Hand-Out
Geometri Transformasi

Bab I. Pendahuluan

1.1 Vektor dalam $\mathbf{R}^2$

Misalkan $\mathbf{u} = (x_1,y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2,y_2)$ dan $\mathbf{w} = (x_3,y_3)$ serta k skalar (bilangan real)

Definisi 1. : Penjumlahan vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = ((x_1+ x_2), (y_1+y_2))$

Definisi 2. : Perkalian skalar dengan vektor $k\mathbf{u} = (x_1,y_1) = (kx_1,ky_1)$

Teorema 1.1

(Sifat-sifat penjumlahan vektor dan perkalian skalar dengan vektor)

a. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
b. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
c. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
d. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
e. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
f. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
g. $(m + n)\,\mathbf{u} = m\mathbf{u} + n\mathbf{u}$
h. $m\,(n\mathbf{u}) = (mn)\,\mathbf{u}$

Vektor nol dilambangkan $\mathbf{0} = (0,0)$.

Bukti 1.1.a

Misalkan $\mathbf{u} = (x_1,y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2,y_2)$ dan $\mathbf{w} = (x_3,y_3)$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= ((x_1,y_1)+ (x_2,y_2))+ (x_3,y_3)\\
&= (x_1+x_2,\ y_1+ y_2) + (x_3,y_3)\\
&= ((x_1+x_2)+x_3,\ (y_1+ y_2)+y_3)\\
&= (x_1+(x_2+x_3),\ y_1+ (y_2+y_3))\\
&= (x_1,y_1) +(x_2+x_3,\ y_2+ y_3)\\
&= (x_1,y_1)+ ((x_2,y_2))+ (x_3,y_3))\\
&= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})
\end{aligned}
$$

1.2 Inner Product (perkalian dalam) dua vektor

Misalkan $\mathbf{u} = (x_1,y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2,y_2)$ dan $\mathbf{w} = (x_3,y_3)$ serta k skalar (bilangan real)

Definisi 3.

Misalkan $\mathbf{u} = (x_1,y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2,y_2)$, yang dimaksud *perkalian dalam* vektor **u** dan **v** adalah $< \mathbf{u},\mathbf{v} > = x_1y_1 + x_2y_2$

Teorema 1.2 :

(Sifat- sifat inner produk)

a. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} > = < \mathbf{u}, \mathbf{v}> + < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$
b. $< \mathbf{u}, k\mathbf{v} > = k < \mathbf{u},\mathbf{v} >$
c. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = < \mathbf{v}, \mathbf{u} >$
d. Jika $< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = 0$ untuk semua **u**, maka $\mathbf{v} = 0$

Bukti 1.2.b

Misalkan $\mathbf{u} = (x_1,y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2,y_2)$ dan k suatu skalar.

$$
\begin{aligned}
<\mathbf{u}, k\mathbf{v}> &= <(x_1,y_1), (kx_2,ky_2)> \\
&= x_1(kx_2) + y_1(ky_2) \\
&= (x_1k)x_2 + (y_1k)y_2 \\
&= (kx_1)x_2 + (ky_1)y_2 \\
&= k(x_1x_2) + k(y_1y_2) \\
&= k(x_1x_2 + y_1y_2) \\
&= k <\mathbf{u},\mathbf{v}>
\end{aligned}
$$

Buktikan sifat-sifat yang lainnya sebagai latihan.

Definisi 4:

Jika vektor $\mathbf{u} = (x_1,y_1)$, maka panjang vektor $\mathbf{u}$ adalah $|\mathbf{u}| = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}$

Teorema 1.3

(sifat-sifat panjang vektor)

a. $|\mathbf{u}| \geq 0$

b. $|\mathbf{u}| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

c. $|k\mathbf{u}| = |k|\,|\mathbf{u}|$

d. $|\mathbf{u}|^2 = <\mathbf{u}, \mathbf{u}>$.

Bukti 1.3.c

Misalkan $\mathbf{u} = (x_1,y_1)$, dan k suatu bilangan real.

$$
\begin{aligned}
|k\mathbf{u}| &= \sqrt{((kx_1)^2 + (ky_1)^2)} \\
&= \sqrt{(k^2x_1^2 + k^2y_1^2)} \\
&= \sqrt{k^2(x_1^2 + y_1^2)} \\
&= |k| \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} \\
&= |k|\,|\mathbf{u}|
\end{aligned}
$$

Teorema 1.4: (Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz)

$$|<\mathbf{u},\mathbf{v}>| \leq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$$

Bukti:

Misalkan vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ bukan vektor nol, dan tinjau fungsi real f yang didefinisikan sebagai berikut:

$f(t) = |\mathbf{u} + t\mathbf{v}|^2$ untuk t bilangan real.

