h\to 0}\frac{a[(x+h)^n-x^n]}{h}$. Berdasarkan sifat limit diperoleh $\lim_{h\to 0}\frac{a[(x+h)^n-x^n]}{h}$ =

$$a\lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^n-x^n]}{h} = a\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+nx^{n-1}h+...+nxh^{n-1}+h^n)-x^n}{h} =$$

$$\text{a}\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+...+nxh^{n-1}+h^n}{h} = \text{a}\lim_{h\to 0}\frac{h(nx^{n-1}+...+nxh^{n-2}+h^{n=1})}{h} =$$

$$\text{a}\lim_{h\to 0}(nx^{n-1}+\ldots+nxh^{n-2}+h^{n=1} = \text{an x}^{\text{n-1}}$$

Jika f(x) = ax^n, maka f '(x) =an x^{n-1} , dengan n bilangan bulat positif.

(iv). Turunan pangkat negative dan rasional dari x

Untuk n = -1, maka f(x) = x^{-1} = $\frac{1}{x}$, dan f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ =

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x^2+xh)} = -\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

Untuk n = -2, maka f(x) = x^{-2} = $\frac{1}{x^2}$, dan f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ =

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{(x^2+2xh+h^2)x^2}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2xh-h^2}{(x^2+2xh+h^2)x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h(2x+h)}{(x^4+2x^3h+x^2h^2)}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-(2x+h)}{x^4+2x^3h+x^2h^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

Dari uraian di atas diperoleh :

f(x)	1/x atau x $^{-2}$	1/ x^2 atau x^{-2}
f ‘(x)	- 1/x^2 atau – x^{-2}	- 2/x^3 atau – 2x^{-3}

Bila dicermati diperoleh pola bahwa turunan dari f(x) = x^{-3}, maka f ’(x) = -3x^{-4}. Juga bila f(x) = x^{-4}, maka f ’(x) = -4x^{-5}, dan seterusnya.
Dengan demikian bila f(x) = x^{-n}, maka f ’(x) = -nx^{n-1}, berlaku bagi n bilangan bulat untuk n ≠ 0.

Jika f(x) = x^n, maka f ‘(x) = n x^{n-1} , dengan n bilangan bulat, n ≠ 0.

Contoh :

Diketahui f(x) = $\frac{1}{3x^2}$. Carilah f ‘(x) :

Jawab:

$$f(x) = \frac{1}{3x^2} = \frac{x^{-2}}{3}.$$

$$f'(x) = \frac{-2x^{-2-1}}{3} = \frac{-2x^{-3}}{3} = \frac{-2}{3x^3}$$

Bagaimana bila f(x) = x^n dengan n bilangan rasional?

Misalkan f(x) = √x = $x^{\frac{1}{2}}$, maka f ’(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} =$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\right)$$

=

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\right) = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Ternyata turunan fungsi f(x) = x^n dengan n bilangan rasional, adalah f ’(x) = n x^{n-1}.

Contoh

Diketahui f(x) = $x^{\frac{5}{3}}$. Carilah f '(x) :

Jawab:

Bila f(x) = $x^{\frac{5}{3}}$, maka f '(x) = $\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$:

Tugas 3.
Carilah turunan dari :

1. $x^{½}$	2. $x^{4/3}$	3. $x^{5/2}$	4. $x^{½}$	5. $x^{1/3}$
6. x^{-1}	7. x^{-2}	8. x^{-6}	9. $2x^{-3}$	10. ½ x^{-4}

4. Sifat-sifat Turunan Fungsi

Bila g(x) dan h(x) fungsi-fungsi yang memiliki turunan dan k konstanta, berlaku:

(i) Jika f(x) = k g(x) maka f '(x) = k g'(x)
(ii) Jika f(x) = u(x) + v(x) maka f ' (x) = u'(x) + v'(x)
(iii) Jika f(x) = u(x) - v(x) maka f ' (x) = u'(x) - v'(x)
(iv) Jika f(x) = u(x).v(x) maka f ' (x) = u'(x)v(x) + u(x)v(x)
(v) Jika f(x) = $\frac{u(x)}{v(x)}$ *maka f ' (x) =* $\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

Bukti (i).

Jika f(x) = k g(x) maka f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{kg(x+h)-kg(x)}{h} =$

$\lim_{h\to 0} k\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ = k $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ = k g'(x)

Bukti (ii)

Jika f(x) = u(x)+v(x) maka f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)+v(x+h)-(u(x)+v(x))}{h}$ =

$\lim_{h\to 0}\frac{(u(x+h)-u(x))+(v(x+h)-v(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$
=
u'(x) + v'(x).

Bukti (iii) serupa dengan bukti (ii).

Bukti (iv)

Jika f(x) = u(x)+v(x) maka f '(x) = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h).v(x+h)-u(x).v(x)}{h}$ =

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h).v(x+h))-u(x+h).v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}$ =

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h).[v(x+h))-.v(x)]+[u(x+h)-u(x)]v(x)}{h}$ =

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h).[v(x+h))-.v(x)]+[u(x+h)-u(x)]v(x)}{h}$ =

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h).[v(x+h))-.v(x)]}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{.[u(x+h))-.u(x)]v(x)}{h}$ =

$\lim\limits_{h\to 0}u(x+h)\dfrac{[v(x+h))-.v(x)]}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{.[u(x+h))-.u(x)]}{h}v(x)$ =

$\lim\limits_{h\to 0}u(x+h)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[v(x+h))-.v(x)]}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{.[u(x+h))-.u(x)]}{h}\lim\limits_{h\to 0}v(x)$ =

u(x)v'(x) + u'(x)v(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).

Bukti (v) serupa dengan bukti (iv)

Contoh 1.
Carilah turunan dari f(x) = $3x^2 + 5x - 10$
Jawab:
f(x) = $3x^2 + 5x - 10$
Misalkan u(x) = $3x^2$, v(x) = 5x dan w(x) = 10, maka u'(x) = 6x, v'(x) = 5 dan w'(x) = 0 Selanjutnya f(x) = u(x) + v(x) – w(x) dan f '(x) = u'(x) + v'(x) – w'(x) = 6x + 5.

Contoh 2
Carilah turunan f(x) = $(3x^2 -1)(x^4 + 2x)$
Jawab:
Dengan menggunakan sifat (iv)
Misalkan u(x) = $3x^2 -1$ dan v(x) = $x^4 +2x$, maka u'(x) = 6x dan v'(x) = $4x^3 + 2$
Jika f(x) = u(x).v(x) maka f '(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) sehingga turunan dari f(x) = $(3x^2 -1)(x^4 +2x)$ adalah f '(x) = $6x(x^4+2x)+ (3x^2-1)(4x^3+2) = 18x^5+18x^2-4x^3-2$
Hasilnya sama dengan cara mengalikan dahulu u(x).v(x) yaitu f(x) = $(3x^2 -1)(x^4 +2x) = 3x^6+6x^3-x^4-2x$, dan f ' (x) = $18x^5+18x^2-4x^3-2$.

