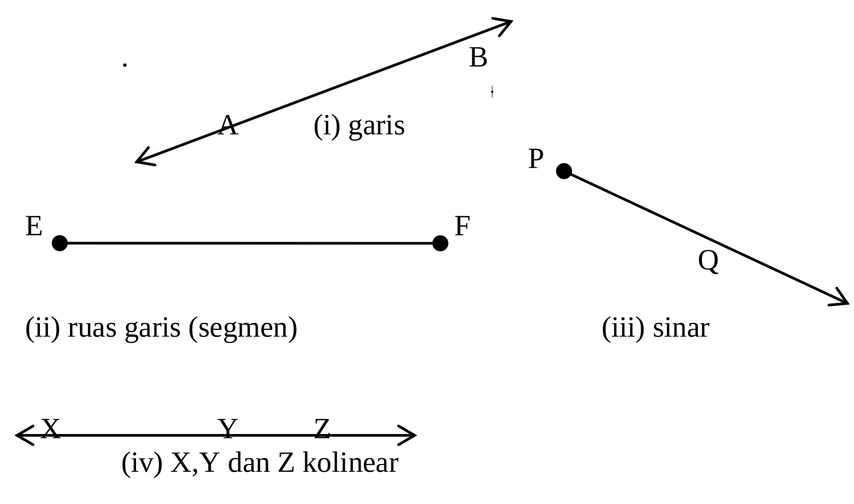
BAB I
TITIK DAN GARIS

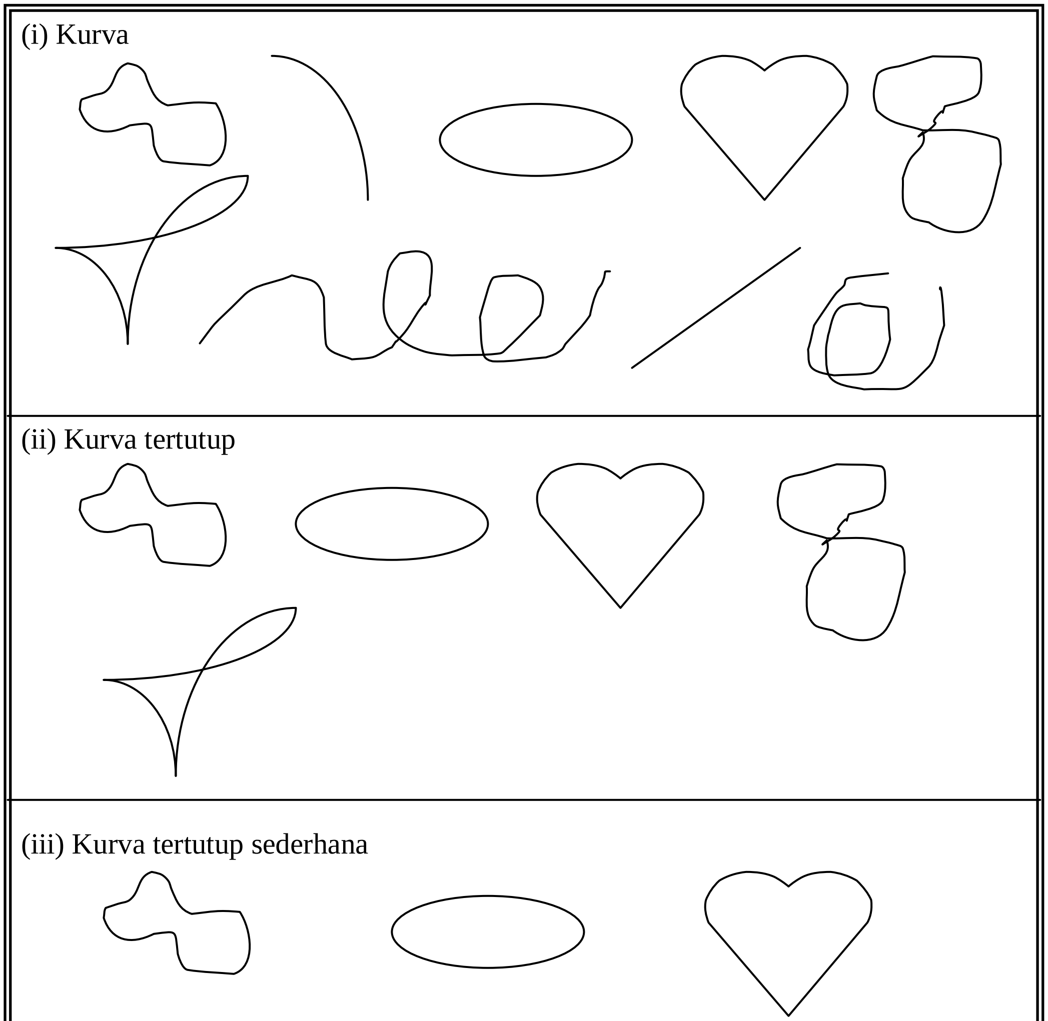
1. Titik, garis, sinar dan ruas garis

Geometri dibangun atas dasar unsur-unsur yang tidak didefinisikan yaitu: titik, garis, dan bidang. *Titik* dipahami secara intuisi sebagai sebuah noktah yang sangat kecil, biasanya diilustrasikan dengan sebuah noktah dengan menekan ujung pensil pada kertas atau kapur tulis di papan tulis. *Bidang* yang dimaksud di sini adalah bidang datar yang tiada bertepi, seperti permukaan lantai yang rata tetapi tidak memiliki batas. *Garis* yang dimaksud di sini adalah garis lurus yang tidak memiliki ujung dan pangkal. Untuk menggambar garis sebuah garis menggunakan tanda panah diujung-ujungnya, sebagai tanda bahwa garis tersebut sebenarnya tidak berujung. Gambar 1.1 (i) mengilustrasikan sebuah garis AB, dan dilambangkan dengan $\overleftrightarrow{AB}$. Di samping itu dikenal pula istilah *ruas garis* (segmen) dan *sinar*. Gambar 1.1 (ii) mengilustrasikan sebuah ruas garis EF, dilambangkan dengan $\overline{EF}$. Ruas garis memiliki dua titik ujung, E dan F merupakan titik-titik ujung $\overline{EF}$. Gambar 1.1 (iii) mengilustrasikan sebuah sinar PQ, dilambangkan dengan $\overrightarrow{PQ}$. Sinar memiliki hanya sebuah titik ujung yang biasa disebut titik pangkal. Titik P merupakan titik pangkal dari $\overrightarrow{PQ}$. Jika tiga titik atau lebih terletak pada sebuah garis, maka titik-titik itu disebut *kolinear* seperti terlihat pada Gambar 1.1 (iv).