Berdasarkan sifat 3a jelaslah $f(t)$ merupakan fungsi non-negatif untuk semua nilai t dan berdasarkan sifat 3d diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(t) &= |\mathbf{u} + t\mathbf{v}|^2 = <\mathbf{u}+t\mathbf{v},\mathbf{u}+t\mathbf{v}> = <u, u + tv> + <tv, u+tv> \\
&= (<\mathbf{u},\mathbf{u}> + <\mathbf{u},t\mathbf{v}>) + (<t\mathbf{v},\mathbf{u}> + <t\mathbf{v}, t\mathbf{v}>) \\
&= |\mathbf{u}|^2 + t <\mathbf{u},\mathbf{v}> + t <\mathbf{v},\mathbf{u}> + t^2<\mathbf{v},\mathbf{v}>
\end{aligned}
$$

$$f(t) = |\mathbf{v}|^2 t^2 + 2 <\mathbf{u},\mathbf{v}> t + |\mathbf{u}|^2.$$

Fungsi kuadrat bernilai non negatif untuk semua nilai t, jika diskriminannya (D = $B^2 - 4AC$) non-negatif. Dengan kata lain $(2 <\mathbf{u},\mathbf{v}>)^2 - 4(|\mathbf{v}|^2)(|\mathbf{u}|^2) + <\mathbf{u},\mathbf{v}>^2 \leq |\mathbf{v}|^2 |\mathbf{u}|^2$ atau $<\mathbf{u},\mathbf{v}> \leq |\mathbf{v}| |\mathbf{u}|$.

Jika $|<\mathbf{u},\mathbf{v}>| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$, dikatakan bahwa vektor **u** dan **v** saling *proporsional.*

Jika salah satu vektor **u** dan vektor **v** adalah vektor nol, dengan mudah kita buktikan bahwa $|<\mathbf{u},\mathbf{v}>| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$.

Berikan contoh pasangan vektor yang saling proporsional ! Kemudian sebagai latihan, buktikan bahwa jika vektor **u** kelipatan kelipatan vektor **v** maka **u** dan **v** saling proposional.

Teorema Akibat 1.5

Jika **u** dan **v** vektor dalam $\mathbf{R}^2$, maka $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

Bukti:

$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2<\mathbf{u},\mathbf{v}> |\mathbf{v}|^2 \leq |\mathbf{u}|^2 + 2 |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| |\mathbf{v}|^2 = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2$

Disimpulkan $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

Berdasarkan yang telah dikemukakan di atas akan berlaku $<\mathbf{u},\mathbf{v}> = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$ jika **u** kelipatan dari **v**. Misalkan $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$, diperoleh $<c\mathbf{v},\mathbf{v}> = c<\mathbf{v},\mathbf{v}> = c|\mathbf{v}|^2$.

Tetapi $|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| = |c\mathbf{v}| |\mathbf{v}| = |c| |\mathbf{v}| |\mathbf{v}| = |c| |\mathbf{v}|^2$. Dengan demikian haruslah $c = |c$, dengan kata lain haruslah $c \geq 0$.

Jadi akan berlaku $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ apabila **u** kelipatan non negatif dari **v**.

Definisi 5: Jarak dua titik

Jika **p** vektor posisi dari titik P dan **q** vektor posisi titik Q, maka $PQ = |\mathbf{q} - \mathbf{p}|$

Teorema 1.6. (Sifat-sifat jarak dua titik)

a. $PQ \geq 0$
b. PQ = 0 jika dan hanya jika P berimpit dengan Q
c. PQ = QP
d. $PQ + QR \geq PR$ (ketidaksamaan segitiga)

Bukti 1.6.d

Berdasarkan definisi $PQ = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$, $QR = |\mathbf{q} - \mathbf{r}|$, dan $PR = |\mathbf{p} - \mathbf{r}|$ dan berdasarkan teorema akibat 1.5 diperoleh

$|\mathbf{p} - \mathbf{q}| + |\mathbf{q} - \mathbf{r}| \geq |(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + (\mathbf{q} - \mathbf{r})| = |\mathbf{p} - \mathbf{r}|$, atau $PQ + QR \geq PR$.