Contoh 3
Carilah turunan f(x) = $\dfrac{2x^4 - x}{x^2 + 1}$
Jawab:
Dengan menggunakan sifat (iv)
Misalkan u(x) = $2x^4 - x$ dan v(x) = $x^2 +1$ maka u'(x) = $8x^3$ - 1dan v'(x) = 2x.

Jika f(x) = $\frac{u(x)}{v(x)}$ maka f ' (x) = $\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Selanjutnya turunan dari f(x) = $\frac{2x^4-x}{x^2+1}$ adalah

f '(x) = $\frac{(8x^3-1)(x^2+1)-(2x^4-x)(2x)}{[x^2+1]^2}$ = $\frac{4x^5+8x^3+x^2-1}{(x^2+1)^2}$

Tugas 4

Carilah turunan dari fungsi-fungsi berikut.

1. $x^2 + 2x + 3$
2. $x^3 - 7x^2 + 2$
1. $4x^4 - x^2 + 9$
2. $(x^3 + 3x^2)(2x - 1)$
3. $(5x^2 - 7)(3x^2 - 2x + 1)$
4. $\frac{2}{5x^2-1}$
5. $\frac{2x^2-1}{3x+5}$
6. $\frac{5x^2+2x-6}{2x-1}$
7. Jika f(0) = 4, f '(0) = -1, g(0) = -3 dan g'(0) = 5
   Carilah (f-g)'(0); (f.g)'(0); dan (f/g)'(0)
8. Jika f(3) = 7, f '(3) = 2, g(3) = 6 dan g'(3) = -10
   Carilah (f+g)'(3); (f.g)'(3); dan (f/g)'(3)

5. Turunan Fungsi Trigonometri

(i). Turunan sin x

Misalkan f(x) = sin x, maka f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ = $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

Telah kita ketahui bahwa sin A – sin B = 2 cos $\frac{A+B}{2}$ sin $\frac{A-B}{2}$,

maka f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ = $\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{(2x+h)}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}$ =

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{2\cos(x+\frac{h}{2}h)\sin\frac{h}{2}}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\cos(x+\frac{h}{2})\times\frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\times\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\times.\lim_{h\to 0}\left(\frac{2\sin\frac{h}{2}}{2.\frac{h}{2}}\right) = \cos x\ .\ \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x.\ 1 = \cos x.$$

Jika f(x) = sin x, maka f '(x) =cos x.

(ii). Turunan cos x

Misalkan f(x) = cos x, maka f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ =

$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

Telah kita ketahui bahwa cos A – cos B = -2 sin $\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$,

maka f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ = $\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{(2x+h)}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}$ =

$\lim_{h\to 0}[\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}h)\sin\frac{h}{2}}{h}]$ = $\lim_{h\to 0}[-\sin(x+\frac{h}{2})\times\frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}]$ =

$-\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\times\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}$ = $-\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\times.\lim_{h\to 0}(\frac{2\sin\frac{h}{2}}{2.\frac{h}{2}})$ = -sin x .

$\lim_{h\to 0}(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}})$ = -sin x. 1 = -sin x.

Jika f(x) = cos x, maka f '(x) =- sin x.

(iii). Turunan tan x

f(x) = tan x = $\frac{\sin x}{\cos x}$. Misalkan u(x) = sin x dan v(x) = cos x maka u'(x) = cos x dan

v'(x) = -sin x. Menurut sifat (v) f '(x) = $\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

f '(x) = = $\frac{\cos x.\cos x-\sin x(-\sin x)}{[\cos x]^2}$ = $\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$ = $\frac{1}{\cos^2 x}$ = $\sec^2 x$

Teorema Aturan Rantai

Jika f(x) = (uov)(x) = u(v(x)), maka f '(x) = u'(v(x)).v'(x)

Contoh 1:

Carilah f '(x) bila f(x) = $(2x + 1)^3$

Jawab:

Cara pertama

$f(x) = (2x + 1)^3 = 8x^3+12x^2+6x+1$, maka $f'(x) = 24x^2 + 24x^2 + 6x = 6(8x^2+2x+1) =$

$= 6(2x+1)^2$.

Cara kedua

Menggunakan sifat (vi) jika $f(x) = (uov)(x) = u(v(x))$, maka $f'(x) = u'(v(x)).v'(x)$.
Untuk $f(x) = (2x + 1)^3$, misalkan dengan $u(x) = x^3$ dan $v(x) = 2x+1$, sehingga $f(x) = (uov)(x) = u(v(x))$.
Bila $u(x) = x^3$ maka $u'(x) = 3x^2$ dan bila $v(x) = 2x + 1$ maka $v'(x) = 2$
$f'(x) = 3(2x + 1)^2. 2 = 6(2x + 1)^2$.

Contoh 2:

Carilah f '(x) bila f(x) = $\sqrt{x^{10} + 2x^5 - 10}$

Jawab:

$f(x) = \sqrt{x^{10} + 2x^5 - 10} = (x^{10} + 2x^5 - 10)^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = (uov)(x)$ dengan $u(x) = x^{\frac{1}{2}}$ dan $v(x) = x^{10} + 2x^5 - 10$, maka $u'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ dan

$v'(x) = 10x^9 + 10x^4$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^{10} + 2x^5 - 10)^{-\frac{1}{2}}(10x^9 + 10x^4) = \frac{10x^9 + 10x^4}{2\sqrt{x^{10} + 2x^5 - 10}}$$

Tugas 5.

Carilah turunan dari fungsi-fungsi berikut.

1. $2 \sin x + 3 \cos x$
2. . $\cot x$
3. $x^2 \cos x$
4. $(3 -2x)^5$
5. $(x^3 -2x^2 +3x +1)^{11}$
6. $\sin^2 x$
7. $1 - \cos^2 x$
8. $(x^2 - x +1)^{-7}$
9. $\dfrac{1}{(x^2 + 3)^9}$
10. $\sin^4 (3x^2)$

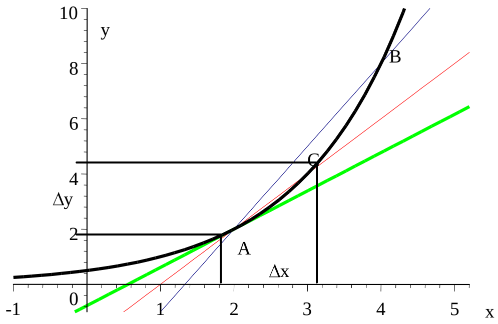
6. Notasi lain untuk Turunan

Fungsi $f: x \rightarrow x^2 +1$ biasa ditulis $f(x) = x^2 +1$, tetapi sering juga ditulis sebagai $y = x^2 +1$. Jika $f(x) = x^2 +1$ maka $f'(x) = 2x$, dan bila $y = x^2 +1$ sering ditulis $y' = 2x$.
Dari definisi fungsi turunan dari f (x) adalah f '(x) = $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, h melambangkan perubahan nilai x. Dalam berbagai penerapan kalkulus perlu sekali

lambang h sering ditulis sebagai Δx, sedang perubahan nilai f atau y yang sesuai disebut dilambangkan dengan Δf atau Δy.