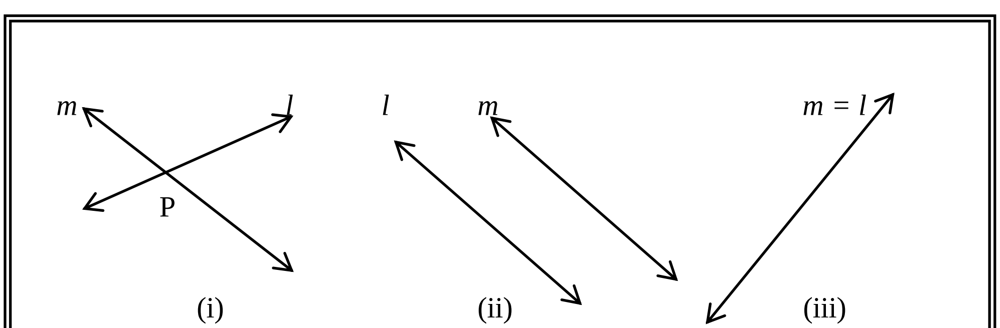
Gambar 1.1

Himpunan titik-titik pada sebuah bidang, tidak selalu berbentuk garis, ruas garis, atau sinar. Ada bentuk lain yang merupakan himpunan titik-titik pada sebuah bidang, yang dikenal sebagai *kurva*. Kurva dipandang sebagai goresan pensil pada kertas mulai dari satu titik hingga sebuah titik tempat pensil diangkat. Gambar 1.2 (i) mengilustrasikan himpunan kurva, Gb. 1.2 (ii) himpunan *kurva tertutup*, dan Gb. 1.2 (iii) himpunan *kurva tertutup sederhana*.



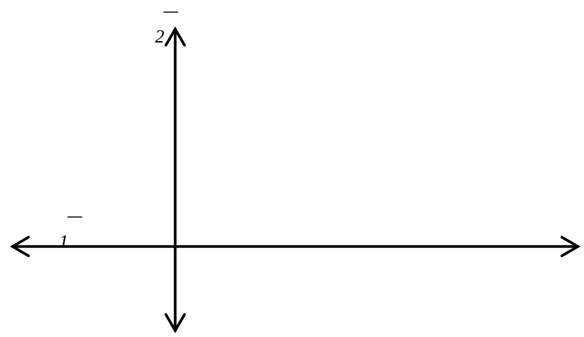
Gambar 1.2

Apabila ada dua garis yang terletak pada suatu bidang yang sama maka terdapat tiga kemungkinan kedudukan dua garis itu (lihat Gambar 1.3), yaitu : (i) berpotongan, (ii) sejajar, atau (iii) berimpit.



Gambar 1.3

Untuk keperluan menggambarkan garis-garis pada suatu bidang dikenal pula istilah garis horizontal dan garis vertikal. Pada papan tulis (berbentuk persegipanjang), yang dimaksud dengan garis horizontal adalah garis yang digambar sejajar dengan tepi bawah (atas). Garis yang digambar sejajar dengan tepi kiri (kanan) disebut garis vertikal. Pada Gambar 1.4, garis $\overline{\ }_1$ merupakan garis horizontal dan garis $\overline{\ }_2$ garis merupakan garis vertikal.



Gambar 1.4

Latihan 1.1

Berikan tanda silang (X) pada huruf di depan jawaban yang paling tepat.

1. Tentukan sebuah titik A pada selembar kertas. Dengan menggunakan pensil dan penggaris, buatlah garis-garis yang melalui titik A tadi. Berapa banyak garis yang dapat dibuat melalui titik A?
   A. tidak ada B. satu C. dua D. tidak terhitung
2. Tentukan dua titik yang berbeda, misal titik A dan titik B. Dengan menggunakan pensil dan penggaris, buatlah garis-garis yang melalui titik A dan titik B. Berapa banyak garis yang dapat dibuat melalui titik A dan B?
   A. tidak ada B. satu C. dua D. tidak terhitung
3. Pada sebuah kertas, gambarkan dua garis yang saling berpotongan. Ada berapa banyak titik potongnya ?
   A. tidak ada B. satu C. dua D. tidak terhitung
4. Pada sebuah kertas, gambarkan sebuah ruas garis AB. Berapa banyak titik yang merupakan anggota ruas garis itu ?
   A. tidak ada B. satu C. dua D. tidak terhitung
5. Misalkan garis $\overline{\ }$ dan *m* terletak pada satu bidang. Jika $\overline{\ }$ dan *m* tidak memiliki titik persekutuan, dikatakan $\overline{\ }$ ....dengan *m*
   A. sejajar B. bersilangan C. berimpit D. berpotongan

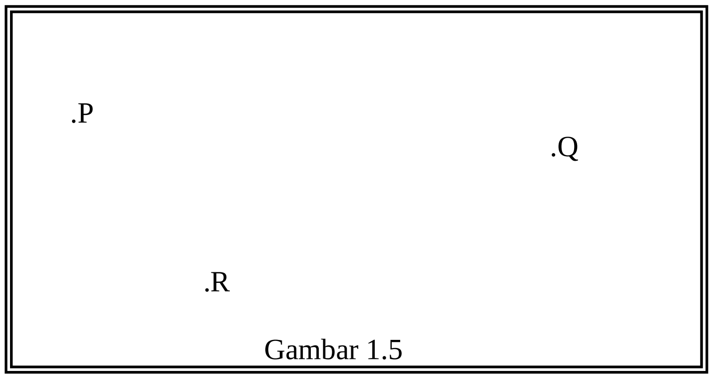
6. Manakah pernyataan yang benar di bawah ini