Selanjutnya PQ + QR = PR berlaku jika dan hanya jika PQ kelipatan non-negatif dari QR atau PQ = c QR untuk $c \geq 0$.

Berdasarkan akibat teorema 4, selajutnya kesamaan PQ + QR = PR berlaku jika dan hanya jika $\mathbf{p} - \mathbf{q} = c(\mathbf{q} - \mathbf{r})$ untuk suatu c bilangan non negatif.

1.3. Latihan

1. Buktikan teorema 1
2. Buktikan teorema 2
3. Buktikan teorema 3

Bab 2 Garis

Sebuah garis dapat dibentuk oleh vektor-vektor yang proporsional dan memiliki titik persekutuan. Arah garis ditentukan oleh vektor-vektor yang bukan vektor nol yang saling proporsional. Himpunan vektor yang proporsional dengan **v** ditulis [**v**] = { t**v** : t ∈**R**}.

Jika P suatu titik dan **v** bukan vektor nol, maka garis = { X : X – P∈ [**v**] } merupakan garis yang melalui titik P dengan arah [**v**]. Garis tersebut biasa pula dituliskan sebagai = P + [**v**] dan v disebut vektor arah dari .

Jika sebuah garis dan X sebuah titik, banyak ungkapan yang digunakan untuk menyatakan X ∈ , seperti (i) memuat X, (ii) X terletak pada , atau (iii) melalui X.

Contoh 1.

Nyatakan persamaan garis = { X: 3x + 5y + 15 = 0, x, y ∈**R**} dalam bentuk sebagai = P + [**v**] !

Jawab:

Pilihlah sebuah titik P yang terletak pada garis , yaitu P(0,-3).

Pilihlah sebuah vektor arah dari garis yaitu **v** = (5,-3).

Salah satu bentuk persamaan garis tersebut adalah = (0, -3) + [(5,-3)].

Bentuk P + [**v**] untuk menyatakan sebuah garis tidak tunggal, tergantung kepada titik P dan vektor arah **v** yang dipilih.

Persamaan (-5,0) + [(-5,3)], merupakan bentuk lain dari persamaan garis tersebut.

Jika sebuah garis dan X sebuah titik, ada beberapa ungkapan untuk menyatakan hubungan X ∈ , antara lain (i) memuat X, (ii) X terletak pada , dan (iii) melalui X.

Karena pasangan bilangan yang menyatakan koordinat sebuah titik P sama dengan pasangan bilangan yang menyatakan vektor posisinya yaitu **p**, maka selanjutnya penulisan antara P dan p dapat dipertukarkan.

Teorema 2.1

Misalkan P dan Q adalah dua titik yang berbeda, maka terdapat tepat sebuah garis yang memuat P dan Q.

Bukti:

Misalkan **v** bukan vektor nol. Garis P + [**v**] melalui Q jika dan hanya jika Q – P∈ [**v**], artinya [Q- P] = [**v**]. Dengan demikian garis P + [Q- P] adalah unik, dengan kata lain terdapat tepat sebuah garis yang melalui P dan Q.

Sebuah titik X yang terletak pada garis PQ dituliskan sebagai

$X = \alpha (t) = P + t(Q-P) = (1-t)P + tQ$.

Persamaan ini merupakan persamaan parametrik dari garis tersebut.

Misalkan titik-titik $X_1 = \alpha(t_1)$ dan $X_2 = \alpha(t_2)$ terletak pada garis PQ, maka jarak kedua titik tersebut

$$X_1 X_2 = | X_1 - X_2 |$$
$$= | ((1-t_1)P + t_1 Q) – ((1-t_2)P + t_2 Q) |$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\, (P - t_1P + t_1Q) - ((P - t_2P + t_2Q) \right| \\
&= \left|\, P - t_1P + t_1Q - P + t_2P - t_2Q) \right| \\
&= \left| (t_2P - t_1P) - (t_2Q - t_1Q) \right| \\
&= \left| (t_2 - t_1)(P - Q) \right| \\
&= \left| t_2 - t_1 \right| \left| P - Q \right|
\end{aligned}
$$

Definisi
Misal P, Q, dan X tiga titik yang berbeda pada bidang $\mathbf{E}^2$.
X terletak antara P dan Q jika dan hanya jika X = (1-t)P + tQ dengan 0< t < 1.