Jika y = f (x), maka Δy = f(x + Δx) – f(x) dan y' = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ =

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Oleh Leibniz $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ditulis sebagai $\frac{dy}{dx}$.



Gambar 2

Dengan menggunakan notasi Leibniz, Teorema Aturan Rantaisifat dapat dinyatakan sebagai berikut: Jika y = f(u) dan u = g(x), maka y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

Contoh 1:
Carilah y ‘ bila y = $(2x + 1)^3$
Jawab:
Misalkan v = 2x + 1 maka y = $(2x + 1)^3 = v^3$

$\frac{dy}{dv} = 3v^2$ dan $\frac{dv}{dx} = 2$ sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} = 3v^2.2 = 6v^2 = 6(2x+1)^2$

Contoh 2
Carilah gradien, kemudian persamaan dari gariss singgung pada parabola y = $3x^2$ + 4x – 5 dititik (1, 2)

Jawab:
y = $3x^2$ + 4x – 5 maka $\frac{dy}{dx}$ = 6x + 4 . Gradien garis singgung pada titik (1, 2) adalah
6.1 + 4 = 10. Persamaan garis singgung adalah y – 2 = 10(x – 1) atau y = 10x -8

Contoh 3
Carilah titik-titik pada kurva y = $\sqrt[3]{x}$ di mana garis singgung pada kurva itu tegaklurus pada garis dengan persamaan 12x + y = 1

Jawab:

$12x + y = 1 \Leftrightarrow y = -12x + 1$, gradien garis ini adalah $-12 = m_1$. Garis singgung yang tegaklurus garis $y = -12x + 1$ adalah $m_2 = \frac{1}{12}$ (karena $m_1 m_2 = -1$)

$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{12} \Rightarrow x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = 4 \Rightarrow x = 4^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \pm 8$

Titik-titik yang dicari adalah (8, 2) dan (- 8, - 2)

Tugas 6

Tentukanlah gradien dan kemudian garissinggung setiap kurva berikut ini, pada titik yang diberikan.

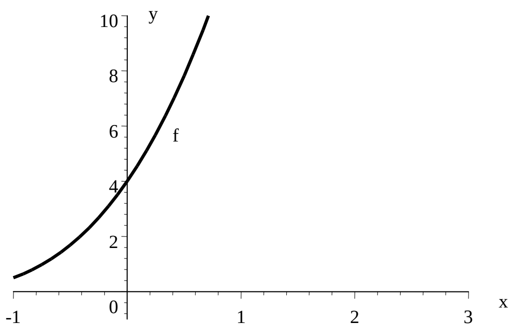
1. $y = x^2$ pada (3,9)
2. $y = 5x$ pada (-1, -5)
3. $y = \sqrt{x}$ pada (4,2)
4. $y = 1/x$ pada (1, 1)

Tentukanlah persamaan garissinggung kurva berikut ini:

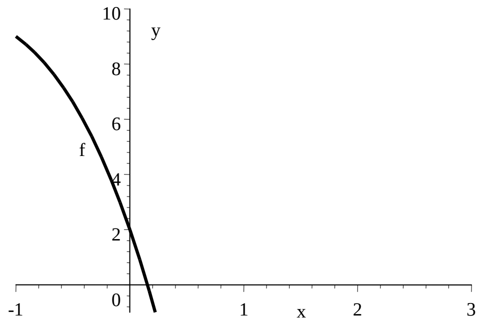
5. $y = x^3$ pada x = 1 2
6. $y = x^2 - 3x + 2$ pada x = 1
7. $y = 10\sqrt{x}$ pada x = 25
8. $y = 1 - x^2$ pada x = 0
9. $y = x^3 + 3x - 5$ pada x = 2
10. $y = 4/x^2$ pada x = 1

7. Kurva Naik dan Kurva Turun

Bila suatu kurva dari grafik fungsi digambarkan pada koordinat kartesius, kurva dikatakan naik, bila makin ke kanan kurva makin tinggi, seperti terlihat pada Gambar 3. Suatu kurva dikatakan turun bila makin ke kanan kurva makin rendah, seperti pada Gambar 4.

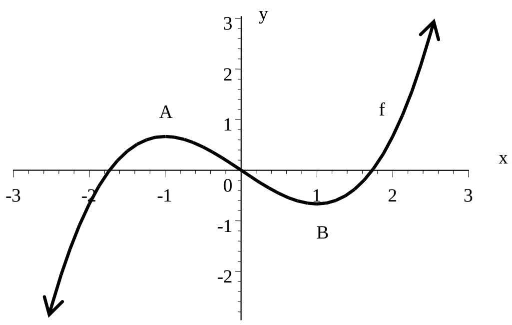


Gambar 3



Gambar 4

Perhatikan Gambar 5., pada interval $-\infty < x < -1$ kurva naik, pada interval $-1 < x < 1$ kurva turun, dan pada interval $1 < x < \infty$ kurva naik. Sedangkan pada $x = -1$ dan $x = 1$ kurva tidak naik maupun turun, dikatakan kurva mencapai *stasioner*. Titik A dan B disebut titik stasioner kurva.

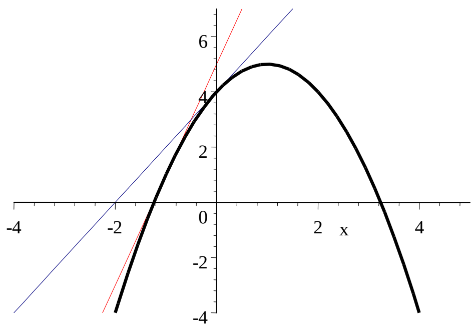


Gambar 5.

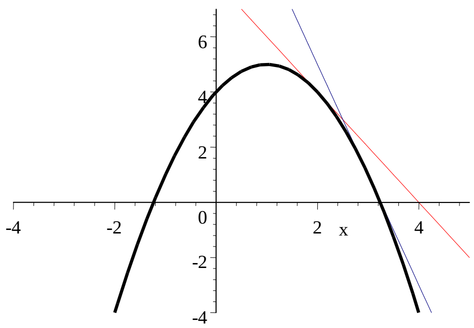
Hubungan Turunan Fungsi dengan Grafik Fungsi

Perhatikan Gambar 6., pada interval $-\infty < x < 1$ grafik naik dan garis-garis singgungnya membentuk sudut lancip dengan sumbu x positif, artinya gradien-gradien garis singgung grafik f pada saat kurva f itu naik adalah positif. Dengan kata lain, grafik fungsi f naik bila $f'(x) > 0$.