A. Jika sesuatu himpunan titik, maka sesuatu itu garis.

B. Ruas garis $\overline{PQ}$ adalah himpunan bagian dari garis $\overleftrightarrow{PQ}$

C. Sinar $\overrightarrow{KL}$ adalah himpunan bagian dari ruas garis $\overline{KL}$

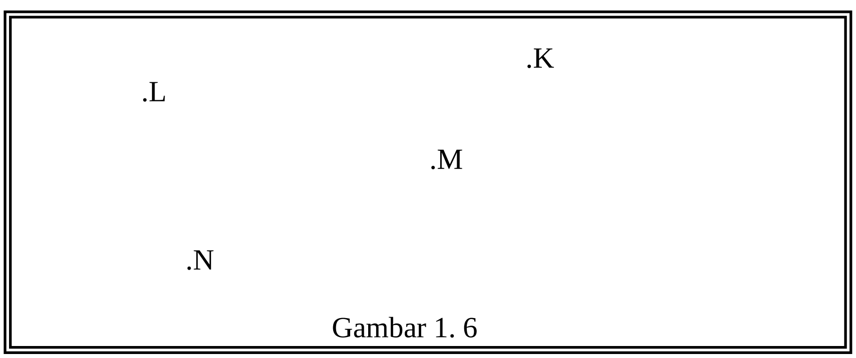
D. Garis $\overleftrightarrow{MN}$ adalah himpunan bagian dari sinar $\overrightarrow{MN}$.



Gambar 1.5

7. Diberikan tiga titik P, Q, dan R yang *tidak kolinear* (seperti terlihat pada gambar 1.5), berapa banyak garis yang mungkin dibuat?

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

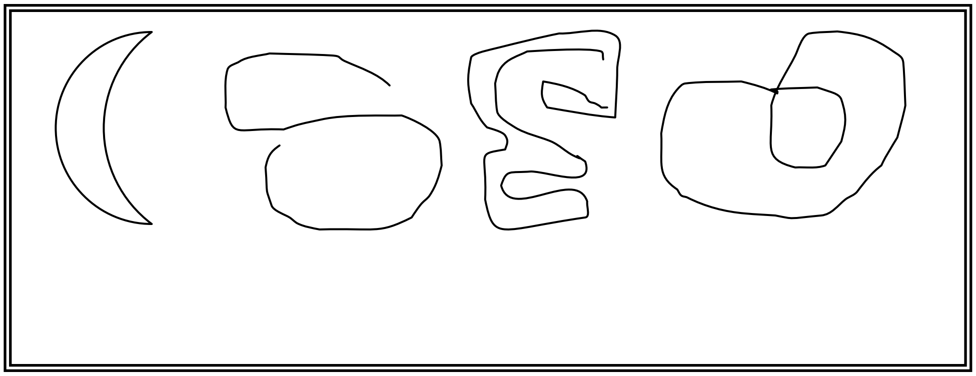


Gambar 1. 6

8. Diberikan empat titik K, L, M, dan N, dengan tidak ada tiga titik atau yang kolinear (seperti terlihat pada Gambar 1.6).

Berapakah banyaknya garis yang dapat dibuat ?

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7



(i) (ii) (iii) (iv)

Gambar 1.7

9. Kurva manakah yang termasuk kur gambar 1.5 ?
   A. (i) dan (ii) B. (iii) dan (iv) C. (i) dan (iv) D. (ii) dan (iii)

10. Kurva manakah yang termasuk kurva tertutup pada gambar 1.5 ?
   A (i) B. (ii) C. (iii) D. (iv)

1. 2. Aksioma Insidensi

1. Jika sesuatu itu garis, maka sesuatu itu himpunan titik.
2. Jika sesuatu itu bidang, maka sesuatu itu himpunan titik.
3. Jika diberikan dua titik yang berbeda, maka terdapat tepat sebuah garis yang melaluinya.
4. Jika diberikan tiga titik yang berbeda dan tidak segaris (kolinear), maka terdapat tepat sebuah bidang yang memuatnya.
5. Jika dua titik yang berbeda terletak pada sebuah bidang, maka garis yang melalui titik itu terletak pada bidang tersebut.
6. Jika dua buah bidang berpotongan maka perpotongannya meruapakan sebuah garis.

Teorema-teorema:

1. Jika dua garis yang berbeda berpotongan, maka perpotongannya tepat di satu titik.
2. Jika sebuah garis memotong sebuah bidang yang tidak memuat garis itu, maka perpotongannya sebuah titik.
3. Jika sebuah titik terletak di luar sebuah garis, maka terdapat tepat sebuah bidang yang memuat titik dan garis itu.

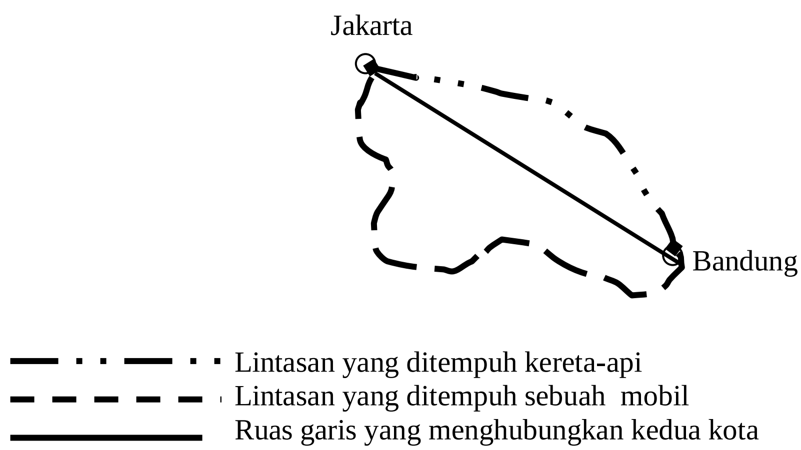
Latihan 1.2

1. Diketahui 5 titik yang berbeda dengan tidak ada tiga titik yang segaris dan tidak ada 4 titik yang sebidang.
   a. Berapa banyak garis yang memuat dua dari kelima titik itu ?
   b.Berapa banyak bidang yang memuat tiga dari kelima titik itu ?
2. Diketahui n titik yang berbeda dengan tidak ada tiga titik yang segaris dan tidak ada 4 titik yang sebidang.
   a. Berapa banyak garis yang memuat dua dari n titik itu ?
   b.Berapa banyak bidang yang memuat tiga dari n titik itu ?