Teorema 2.2
Misal titik X, P, dan Q tiga titik yang berbeda pada bidang $\mathbf{E}^2$.
X di antara P dan Q jika dan hanya jika PX + XQ = PQ
Bukti:
Misalkan X terletak di antara P dan Q, maka untuk suatu t dengan 0 <t <1 berlaku X = (1-t)P + tQ. Akan ditunjukkan bahwa PX + XQ = PQ
PX = $|P - X| = |P - ((1-t)P + tQ)| = |t (P - Q)| = t|P - Q|$.
XQ = $|X - Q| = |(1-t)P + tQ - Q| = |(1-t) (P - Q)| = (1-t)|P - Q|$.
PX + XQ = $t|P - Q| + (1-t)|P - Q| = |P - Q|$ = PQ.
Sebaliknya, jika PX + XQ = PQ akan ditunjukkan X terletak di antara P dan Q. Berdasarkan teorema akibat 1.5 ada bilangan positif u sehingga P – X = u (X – Q) atau (1 + u)X = P + uQ atau $X = \dfrac{1}{1+u}P + \dfrac{u}{1+u}Q$.
Misalkan t = u/(1+u), karena u bilangan positif, maka 0 < t < 1, dan 1 – t = 1/(1+u), sehingga X = (1-t)P + tQ. Jadi X terletak di antara P dan Q.

Definisi
Misalkan P dan Q dua titik yang berbeda
Himpunan yang memuat titik P dan Q serta semua titik di antara keduanya disebut ruas garis PQ.
P dan Q disebut titik ujung dan titik lainnya disebut titik interior.

Definisi.
Misalkan M sebuah titik interior pada ruas garis PQ.
M disebut titik tengah PQ jika dan hanya jika PM = MQ = ½ PQ

Buktikan : jika M titik tengah PQ maka M = ½ (P +Q)

Jika dua garis ¯ dan *m* masing-masing melalui sebuah titik P, dikatakan mereka berpotongan di titik P dan P disebut titik potong keduanya.

Teorema 2.3
Dua garis yang berlainan paling banyak berpotongan di satu titik.
Bukti:

Andaikan garis dan *m* berpotongan lebih di satu titik, misalnya kedua garis itu berpotongan di dua titik yaitu P dan Q. Akibatnya garis = P + t (P-Q), juga *m* = P + t (P-Q). Dengan demikian = *m*, atau dengan kata lain dan *m* berimpit. Hal ini bertentangan dengan pernyataan yang diberikan bahwa dan *m* dua garis yang berbeda. Dengan demikian pengandaian salah, haruslah dan *m* berpotongan di satu titik.

Jika ada tiga garis atau lebih melalui sebuah titik P, dikatakan bahwa garis-garis tersebut *konkuren*. Jika ada tiga titik atau lebih terletak pada sebuah garis, maka titik-titik tersebut dikatakan *kolinear*.

Definisi
Dua vektor v dan w disebut ortonormal jika dan hanya jika $\langle \mathbf{v},\mathbf{w} \rangle = 0$.

Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ dan tetapkan bahwa $\mathbf{v}^{\perp} = (-v_2, v_1)$, maka $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{v}^{\perp}$ saling ortogonal (tegaklurus) dan memiliki panjang yang sama. Dengan mudah dapat kita peroleh bahwa
$\mathbf{v}^{\perp\perp} = -\mathbf{v}$.
Sebuah vektor yang memiliki panjang satu satuan disebut vektor satuan. Vektor satuan dari vektor **u** adalah $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|$. Jika pasangan vektor satuan **v** dan **w** yang saling ortogonal disebut pasangan ortonormal.