Perhatikan Gambar 7., pada interval $1 < x < \infty$ grafik turun dan garis-garis singgungnya membentuk sudut tumpul dengan sumbu x positif, artinya gradien-gradien garis singgung grafik f pada saat kurva f turun adalah negatif. Dengan kata lain, grafik fungsi f turun bila $f'(x) < 0$.

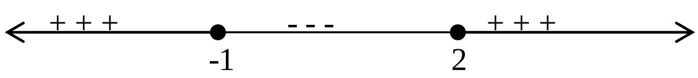


Gambar 6



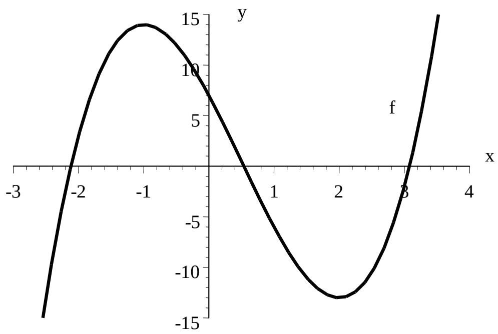
Gambar 7

Contoh:
Bila $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, tentukan dimana grafik f naik dan grafik f turun.
Jawab:
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ maka $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$
Grafik f naik bila $f'(x) > 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 > 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) > 0$
Batas-batas interval adalah $(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2$ dan $x = -1$
Untuk daerah pada garis bilangan sebelah kiri -1 itu daerah positif (+) atau negatif (-) subsitusikan sembarang bilangan sebelah kiri -1, misalnya -2 diperoleh $(-2-2)(-2+1) = (-4)(-1) = 4$ positif (+).
Untuk daerah pada garis bilangan antara -1 dan 2 itu daerah positif (+) atau negatif (-) subsitusikan sembarang bilangan sebelah kiri di antara kedua bilangan, misalnya 0 diperoleh $(0-2)(0+1) = (-2)(1) = -2$ negatif (-).
Begitu juga untuk memeriksa daerah garis bilangan sebelah kanan 2, ambil bilangan 3, kemudian subsitusikan ke $(x-2)(x+1) = (3-2)(3+1) = 1.4 = 4$ positif (+)



Grafik f naik pada interval garis bilangan yang bertanda positif (+) yaitu, $-\infty < x < -1$ dan $2 < x < \infty$.
Dengan menggunakan garis bilangan yang sama, sekaligus diperoleh interval dimana grafik f turun, yaitu pada interval garis bilangan yang bertanda negatif (-). Grafik f turun pada interval $-1 < x < 2$.

Ini sesuai dengan grafik $f(x) = 2x^3 – 3x^2 -12x +7$ pada Gambar 8.



Gambar 8.

Tugas 7

Untuk setiap fungsi yang ditentukan dalam persamaan no. 1 – 7 tentukanlah interval-interval dimana fungsi itu naik dan dimana fungsi itu turun

1. $f(x) = x^2 – 8x + 10$
2. $f(x) = 2x - x^2$
3. $f(x) = 3x – x^3$
4. $f(x) = 2x^3 – 9x^2 + 12$
5. $f(x) = 1/3\, x^3 – x^2 – 3x + 3$

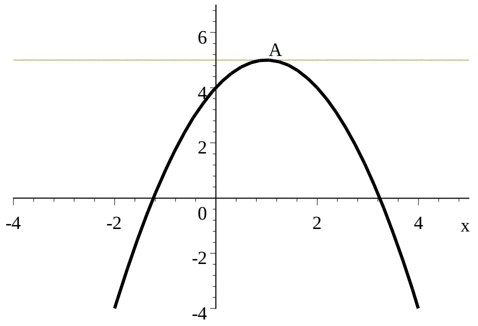
6 $f(x) = x(x – 2)^2$

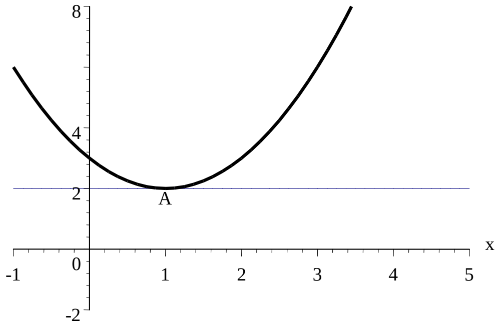
7. $f(x) = 1 + x – x^2 – x^3$
8. Tunjukkanlah grafik fungsi $f(x) = x^3 – 3x^2 + 3x – 10$ tidak pernah turun.

8. Titik Stasioner

Pada Gambar 9., sebelah kiri titik A kurva naik, dan sebelah kanan titik A kurva turun, sedangkan di titik A kurva tidak naik maupun turun, oleh karena itu A disebut titik *stasioner*. Titik stasioner *A* pada Gambar 9. ini disebut *titik balik maksimum*. Sedangkan pada dan Gambar 10., sebelah kiri titik A kurva turun dan sebelah kanan titik A kurva naik. Titik stasioner *A* pada Gambar 10. disebut *titik balik minimum*.

Baik pada Gambar 9., maupun Gambar 10., garis singgung di titik stasioner A sejajar dengan sumbu x, artinya gradien garis singgung grafik fungsi f di A adalah 0. Dengan kata lain, grafik f mencapai stasioner bila $f\,'(x) = 0$.





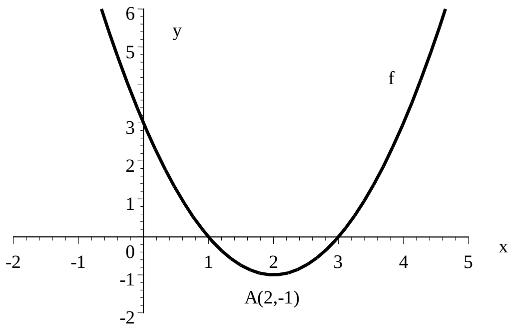
Gambar 9 Gambar 10

Contoh 1:
Tentukan titik stasioner dan jenisnya dari grafik $f(x) = x^2$-4x+3
Jawab:
Grafik f mencapai stasioner bila $f'(x) = 0$
$f(x) = x^2 - 4x + 3$, maka $f'(x) = 2x - 4$
$f'(x) = 0$, artinya $2x - 4 = 0$ atau $x = 2$
Nilai stasionernya $f(2) = 2^2 - 4.2 + 3 = -1$
Jadi titik stasionernya (2,-1)
Gunakan garis bilangan berikut untuk memeriksa jenis stasioner .

- - - + + +

2

x = 2 adalah absis titik stasioner, batas kurva naik atau turun. Daerah pada garis bilangan sebelah kiri 2 adalah negatif (-) sebab $f'(0) = 2.0 - 4 = -4$ negatif (-), sedangkan sebelah kanan 2 adalah positif (+), sebab $f'(3) = 2.3 - 4 = 2$ positif (+). Sebelah kiri x = 2 kurva turun dan sebelah kanan x = 2 kurva naik, disimpulkan jenis titik stasioner (2,-1) adalah titik minimum.
Jawaban di atas sesuai dengan grafik $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada Gambar 11.