1. 3. Jarak

Dalam keseharian, sering kita mendengar ungkapan: “Jarak dari Bandung ke Jakarta.adalah 180 km.”. Apakah kata jarak yang dimaksud dalam keseharian itu sama dengan kata *jarak* dalam matematika ?.

Perhatikan kalimat di atas, kata jarak dipergunakan bila ada dua tempat yang berbeda, dalam hal ini Bandung dan Jakarta. Disamping itu jarak terkait dengan suatu bilangan, dalam hal ini bilangan 180. Demikian halnya dengan matematika, jarak terkait dengan dua titik yang berbeda, misal titik A dan B. Jarak titik A ke B dinyatakan dengan bilangan. Akan tetapi ada sedikit perbedaan yaitu: Pada kalimat “Jarak dari Bandung ke Jakarta.adalah 180 km.”yang 180 km itu panjang lintasan yang ditempuh kereta-api atau panjang lintasan yang ditempuh sebuah mobil ? Hal ini menghasilkan tafsiran yang berbeda, sehingga bilangan yang menyatakan jarak Bandung Jakarta itu bisa berbeda. Dalam matematika haruslah jawabnya harus tunggal. Manakah jarak Bandung Jakarta menurut matematika?



Gambar1.7

Dari gambar di atas jarak Bandung Jakarta diwakili oleh ruas garis yang menghubungkan Bandung dengan Jakarta. Tentu saja jarak tersebut harus dikalikan dengan skala pada peta yang bersangkutan. Secara matematika: Jarak antara titik A ke titik B dilambangkan dengan AB bermakna bilangan yang menyatakan panjang $\overline{AB}$.

Latihan 1.3

Berikan tanda silang (X) pada huruf B jika pernyataan itu *benar* atau huruf S jika pernyataan itu *salah.*

1. B – S : Jarak PQ sama dengan jarak QP.
2. B – S : Jarak antara dua titik merupakan bilangan negatif.
3. B – S : Jika jarak AB = 0, maka titik A berimpit dengan titik B.
4. B – S : Jika dua titik berimpit, maka jaraknya sama dengan nol.
5. B – S : Jika titik P, Q, dan R tidak segaris, maka PQ + QR < PR.
6. B – S : Jika titik P, Q, dan R terletak segaris dan Q terletak antara P dan R, maka PQ + QR = PR.

Bahan Diskusi

Aksioma – aksioma

1. Jarak adalah fungsi dari S X S ke bilangan real.
2. Untuk setiap P, Q $\in$ S, maka d(P,Q) $\geq$ 0
3. d(P,Q) = 0 jika dan hanya jika P = Q

4. Untuk setiap P, Q $\in$ S, maka d(P,Q) = d(Q,P)
5. Setiap garis mempunyai sebuah sistem koordinat (postulat penggaris).

Definisi:

Misalkan f : L $\leftrightarrow$ R adalah sebuah korespondensi satu-satu antara garis L dan bilangan real. f disebut sistem koordinat untuk garis L jika dan hanya jika untuk setiap titik P dan Q berlaku PQ = $|f(P) - f(Q)|$. Untuk setiap titik P pada L, bilangan x = f(P) disebut koordinat P.

Teorema-teorema:

1. Jika f adalah sebuah sistem koordinat untuk sebuah garis L, dan g(P) = - g(P) untuk setiap titik P pada garis L, maka g adalah sebuah sistem koordinat untuk L.
2. Jika f adalah sebuah sistem koordinat untuk sebuah garis L, dan a sembarang bilangan real dan untuk setiap titik P pada garis L g(P) = f(P) + a, maka g adalah sebuah sistem koordinat untuk L.
3. Teorema Penempatan Penggaris (Ruler Placement theorem). Misalkan L adalah sebuah garis dan P, Q adalah dua titik sembarang yang terletak pada garis L. Maka L mempunyai sistem koordinat dengan koordinat P adalah 0 dan koordinat Q bilangan positif.

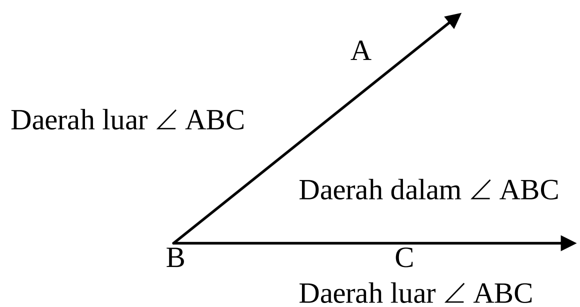
Soal : Tunjukkan bahwa postulat 2, 3, dan 4 adalah konsekuensi dari postulat penggaris.

BAB II
SUDUT DAN UKURAN SUDUT

2.1. Sudut

Definisi: Sudut adalah gabungan dua buah sinar yang titik pangkalnya sama.

Sudut ABC (ditulis $\angle$ ABC) adalah gabungan $\overrightarrow{BA}$ dan $\overrightarrow{BC}$ ($\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$) seperti terlihat pada gambar 2..1



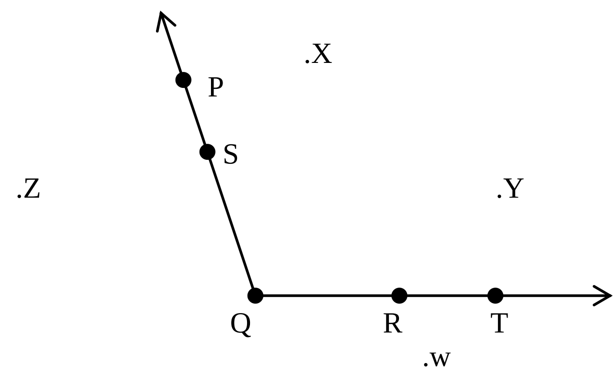
Gambar 2.1.