Teorema 2. 4
Jika **v** dan **w** pasangan ortonormal pada $\mathbf{R}^2$, maka untuk semua $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ berlaku
$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x},\mathbf{v} \rangle \mathbf{v} + \langle \mathbf{x},\mathbf{w} \rangle \mathbf{w}$.
Bukti:
Karena **v** dan **w** bebas linear, maka **v** dan **w** merupakan vektor basis dari $\mathbf{R}^2$.
Jadi untuk suatu $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ ada konstanta yang λ dan μ yan unik (tunggal)sehingga
$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$.
Berdasarkan sifat-sifat dasar perkalian dalam dan karena un dan v vektor satuan yang ortonormal, maka diperoleh

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \langle (\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda\mathbf{v},\mathbf{v} \rangle + \langle \mu\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \lambda\langle \mathbf{v},\mathbf{v} \rangle + \mu\langle \mathbf{w},\mathbf{v} \rangle = \lambda.1 + 0 = \lambda.$$

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{w} \rangle = \langle (\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle = \langle \lambda\mathbf{v},\mathbf{w} \rangle + \langle \mu\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \lambda\langle \mathbf{v},\mathbf{w} \rangle + \mu\langle \mathbf{w},\mathbf{w} \rangle = 0 + \mu.1 = \mu.$$

Persamaan Garis
Jika sebuah garis dengan vektor arah **v**, maka $\mathbf{v}^{\perp}$ disebut vektor normal dari .
Jelaslah sebarang dua vektor normal dari garis yang sama saling proporsional.

Teorema 2.5
Jika P sebuah titik dan (**v**, **N**) pasangan vektor yang saling ortonormal, maka
$P + [\mathbf{v}] = \{X: \langle X - P, \mathbf{N} \rangle = 0\}$.
Bukti:

Berdasarkan teorema 2.4, diperoleh identitas

$X - P = \langle X - P, \mathbf{v}\rangle\mathbf{v} + \langle X - P, \mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$ untuk setiap X di $\mathbf{R}^2$. Akan ditunjukkan X terletak pada garis P + [**v**] jika dan hanya $\langle X - P, \mathbf{N}\rangle = 0$.

Pertama, misalkan X terletak pada garis P + [**v**], artinya X = P + t**v** untuk suatu t bilangan real, maka $\langle X\text{-}P, \mathbf{N}\rangle = \langle t\mathbf{v},\mathbf{N}\rangle = t\langle \mathbf{v},\mathbf{N}\rangle = 0$.

Sebaliknya, jika $\langle X\text{-}P, \mathbf{N}\rangle = 0$, maka identitas

$X - P = \langle X - P,\mathbf{v}\rangle\mathbf{v} + \langle X - P, \mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$ dapat disederhanakan menjadi

$X - P = \langle X - P,\mathbf{v}\rangle\mathbf{v}$ atau $X = P + \langle X - P,\mathbf{v}\rangle\mathbf{v}$ atau X = P + [**v**].

Akibat teorema 2.5

Jika **n** bukan vektor nol, maka $\{X : \langle X - P, \mathbf{n}\rangle = 0\}$merupakan garis itu melalui P dengan vektor normal **n** dan vektor arahnya adalah $\mathbf{n}^{\perp}$.

Bukti:

Vektor **n** bukan vektor nol, maka vektor $\mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ ada dan proprosional dengan vektor **n.**

Misalkan $\mathbf{N} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ adalah vektor satuan untuk vektor n. Dengan mudah dapat dibuktikan $\langle X - P, \mathbf{n}\rangle = 0$ jika dan hanya jika :$\langle X - P, \mathbf{N}\rangle = 0$

Vektor $\mathbf{N}^{\perp}$, dan N merupakan pasangan ortonormal, berdasarkan teorema 2.5

$P + [\mathbf{N}^{\perp}] = \{X:\langle X - P, \mathbf{N}\rangle = 0\}$. yaitu garis yang melalui P dengan vektor normal **N** dan vektor arahnya $\mathbf{N}^{\perp}$. Vektor **N** dan $\mathbf{N}^{\perp}$ masing-masing proposional dengan dengan **n** dan $\mathbf{n}^{\perp}$. Disimpulkan bahwa $\{X:\langle X - P, \mathbf{n}\rangle = 0\}$adalah garis yang melalui P dengan vektor normal **n** dan vektor arahnya $\mathbf{n}^{\perp}$.

Vektor **N** dan $\mathbf{N}^{\perp}$

Pada geometri analitik elementer telah kita ketahui bahwa $\{(x,y): ax + by + c = 0\}$ menyatakan sebuah garis apabila $a^2 + b^2 \neq 0$.

Teorema 2.6.