Gambar 11.

Contoh 2:

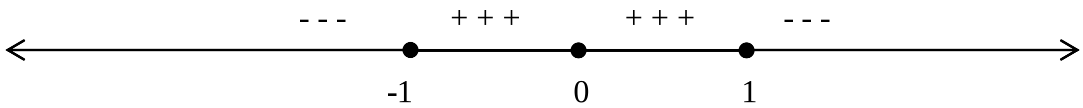
Tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya dari grafik $f(x) = 5x^3 - 3x^5$

Jawab:

Fungsi turunan dari $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ adalah $f'(x) = 15x^2 - 15x^4$.

Grafik f mencapai stasioner bila $f'(x) = 0 \Rightarrow 15x^2 - 15x^4 = 0 \Rightarrow 15x^2(1 - x)(1 + x) = 0, \Rightarrow 15x^2 = 0$ atau $1 - x = 0$ atau $1 + x = 0$, sehingga diperoleh absis titik-titik stasioner $x = 0$, $x = 1$, dan $x = -1$. Masing - masing ordinat titik stasionernya adalah, $f(0) = 5.0^3 - 3.0^5 = 0$, $f(1) = 5.1^3 - 3.1^5 = 2$, dan $f(1) = 5.(-1)^3 - 3.(-1)^5 = -2$, sehingga diperoleh titik-titik stasioner (0,0), (1,2) dan (-1,-2).

Untuk memeriksa jenis titik stasioner itu, digunakan garis bilangan sebagai berikut.

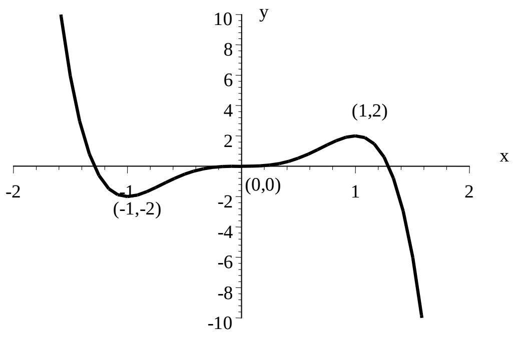


Daerah pada garis bilangan sebelah kiri -1 adalah negatif (-) sebab bila disubsitusi oleh sebarang bilangan kurang dari -1 misalnya -1, $f'(-2) = 15(-2)^2(1 -(-2))(1 + (-2)) = -180$ adalah bilangan negatif. $2.0 - 4 = -4$ negatif (-). Daerah antara -1 dan 0 adalah positif (+), sebab $f'(-½) = 15(-½)^2(1 -(-½))(1 + (-½)) = \frac{45}{16}$ adalah bilangan positif. Daerah antara 0 dan 1 adalah positif (+), sebab $f'(½) = 15(½)^2(1 - ½)(1 + ½) = \frac{45}{16}$ adalah bilangan positif. Daerah sebelah kanan 1 negatif (-), sebab $f'(2) = 15(2)^2(1 - 2))(1 + 2) = -180$ adalah bilangan negatif.

Titik (-1,-2) adalah titik balik minimum, karena grafik sebelah kiri titik ini turun dan sebelah kanan titik itu naik. Nilai $f(-1) = -2$ disebut *nilai balik minimum.*

Titik (1,2) adalah titik balik maksimum, karena grafik sebelah kiri titik ini naik dan sebelah kanan titik itu turun. Nilai $f(1) = 2$ disebut *nilai balik maksimim.*.

Titik (0,0) bukan titik balik minimum maupun minimum, karena grafik sebelah kiri titik ini naik dan sebelah kanan titik itu naik pula. Titik (0,0) pada kurva ini disebut *titik belok.*



Gambar 12.

Dari contoh di atas, secara umum, misalnya x = a memenuhi f ’(a) = 0, maka titik (a, f(a)) adalah titik balik maksimum atau titik balik maksimum atau titik belok. Jika f ’(x) ada untuk setiap titik disekitar x = a (yaitu interval kecil pada sumbu x yang memuat a) maka di sekitar x = a terdapat 4 kemungkinan untuk grafik f.

Titik (a,f(a)) merupakan titik balik maksimum dari f, bila

x	Sedikit sebelah kiri a (a^-)	a	Sedikit sebelah kanan a (a^+)
f ’(x)	Positif (+)	0	Negatif (-)

Titik (a,f(a)) merupakan titik balik minimum dari f, bila

x	Sedikit sebelah kiri a (a^-)	a	Sedikit sebelah kanan a (a^+)
f ’(x)	Negatif (-)	0	Positif (+)

Titik (a,f(a)) merupakan titik belok dari f, bila

x	Sedikit sebelah kiri a (a^-)	a	Sedikit sebelah kanan a (a^+)
f ’(x)	Positif (+)	0	Positif (+)

atau

x	Sedikit sebelah kiri a (a^-)	a	Sedikit sebelah kanan a (a^+)
f ’(x)	Negatif (-)	0	Negatif (-)

Tugas 8.

Tentukanlah nilai-nilai stasioner fungsi yang didefinisikan berikut ini dan tentukanlah jenis masing-masing nilai stasioner itu

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2 – 2x$
3. $f(x) = 4 – x^2$
4. $f(x) = (x + 1)(3 – x)$
5. $f(x) = x^3 – 3x$
6. $f(x) = 2x^3 – 9x^2 + 12x$
7. $f(x) = 2x^4 – 2x^2$
8. $f(x) = x + 1/x$
9. $f(x) = (4 – x)^2$
10. $f(x) = \sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$

9. Menggambar Kurva

Sebelumnya telah kita belajar menggambar berbagai grafik fungsi tertentu seperti, fungsi linear, kuadrat, dan lain sebagainya. Sekarang akan belajar menggambar berbagai grafik fungsi dengan memperhatikan titik-titik stasioner, titik-titik balik maksimum, minimum, kecekungan, dan lain-lain. Kemampuan menggambar kurva merupakan hal yang sangat penting dalam pengertian dan penggunaan Kalkulus. Dalam menggambar grafik fungsi yang dapat didefinisikan, beberapa atau semua hal berikut ini sangat membantu:

1. Menentukan titik potong grafik dengan sumbu x, diperoleh dari f(x) = 0
2. Menentukan titik potong grafik dengan sumbu y, diperoleh dari f(0)
3. Menentukan titik-titik stationer, diperoleh dari f ’(x) = 0
4. Menentukan jenis titik statsioner
5. Menentukan nilai f(x) untuk $x \to \infty$ dan $x \to -\infty$

Contoh

Contoh

Gambarlah grafik kurva $f(x) = x(x – 3)^2$

Jawab:

(1). Titik-titik potong dengan sumbu x

Titik potong dengan sumbu x diperoleh jika f(x) = 0, maka $x(x -3)^2 = 0$ diperoleh Titik potong dengan sumbu x adalah (0,0) dan (3,0).