$\overrightarrow{BA}$ dan $\overrightarrow{BC}$ disebut pula *kaki sudut*, sedangkan titik B disebut *titik sudut*. $\overrightarrow{BA}$ dan $\overrightarrow{BC}$ masing-masing merupakan himpunan titik-titik, gabungan keduanya yaitu $\angle$ ABC merupakan himpunan titik-titik pula. $\angle$ ABC membagi bidang yang memuatnya, menjadi tiga himpunan yang saling lepas, yaitu, (i) sudut itu sendiri yaitu $\angle$ ABC, (ii) *daerah dalam (interior*) $\angle$ ABC dan (iii) *daerah luar (ekterior)* $\angle$ ABC ..

Latihan 2.1

Berikan tanda silang (X) pada huruf di depan jawaban yang paling tepat.

1. Pada $\angle$ KLM, titik L disebut ......
   A. titik sudut B. kaki sudut C. interior sudut D. eksterior sudut



Gambar 2.2

2.Perhatikan Gambar 2.2. Titik manakah yang terletak pada $\angle$ PQR ?

A. .S dan X B. T dan Y C. X dan Y D. S dan T

3.Perhatikan Gambar 2.2. Titik manakah yang terletak pada *interior* $\angle$ PQR ?

B. .S dan X B. T dan Y C. X dan Y D. S dan T

4.Perhatikan Gambar 2.2. Titik manakah yang terletak pada *eksterior* $\angle$ PQR ?

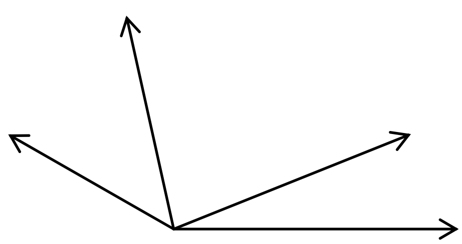
A. W dan X B. Z dan Y C. W dan Z D. X dan Y

5. Perhatikan Gambar 2.2. Manakah pernyataan berikut yang *salah* ?

A. $\angle$ PQR = $\angle$ PQT B. $\angle$ PQR =$\angle$ SQT C. $\angle$ PQR = $\angle$ XQR D. $\angle$ PQR=$\angle$ SQR

6. Perhatikan Gambar 2.3, berapa sudut yang terjadi pada gambar tersebut ?

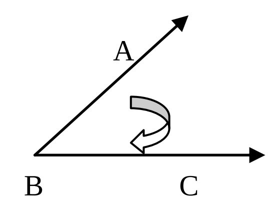
A. 3 B. 4 C. 5



Gambar 2. 3

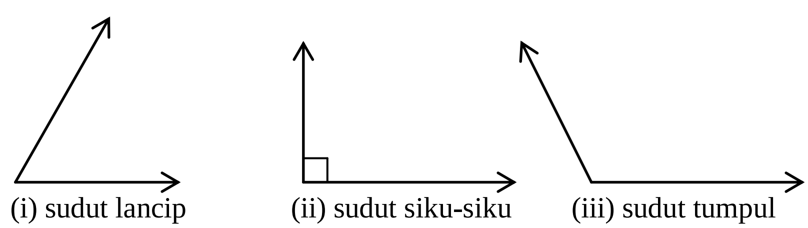
2.2 Ukuran sudut

Salah satu satuan ukuran sudut menggunakan satuan derajat dimana satu derajat ditulis 1^0 sama 1/360 dari satu putaran penuh. Ukuran sudut adalah anggota himpunan bilangan bukan himpunan titik, oleh karena itu *sudut* dan *ukuran sudut* merupakan dua hal yang berbeda tetapi saling berkaitan. Ukuran $\angle$ ABC biasa dilambangkan dengan m$\angle$ ABC didefinisikan sebagai lintasan putar yang terpendek kaki $\overrightarrow{BA}$ sehingga berimpit dengan kaki $\overrightarrow{BC}$ atau kaki $\overrightarrow{BC}$ sehingga berimpit dengan kaki $\overrightarrow{BA}$ (lihat gambar 2.4). Arah putaran tidak dipersoalkan apakah searah atau berlawanan arah jarum jam, yang penting adalah lintasan putar yang terkecil. Alat untuk mengukur suatu sudut biasa digunakan busur derajat.



Gambar 2.4

Berdasarkan ukurannya himpunan sudut dikelompokkan dalam terbagi ke dalam tiga himpunan bagian yang lepas yaitu: himpunan sudut lancip, himpunan sudut siku-siku, dan himpunan sudut tumpul. Sudut yang berukuran antara 0^0 dan 90^0 disebut sudut lancip. Sudut yang berukuran 90^0 disebut sudut siku-siku. Sedangkan sudut yang berukuran antara 90^0 dan 180^0 disebut sudut tumpul.

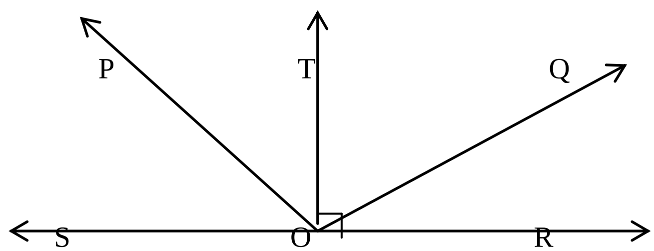


Gambar 2.5

Adakah sudut yang berukuran 0^0 dan 180^0? Menurut definisi, untuk membentuk dua sudut diperlukan dua sinar yang titik pangkalnya berimpit. Sudut yang berukuran 0^0 artinya untuk mengimpitkan kaki yang satu dengan yang lain tidak diperlukan pemutaran. Dengan demikian kedua kaki sudut itu berimpit, dengan kata lain hanya ada satu sinar. Oleh karena itu *sebuah sinar dianggap sebagai sudut yang berukuran* 0^0. Sudut yang berukuran 180^0, kedua kaki sudut membentuk sebuah garis. Oleh karena itu *sebuah garis dianggap sebagai sudut yang berukuran* 180^0. Sebuah garis sering pula disebut sebagai *sudut lurus.*

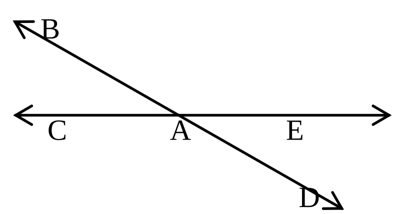
Adakah sudut yang berukuran lebih dari 180^0 ? Apabila kita menggambar $\angle$ PQR yang berukuran 270^0, ternyata yang kita gambar adalah $\angle$ PQR yang berukuran 90^0. Dengan demikian tidak ada sudut yang berukuran lebih dari 180^0.