Misalkan a, b, dan c bilangan real,

a. jika a = 0, b = 0 dan $c \neq 0$, maka $\{(x,y): ax + by + c = 0\}$ merupakan himpunan kosong.
b. jika a = 0, b = 0 dan c = 0, maka $\{(x,y): ax + by + c = 0\}$ merupakan suatu bidang pada $\mathbf{R}^2$.
c. jika $a^2 + b^2 \neq 0$, maka $\{(x,y): ax + by + c = 0\}$ adalah garis dengan vektor normal (a,b) dan sebaliknya.

Bukti 2.6.c.

Jika $a^2 + b^2 \neq 0$, (-c/a,0) dan (0,-c/b) merupakan anggota dari himpunan

$\{(x,y): ax + by + c = 0\}$, artinya himpunan tersebut tidak kosong.

Misalkan $P(x_1,y_1)$ diperoleh

$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow c = -(ax_1 + by_1) \Leftrightarrow ax + by -(ax_1 + by_1) = 0$

$\Leftrightarrow a(x-x_1) + b(y - y_1) = 0 \Leftrightarrow \langle (x-x_1, y - y_1), (a,b)\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle (x,y) - (x_1, y_1), (a,b)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (x,y)\text{-}P, (a,b)\rangle = 0$.

Berdasarkan teorema di atas (akibat teorema 2.5), disimpulkan sebagai suatu garis yang melalui P dengan vektor normal (a,b).

Garis-garis yang saling tegaklurus

Dua garis ℓ dan m dikatakan saling tegaklurus jika dan hanya jika pasangan vektor arahnya saling ortogonal, dilambangkan $\ell \perp m$. Dua segmen (ruas garis) disebut saling tegaklurus jika masing-masing garis yang memuatnya saling tegaklurus.

Teorema 2.7 (Pythagoras)

Misalkan P, Q dan R tiga titik yang berbeda.

$|R - P|^2 = |Q - P|^2 + |R - Q|^2$ Jika dan hanya jika garis $\overleftrightarrow{QP} \perp \overleftrightarrow{RQ}$

Teorema 2.8

Jika $\ell \perp m$, maka ℓ dan m memiliki tepat sebuah titik persekutuan

Teorema 2.9

Jika X sebuah titik dan ℓ sebuah garis, maka ada tepat sebuah garis m melalui X dan tegaklurus *m*, dengan

a. m = X + [**N**], dengan **N** vektor normal satuan untuk garis ℓ.
b. F = X - <X – P,**N**>**N**, dengan P suatu titik pada garis ℓ
c. d(X,F) = $|$<X – P, **N**>$|$ dan m dengan F

Teorema 2.10

Jika ℓ sebuah garis dan X titik di luar garis ℓ serta F titik pada garis ℓ sedemikian hingga garis $\overline{XF} \perp \ell$, maka F adalah sebuah titik terletak pada garis ℓ yang terdekat dengan X.

Definisi:

Jika ℓ sebuah garis dan X titik di luar garis ℓ serta F titik pada garis ℓ sedemikian hingga garis $\overline{XF} \perp \ell$. Bilangan d(F,X) dikatakan jarak dari X terhadap ℓ, ditulis d(X, ℓ)

Catatan: d(X, ℓ) adalah jarak terdekat dari X ke ℓ.

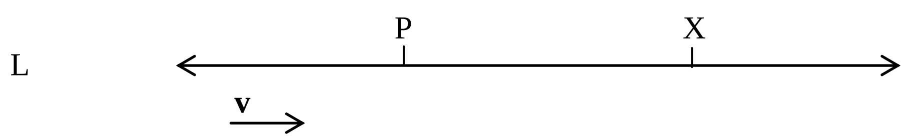
Gradien garis L adalah nilai tan θ dengan θ adalah ukuran sudut yang dibentuk garis L dengan sumbu x arah positif.

Vektor arah garis L adalah vektor yang mempunyai arah yang sama dengan arah garis L.

Vektor normal garis L adalah vektor yang tegaklurus terhadap vektor arah garis L
Jika L : ax + by + c = 0 dengan b ≠ 0, maka gradien garis L adalah –a/b, dan salah satu vektor arah garis L adalah (-b, a), serta salah satu vektor normal garis L adalah (a,b).

Vektor normal satuan garis L : ax + by + c = 0 adalah (a,b)/$|$(a,b)$|$.