(2) Titik potong dengan sumbu y

Titik potong dengan sumbu y diperoleh jika x = 0 maka $f(0) = 0(0-3)^2 = 0$

Titik potong dengan sumbu y adalah (0,0).

(3). Titik-titik stasioner

$f(x) = x(x – 3)^2 = x(x^2 – 6x + 9) = x^3 – 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 – 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x -12$

Titik -titik stasioner pada kurva diperoleh dari f ’(x) = 0

$3x^2 – 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 – 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$

$\Rightarrow (x-1) = 0$ atau $(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1$ atau $x = 3$

Untuk x = 1, maka $f(1) = 1(1-3)^2 = 4$, untuk x = 3 maka $f(3) = 3(3-3)^2 = 0$

Jadi titik-titik stasioner adalah (1, 4), dan (3, 0)

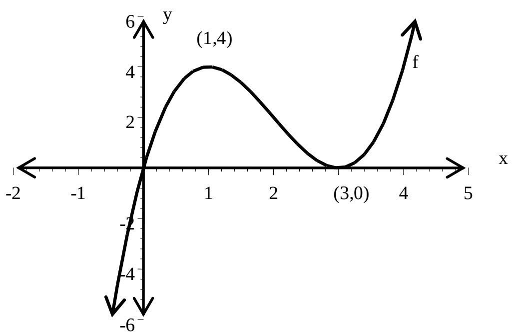
(4) Menentukan jenis stasioner

Absis titik stasioner adalah 1 dan 3, dengan menggunakan f ’(x) diperoleh

Sedikit sebelah kiri 1	x = 1	Sedikit sebelah kanan 1
Negatif (-)	f’(1) = 0	Positif (+)
	(1,4) titik statsioner maksimum	

Sedikit sebelah kiri 3	x = 3	Sedikit sebelah kanan 3
Positif (+)	f’(3) = 0	Negatif (-)
	(3,0) titik statsioner mminimum	

Semua keterangan di atas memungkinkan kita menggambar kurva, seperti tampak pada Gambar 21.



Gambar 21.

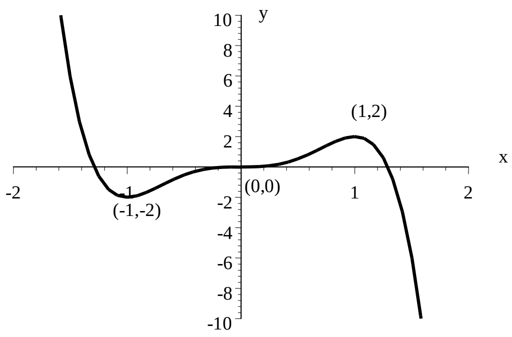
Tugas 9.

Gambarlah kurva-kurva berikut ini:

1. $y = x^2 - 4$
2. $y = 8x - x^2$
3. $y = 3x - x^3$
4. $y = (5 - x)^2$
5. $y = x^4$
6 $y = x(x - 1)^2$
7. $y = 1/3\ x^3 - ½\ x^2$
8. $y = 8 + 2x^2 - x^4$
9. $y = 3x^2 - x^3$
10. $y = x^3(4 - x)$
11. $y = x^4 - 2x^2$
12.

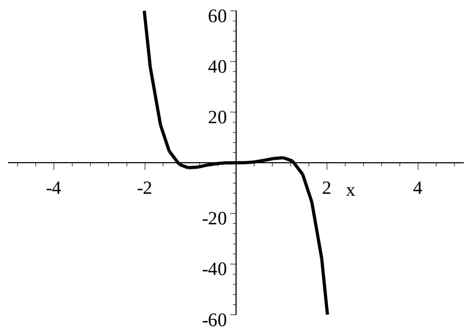
10. Nilai-nilai Maksimum dan Minimum suatu Fungsi dalam Interval Tertutup

Grafik fungsi f yang ditentukan dengan f(x) = $5x^3 - 3x^5$ yang telah dipelajari sebelumnya tampak pada Gambar 22.



Gambar 22.

Nilai maksimum f dalam interval tertutup $0 \le x \le 2$ dengan mudah dapat dilihat yaitu f(1) = 2. Tetapi untuk interval $0 \le x \le ½$ nilai maksimum f adalah f(½) = $\frac{17}{32}$ dan untuk interval $-2 \le x \le 2$ nilai maksimum f adalah f(- 2) = 56.



Gambar 23.

Dari Gambar 23., terlihat untuk interval $-2 \le x \le 2$ nilai minimum f adalah f(2) = - 56 dan nilai maksimum f adalah f(- 2) = 56, dapat ditulis $-56 \le f(x) \le 56$ untuk interval $-2 \le x \le 2$. Dengan demikian perlu diperhatikan bahwa nilai balik maksimum atau minimum dari fungsi f dalam suatu interval tertutup belum tentu nilai maksimu atau minimum dari f. Nilai maksimum dan minimum fungsi f dalam interval tertutup didapat dari nilai stasioner f dalam interval itu atau dari nilai f pada ujung-ujung interval.

Contoh 1:

Tentukan nilai minimum dan maksimum dari $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval $0 \le x \le 5$

Jawab:

(i) Menentukan nilai balik kurva f

$f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4$ dan $f''(x) = 2$

Absis titik stasioner diperoleh dari $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

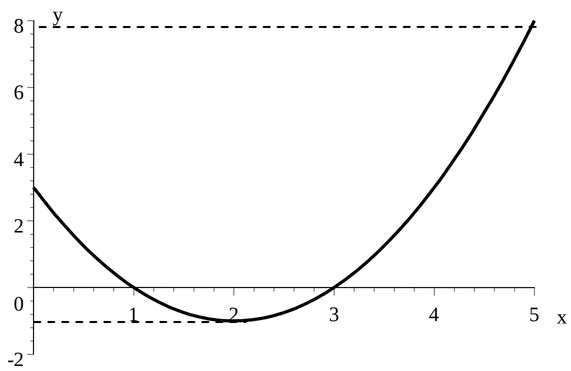
$f(2) = 2^2 - 4.2 + 3 = -1$ dan $f''(2) = 2 > 0$, sehingga (2,-1) merupakan titik balik minimum. Jadi nilai balik minimumnya -1.

(ii) Menentukan nilai f pada batas-batas interval.

$f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f(0) = 3$ dan $f(5) = 5^2 - 4.5 + 3 = 8$

Dari (i) dan (ii) diperoleh nilai minimum dari f adalah -1 dan nilai maksimum f adalah 8.

Jadi $-1 \le f(x) = x^2 - 4x + 3 \le 5$ pada interval $0 \le x \le 5$, seperti terlihat pada Gambar 24.



Gambar 24.