Dua sudut dikatakan sebagai saling suplemen, apabila jumlah ukuran kedua sudut itu 180^0. Sedangkan dua sudut dikatakan sebagai saling komplemen, apabila jumlah kedua ukuran sudut tersebut 90^0. Pada Gambar 2.6, $\angle$ QOR dan $\angle$ QOS adalah saling suplemen, sebab jika kedua ukuran sudut itu dijumlahkan adalah 180^0, yaitu sebagai ukuran $\angle$ ROS yang merupakan sudut lurus. $\angle$ QOR dan $\angle$ QOT saling komplemen, sebab jumlah ukuran sudut keduanya 90^0, yaitu ukuran $\angle$ ROT.



Gambar 2.6

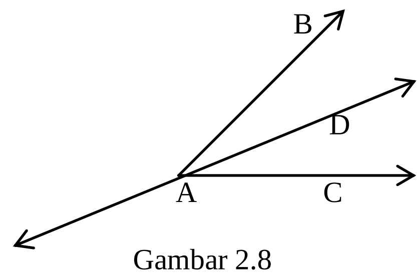
Jika ada dua garis saling berpotongan, akan membentuk dua pasang sudut yang saling bertolak belakang. Pada Gambar 2.6, pasangan sudut yang saling bertolak belakang adalah $\angle$ BAE dan $\angle$ CAD, demikian juga $\angle$ BAC dan $\angle$ DAE.



Gambar 2.7

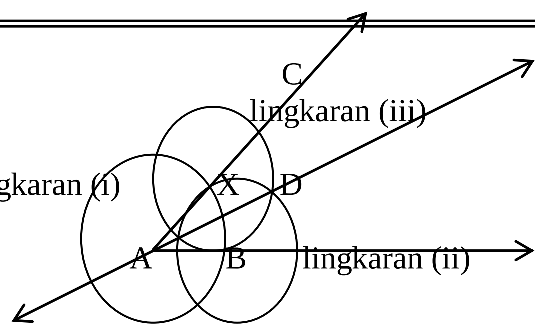
Perhatikan Gambar 2.7, m$\angle$ BAE + m$\angle$ BAC = 180^0 = m $\angle$ EAC (sudut lurus). Dengan kata lain m $\angle$ BAE = 180^0- m$\angle$ BAC. Demikian pula m$\angle$ BAC + m$\angle$ CAD = 180^0= m $\angle$ BAD (sudut lurus), atau m $\angle$ CAD = 180^0- m$\angle$ BAC. Dengan demikian diperoleh m $\angle$ BAE = m$\angle$ CAD. Jadi dapat disimpulkan bahwa *dua sudut yang saling bertolak belakang sama besar.*

Perhatikan $\angle$ BAC pada Gambar 2.8, titik D pada interior sudut tersebut. Garis $\overline{AD}$ disebut garis bagi $\angle$ BAC apabila m $\angle$ BAD = m$\angle$ CAD.



Gambar 2.8

Untuk menentukan titik D, perhatikan Gambar 2.9 dengan langkah-langkah berikut:



Gambar 2.9

1. Buatlah lingkaran (i) dengan pusat A dan jari-jari AB, misalkan memotong AC di X.
2. Buat lingkaran (ii) dengan pusat B dan jari-jari BX
3. Buatlah lingkaran (iii) dengan pusat X dan jari-jari XB
4.Titik D adalah titik potong lingkaran (ii) dan (iii) yang terletak pada interior $\angle$ BAC.
5. $\overleftrightarrow{AD}$ adalah garis bagi $\angle$ BAC.

Latihan 2.2

Berikan tanda silang (X) pada huruf di depan jawaban yang paling tepat.

1.Pada Gambar 2.110 (i), jika m $\angle$ BAC = 50^0 dan m $\angle$ CAD = 60^0, berapakah m $\angle$ BAD ?

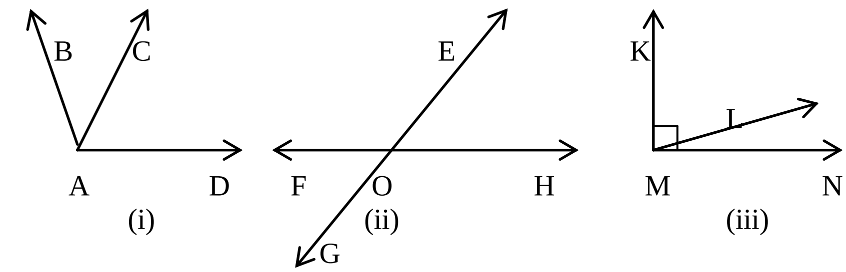
A. 10^0 B. 70^0 C. 110^0 D. 250^0

2.Pada Gambar 2.10 (ii), jika m $\angle$ EOF = 120^0, berapakah m $\angle$ EOH ?