Jika L : $ax + by + c = 0$ dan $b = 0$ gradien garis L tidak terdefinisi, tetapi vektor arah dan vektor normalnya ada (terdefinisi).
Garis L = { $X(x,y)$: $ax + by + c = 0$} dapat dinyatakan melalui vektor arah garis L sebagai berikut: L = { $X(x,y) = P(x_1,y_1) + t\mathbf{v}$, untuk setiap t bilangan real} dengan P adalah sebuah titik pada garis L dan **v** vektor arah garis L.
Bukti:
Misalkan L : $ax + by + c = 0$ dan $P(x_1,y_1)$ pada L .
Vektor arah adari L adalah (-b,a), akan ditunjukkan bahwa untuk setiap titik X (x,y) pada L ada t bilangan real sehingga $X = P + t\mathbf{v}$.
Ambil X titik sebarang pada garis L. Vektor X – P mempunyai arah yang sama dengan **v**, dengan demikian ada t bilangan real sehingga $X - P = t\mathbf{v}$ atau $X = P + t\mathbf{v}$.



Contoh 1:
Tuliskan L : $3x - 4y - 12 = 0$ dalam bentuk $X = P + t\mathbf{v}$
Jawab:
Vektor arah dari garis L adalah **v** = (4,3).
Pilih sebuah titik P pada garis L, misal P(4,0).
Persamaan garis L : X = (4,0) + t(4,3) = (4+4t, 3t) untuk semua bilangan real t.

Garis L = { $X(x,y)$: $ax + by + c = 0$} dapat dinyatakan melalui vektor normal satuan garis L sebagai : < $X(x,y) - P(x_1,y_1)$, **N**> = 0, dengan P sebuah titik pada garis L dan **N** adalah vektor normal satuan garis L

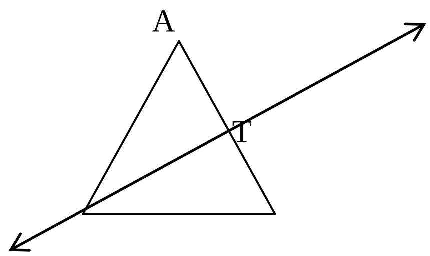
Bukti:
Misalkan X (x,y) sembarang titik pada garis L, dan N vektor normal dari L..
Pilih sebuah titik P pada garis L, maka vektor PX tegaklurus N. Dengan kata lain < X – P, N> = 0

Contoh 2:
Tuliskan persamaan garis L: $3x - 4y - 12 = 0$
Vektor normal dari L adalah N = (3,-4).
Pilih sebuah titik P(4,0) pada garis L
Persamaan garis L dapat ditulis sebagai < X –(4,0), (3,-4)> = 0

Latihan:
1. Diketahui garis L : X = (2 +5t,-1- 12t) dalam bentuk $ax + by + c = 0$ dan dalam bentuk <X - P, N>= 0
2. Diketahui garis L: <X – (4,-1), (12,5) > = 0. Nyatakan dalam bentuk $ax + by + c = 0$ dan X = P + tv untuk setiap t bilangan real.

II. Refleksi

Perhatikan gambar berikut: Sebuah titik $A(x_1,y_1)$ dicerminkan terhadap garis L: ax + by + c + 0, menghasilkan titik $A'((x_{1'},y_{1'})$



T = ½ (A + A')
PA + AT = PT
AT = <AP, N>N
Pilih vektor normal yang searah dengan vektor AA'
Vektor AA' = 2 vektor AT artinya
Refleksi titik A terhadap garis L : ax + by + c = 0 ditulis
Ω **A** = **A** - 2< **A** – **P**, **N**> dengan **P** sebuah titik pada L dan **N** vektor normal satuan dari L
Catatan:
Pasangan bilangan (koordinat titik P ekivalen dengan vektor posisi titik P).

III. Rotasi

Refleksi berturut-turut terhadap dua garis yang berpotongan menghasilkan rotasi terhadap titik potong kedua garis tersebut sejauh dua kali ukuran sudut kedua garis tersebut. Catatan: Ukuran sudut positif adalah berlawanan arah dengan jarum jam.

Refleksi berturut-turut terhadap dua garis yang berpotongan yang saling tegaklurus menghasilkan rotasi setengah putaran terhadap titik potong kedua garis tersebut.

IV. Translasi

Refleksi berturut-turut terhadap dua garis yang sejajar menghasilkan translasi sejauh dua kali jarak kedua garis tersebut.

V. Transformasi Affine

VI. Dilatasi