Contoh 2:

Tentukan nilai minimum dan maksimum dari $f(x) = x^3 - 6x^2$ pada $-1 \le x \le 3$

Jawab:

(i) Menentukan nilai balik kurva f

$f(x) = x^3 - 6x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x$ dan $f''(x) = 6x - 12$

Absis titik stasioner diperoleh dari $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 4) = 0$

$\Rightarrow 3x = 0$ atau $(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$ atau $x = 4$

$f(0) = 0^3 - 6(0)^2 = 0$ dan $f(4) = 4^3 - 6(4)^2 = 64 - 96 = -32$.

$f''(0) = 6.0 - 12 = -12 < 0$, sehingga (0,0) merupakan titik balik maksimum dan nilai balik maksimumnya adalah 0.

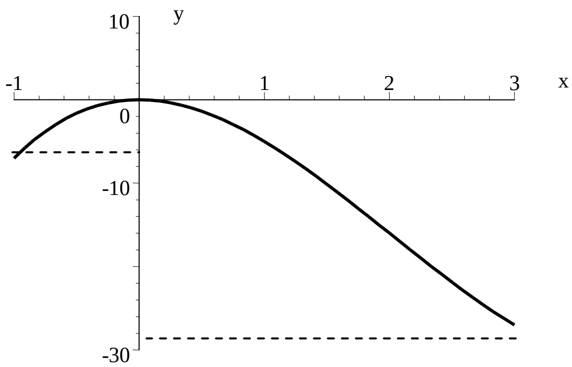
f ”(4) = 6.4 – 6 = 18 >0, sehingga (2,-32) merupakan titik balik minimum dan nilai balik minimumnya adalah -32. Nilai ini tidak diperhitungkan karena x = 4 di luar interval yang diberikan.

(ii) Menentukan nilai f pada batas-batas interval.

$f(x) = x^3 - 6x^2 \Rightarrow f(-1) = 1^3 - 6.\ 1^2 = -5$ dan $f(3) = 3^3 - 6.3^2 = 27 - 54 = -27$.

Dari (i) dan (ii) diperoleh nilai minimum dari f adalah -27dan nilai maksimum f adalah 0.

Jadi $-27 \le f(x) = x^3 - 6x^2 \le 0$ pada interval $0 \le x \le 5$, seperti terlihat pada Gambar 25.



Gambar 25.

Tugas 10

Tentukanlah nilai-nilai maksimum atau minimum fungsi-fungsi berikut dalam interval tertutup yang diberikan. Nyatakanlah hasilnya dalam bentuk $a \le f(x) \le b$ dan tunjukkanlah dengan sketsa.

1. f (x) = x^2 pada interval $-3 \le x \le 3$
2. f (x) = $x^2 - 9$ pada interval $-4 \le x \le 4$
3. f (x) = $2x - x^2$ pada interval $-1 \le x \le 1\frac{1}{2}$
4. f (x) = $2x^3 - 6x$ pada interval $-2 \le x \le 2$
5. f (x) = $2x^2 - x^4$ dalam {x I $-1 \le x \le 1$

11. Soal-soal tentang Maksimum dan Minimum

Contoh

Sebidang tanah terletak sepanjang suatu tembok. Tanah itu kan dipagari untuk peternakan ayam. Pagar kawat yang tersedia panjangnya 400 m. Peternakan itu dibuat berbentuk persegi panjang . Tentukanlah ukurannya agar terdapat derah peternakan yang seluas-luasnya.

Jawab:

Pertama-tama dibuat model matematika dari soal itu, kemudian dianalisa.

Jika lebar kandang x meter maka panjangnya $(400 – 2x)$ meter. Jelaslah bahwa $x \geq 0$ dan $(400 – 2x) \geq 0$. Jadi $0 \leq x \leq 200$.

Luas kandang dalam m^2 adalah $L(x) = x(400 – 2x) = 400x – 2x^2$

$L'(x) = 400 – 4x = 4(100 – x)$ dan $L''(x) = -4$

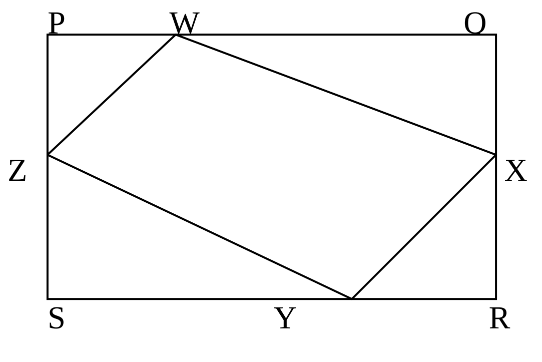
$L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 100$, karena $L''(100) = -4 < 0$, maka $L(100)$ nilai balik maksimum.

Jadi untuk $x = 100$ terdapat nilai balik maksimum $L(100) = 20.000$. Pada ujung-ujung interval $0 \leq x \leq 200$ terdapat $L(0) = 0$ dan $L(200) = 0$

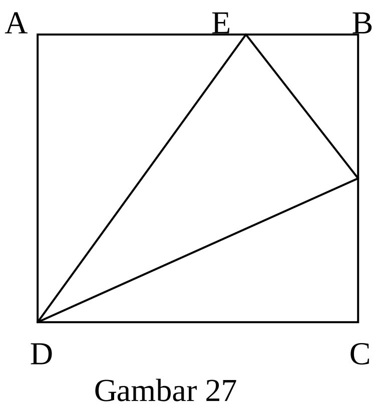
Jadi luas maksimum yang ditanyakan adalah $20.000\ m^2$ yang terjadi jika lebarnya 100 m dan panjangnya 200 m.

Tugas 11

1. Tinggi h meter suatu roket setelah t detik adalah $h(t) = 600t – 5t^2$. Tentukanlah tinggi maksimum roket itu.
2. Jumlah dua bilangan x dan y adalah 40, dan hasil kalinya p. Tulislah persamaan yang menyatakan hubungan antara x dan y. Kemudian nyatakan p dalam x. Tentukanlah hasil kali yang terbesar.
3. Keliling suatu persegipanjang 100 m
   a. Jika panjangnya x meter dan lebarnya y meter tulislah persamaan paling sederhana yang menyatakan hubungan antara x dan y
   b. Tulislah rumus luas L m2 untuk persegipanjang itu. Nyatakan L dalam x. Tentukanlah ukuran persegipanjang tersebut agar luasnya maksimum.
   c.



Gambar 26.



Gambar 27

4. Pada Gambar 27., tampak bujursangkar ABCD dengan sisi 10 cm, BE = x cm dan CF = 2x cm. Nyatakanlah panjang AE dan BF dalam x. Tunjukkanlah bahwa luas Δ DEF adalah L cm2 dengan $L(x) = 50 – 10x + x^2$. Kemudian tentukan x sehingga L minimum.