A. 30^0 B. 60^0 C. 80^0 D. 100^0

3.Pada Gambar 2.10 (iii), jika m $\angle$ NML = 20^0, berapakah m $\angle$ KML ?
A. 30^0 B. 60^0 C. 70^0 D. 80^0

4.Pada Gambar 2.10(ii), jika m $\angle$ EOF = 120^0, berapakah m $\angle$ GOH ?
A. 120^0 B. 100^0 C. 80^0 D. 60^0



Gambar 2. 10

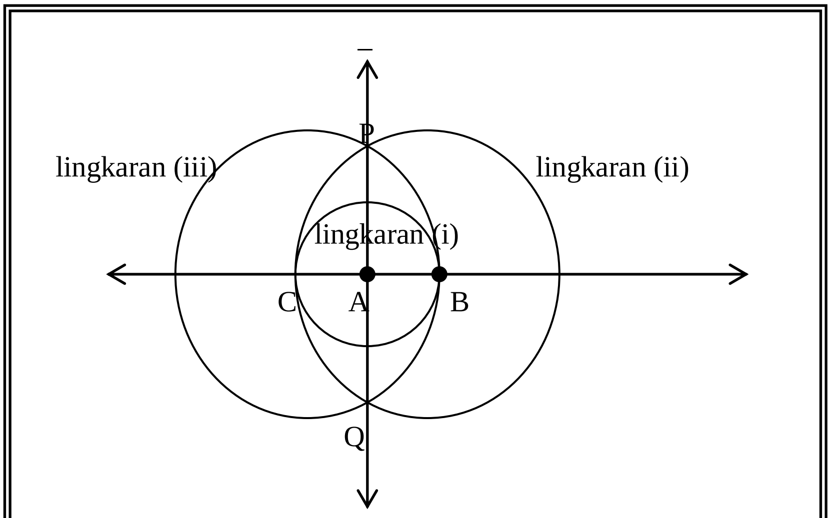
5. Diberikan $\angle$ PQR dan $\angle$ PQS saling komplemen. Jika m$\angle$ PQR dua kali m$\angle$ PQS,
Berapakah m$\angle$ PQS ?
A. 30^0 B. 45^0 C. 60^0 D. 90^0

6. Diberikan $\angle$ XYZ dan $\angle$ XYW saling suplemen. Jika m$\angle$ XYZ empat kali m$\angle$ XYW,
Berapakah m$\angle$ XYZ ?
A. 36^0 B. 45^0 C. 135^0 D. 144^0

2. 3 Melukis sudut berukuran 90^0 dan 45^0

Dua buah garis ‾ dan *m* disebut saling tegaklurus, apabila ‾ da *m* membentuk sudut yang berukuran 90^0. Misalkan diberikan sebuah garis AB, untuk melukis garis ‾ yang melalui titik A dan tegaklurus $\overleftrightarrow{AB}$ perhatikan Gambar 2.11 dengan langkah-langkah seperti berikut:

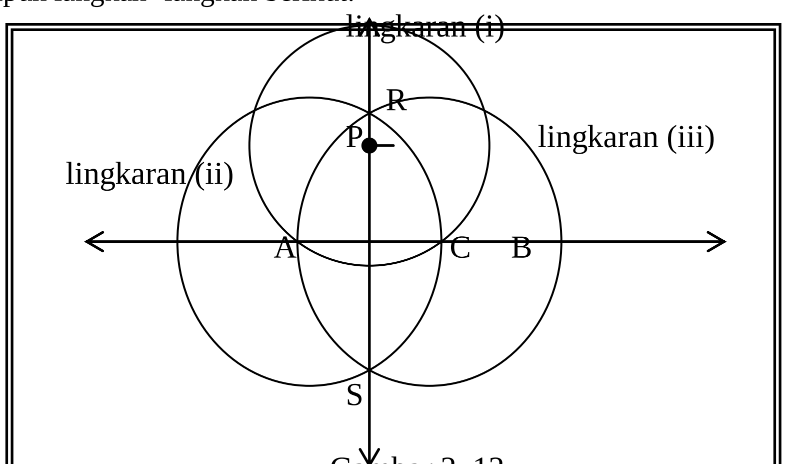
1.Buat lingkaran (i) dengan pusat titik A dan jari-jari AB, sehingga memotong garis $\overleftrightarrow{AB}$ di titik lainnya, misalkan titik C.
2. Buat lingkaran (ii) dengan pusat titik B dan jari jari BC
3. Buat lingkaran (iii) dengan pusat titik C dan jari jari CB
4. Misalkan perpotongan lingkaran (i) dan (ii) adalah P dan Q, $\overleftrightarrow{PQ}$ = ‾ adalah garis yang melalui titik Adan tegaklurus $\overleftrightarrow{AB}$



Gambar 2. 11

Prosedur melukis tersebut dapat digunakan melukis sebuah sudut siku-siku. Pada Gambar 2. 11, $m\angle PAB = m\angle PAC = m\angle QAB = m\angle QAC = 90^0$. Untuk memperoleh sudut yang berukuran 45^0, digunakan prosedur melukis garis bagi pada sudut siku-siku.

Misalkan diberikan sebuah garis AB, dan sebuah titik P di luar garis itu, untuk memperoleh garis yang melalui titik P dan tegaklurus AB seperti terlihat pada Gambar 2.12, dapat ditempuh langkah- langkah berikut:



Gambar 2. 12

1.Buat lingkaran (i) dengan titik pusat P dan jari jari PA, hingga memotong garis $\overleftrightarrow{AB}$ di titik lain, misalkan titik C.
2. Buat lingkaran (ii) dengan titik pusat A dan jari jari AC
3. Buat lingkaran (iii) dengan titik pusat C dan jari jari CA
4. Titik potong lingkaran (ii) dan (iii) yaitu R dan S, garis $\overleftrightarrow{RS}$ adalah garis yang melalui P dan tegaklurus garis $\overleftrightarrow{AB}$.

Latihan 2.3

1.Diketahui sinar $\overrightarrow{PQ}$, lukislah sinar $\overrightarrow{PR}$ sehingga m$\angle$PAC = 90^0. Kemudian lukis pula sinar
$\overrightarrow{PS}$ sehingga m$\angle$PAC = 45^0.

2. Diketahui titik T di luar garis $\overleftrightarrow{XY}$, tentukan titik O pada garis $\overleftrightarrow{XY}$ sehingga m$\angle$TOX = 90^0.

Bahan Diskusi

1. Mengapa lambang sudut dengan lambang ukuran sudut perlu dibedakan ?
2. Adakah perbedaan antara $\angle$ ABC = $\angle$ DEF dengan m$\angle$ ABC = m$\angle$ DEF ? Berikan alasan!
3. Gambarlah dua sudut . dengan m$\angle$ POQ = 100^0 dan m$\angle$ QOR = 120^0. Apakah m$\angle$ POQ = 220^0 ? Berikan alasan !