5. Sehelai karton berbentuk persegi panjang dengan lebar 5 cm dan panjang 8 cm. Pada tempat sudut karton itu dipotong bujursangkar yang sisinya x cm. Dari bangun yang didapat dibuat kotak tanpa tutup yang tingginya x cm. Tentukanlah ukuran kotak agar isinya sebanyak-banyaknya.
6. Segitiga siku-siku OAB terbentuk dari sumbu x, sumbu y dan garis g yang persamaannya y = 8 – 2x. Titik P(x,y) terletak pada garis g. Dari P dibuat garis-garis tegaklurus sumbu-sumbu sehingga terjadi persegipanjang dengan diagonal OP. Nyatakanlah luas persegipanjang itu dalam x. Tentukanlah koordinat P sehingga luas persegipanjang maksimum.
7. Suatu kotak alasnya berbentuk bujursangkar dengan sisi x cm dan tinggi kotak h cm, atasnya terbuka. Isi kotak 32 cm^3
   a. Tulislah persamaan yang menyatakan hubungan x dengan h.Tulislah juga rumus untuk luas permukaan kotak L cm^2 dinyatakan dengan x dan h
   b. Tunjukkan bahwa $L(x) = x^2 + 128/x$ dan kemudian tentukanlah ukuran kotak agar bahan untuk membuat kotak itu sesedikit mungkin.

12. Kecepatan Rata-rata dan Kecepatan Sesaat

Kita biasa mendengar pernyataan-pernyataan seperti “Waktu berpapasan dengan mobil polisi, mobil tadi sedang bergerak dengan kecepatan 20 meter per detik”. Apakah arti “20 m/det”(pada saat yang dimaksud)? Apabila mobil itu bergerak dengan *kecepatan tetap(konstan),* maka mobil itu akan menempuh jarak 20 m dalam waktu dua detik, dan seterusnya. Secara umum, jarak *s* meter, yang ditempuh dalam waktu *t* detik, dapat dihitung dengan rumus $s = 20t$ atau $20 = s/t$, artinya

$$\text{Kecepatan} = \frac{\text{Jarak yang ditempuh}}{\text{Waktu yang diperlukan}}$$

Apabila kecepatannya *tidak tetap*, maka situasinya menjadi lebih sulit.
Misalkan suatu mobil bertolak dari titik **O** dan mencapai jarak *s* meter dari **O** setelah bergerak *t* detik, dan jarak *s* meter dalam *t* detik itu memenuhi rumus $s = t^2$. Berdasarkan rumus kecepatan di atas, maka kecepatan = $s/t = \frac{t^2}{t} = t$ tidak tetap tergantung nilai t. Jadi mobil tadi bergerak dengan kecepatan yang tidak tetap.

Tetapi dari pengalaman kita merasa bahwa tiap-tiap saat mobil itu memiliki suatu kecepatan, yang misalnya dapat dibaca pada pengukur kecepatan. Muncul pertanyaan “Berapakah kecepatannya dalam m/det pada t = 1 ?” Jelas jawabannya tergantung pada $s = t^2$ dan pada t = 1.

Persamaan s = t^2 ini memasangkan suatu bilangan non-negatif s dengan tiap-tiap bilangan real t. Maka rumus s = t^2 menentukan suatu fungsi yang berdomain R. Sedangkan daerah hasilnya adalah himpunan semua bilangan real non-negatif.

Mencari arti kecepatan pada t = 1 jika s = t^2

Dengan menggunakan $s : t \to t^2$ adalah fungsi yang berkaitan dengan rumus s = t^2 diperoleh s(t) = t^2, yang memberikan jarak yang ditempuh dalam waktu t mulai dari t = 0. Jarak yang ditempuh dari t = 0 sampai t = 1 adalah s(1) = 1^2 = 1 m. Jarak yang ditempuh dari t = 0 sampai t = 2 adalah s(2) = 2^2 = 4 m. *Kecepatan rata-rata* dalam selang waktu dari t = 1 sampai t = 2 adalah

$$\frac{\text{perubahan jarak}}{\text{perubahan waktu}} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{1} = 3 \text{ m/dtk.}$$

Dengan cara yang sama diperoleh kecepatan rata-rata dari t = 1 sampai t = 1,5 adalah

$$\frac{s(1{,}5) - s(1)}{1{,}5 - 1} = \frac{2{,}25 - 1}{0{,}5} = 2{,}5 \text{ m/dtk.}$$

Untuk memperoleh jawaban atas pertanyaan “Berapakah kecepatan pada t = 1?”, biasa disebut ”kecepatan sesaat untuk t = 1” kita membuat daftar kecepatan rata-rata dalam selang-selang waktu yang singkat dari t = 1 sampai t = 1 + h, untuk nilai-nilai positif h yang makin kecil.

Dengan menghitung $\dfrac{s(1+h) - s(1)}{(1+h) - 1}$ untuk tiap-tiap h, kita peroleh

H	0,05 0,04 0,03 0.02 0,01
$\dfrac{s(1+h) - s(1)}{(1+h) - 1}$	2,05 2,04 2,03 2,02 2,01

Baris kedua menunjukkan *kecepatan rata-rata* $\dfrac{s(1+h) - s(1)}{(1+h) - 1}$ pada selang

h

waktu dari t = 1 sampai t = 1 + h adalah sangat dekat pada 2 (m/det) untuk h positif kecil.

Hal ini mengingatkan kita pada konsep limit yaitu, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{s(1+h) - s(1)}{h} = 2$.

Jika jarak yang ditempuh sebuah benda adalah s meter dalam t detik dengan s = s(t) (jarak sebagai fungsi dari waktu), maka *kecepatan rata-rata* dalam selang waktu antara t_1 dan $t_2 = t_1 + h$ adalah $\frac{s(t_1+h)-s(t_1)}{(t_1+h)-t_1} = \frac{s(t_1+h)-s(t_1)}{h}$

dan kecepatan sesaat untuk $t = t_1$ adalah $\lim\limits_{h\to 0}\frac{s(t_1+h)-s(t_1)}{h}$

Contoh:
Jarak s meter yang ditempuh dalam t detik oleh benda yang jatuh dinyatakan oleh rumus $s = 5t^2$. Carilah kecepatan mobil diatas sesudah 10 detik dari saat berangkatnya.

Jawab:

Persoalan ini adalah mencari kecepatan sesaat mobil untuk t = 10, dapat diperoleh dengan menghitung $\lim\limits_{h\to 0}\frac{s(10+h)-s(10)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{5(10+h)^2-5(10)^2}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{5(100+20h+h^2)-5(100)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{500+100h+5h^2-500}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h(100+h)}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0}100+h$ = 100 m/dtk.

Tugas 12

1. Jarak s cm yang ditempuh oleh sebutir kelereng yang mengguling pada waktu t detik dinyatakan dengan $s(t) = 5t - t^2$. Hitunglah kecepatan kelereng saat t = 2.
2. Sebuah bola dilemparkan tegak lurus ke atas dengan kecepatan permulaan 30 m/det. Bola itu bergerak sesuai dengan persamaan $h = 30t - 5t^2$. Dalam rumus itu h menunjukkan tinggi bola di atas titik keberangkatan diukur dengan meter, setelah t detik. Carilah kecepatan bola pada saat t = 1,5 detik