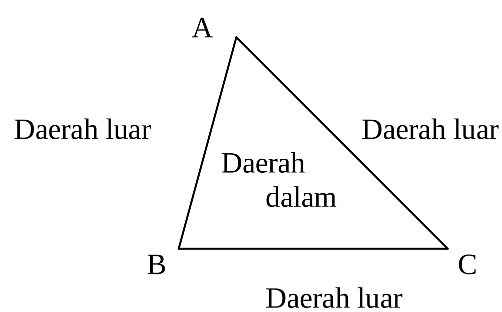
Didefinisikan bahwa dua sudut $\angle$ ABC dan $\angle$ DEF dikatakan *kongruen* (dilambangkan $\angle$ ABC $\cong$ $\angle$ DEF), apabila m$\angle$ ABC = m $\angle$ DEF.

4. Benarkah pernyataan: Jika $\angle$ ABC $\cong$ $\angle$ DEF dan $\angle$ DEF $\cong$ $\angle$ PQR, maka $\angle$ ABC $\cong$ $\angle$ PQR. Berikan alasan !
5. Garis $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{CD}$ berpotongan di titik P. Tunjukkan garis bagi $\angle$ APC dan garis bagi $\angle$ APD saling tegaklurus.

BAB III
SEGITIGA

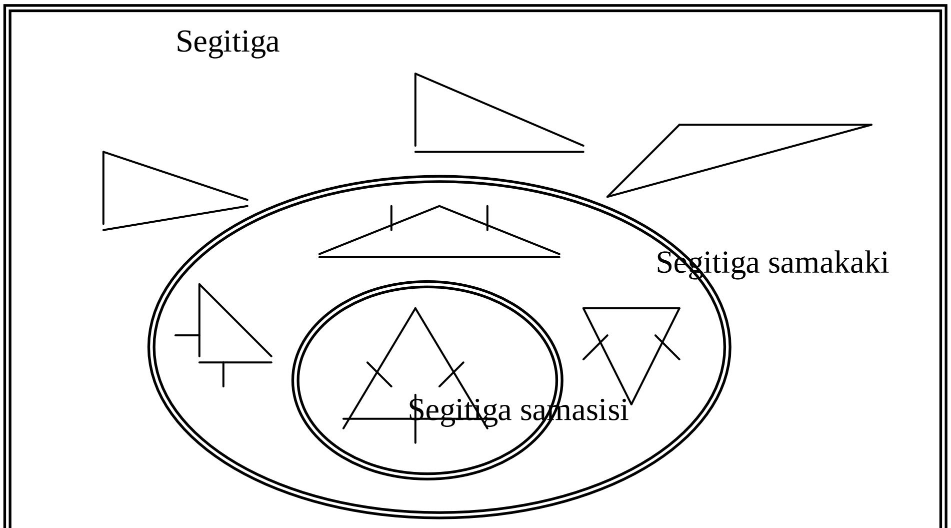
3.1 Segitiga dan jenis-jenisnya

Disekeliling kita banyak benda-benda yang memuat bangun segitiga; seperti gantungan kunci , limas hiasan, kemasan minuman, dan lain sebagainya. Dalam matematika, apakah yang dimaksud dengan segitiga ? Segitiga terdiri dari tiga ruas garis yang berbeda dimana titik ujung suatu ruas garis berimpit dengan titik pangkal ruas garis yang lain. Segitiga ABC ditulis Δ ABC adalah gabungan dari $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ dan $\overline{CA}$. Oleh karena $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ dan $\overline{CA}$ merupakan himpunan titik-titik, maka Δ ABC juga berupa himpunan titik- titik. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ dan $\overline{CA}$ disebut pula sisi-sisi segitiga Δ ABC. Seperti halnya sudut, ada daerah dalam (interior) dan ada daerah luar (eksterior) segitiga (lihat gambar 3.1). Dari Δ ABC terbentuk pula tiga buah sudut yaitu: $\angle$ ABC, $\angle$ BAC, dan $\angle$ ACB.



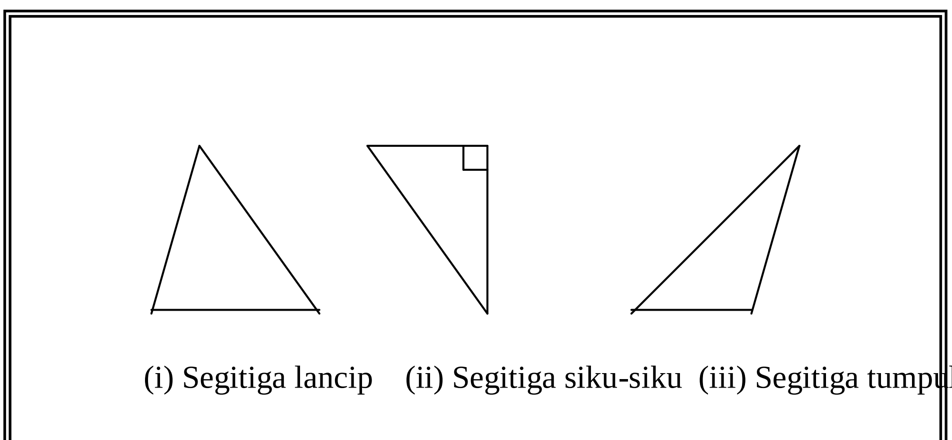
Gambar 3.1.

Dipandang dari ukuran panjang sisi-sisinya, dikenal istilah *segitiga sama sisi*, dan *segitiga samakaki*. Segitiga sama sisi adalah segitiga yang ukuran panjang ketiga sisinya sama. Sedangkan segitiga samakaki adalah segitiga paling sedikit ada dua sisi yang ukuran panjangnya sama. Dengan demikian disimpulkan bahwa himpunan segitiga sama-sisi merupakan himpunan bagian dari segitiga samakaki (lihat Gambar 3.2).



Gambar 3.2

Dipandang dari jenis-jenis sudut (lancip, siku-siku, dan tumpul) yang dibentuk oleh suatu segitiga, maka himpunan segitiga terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu: segitiga lancip, himpunan segitiga siku-siku, dan segitiga tumpul (lihat Gambar 3.3).



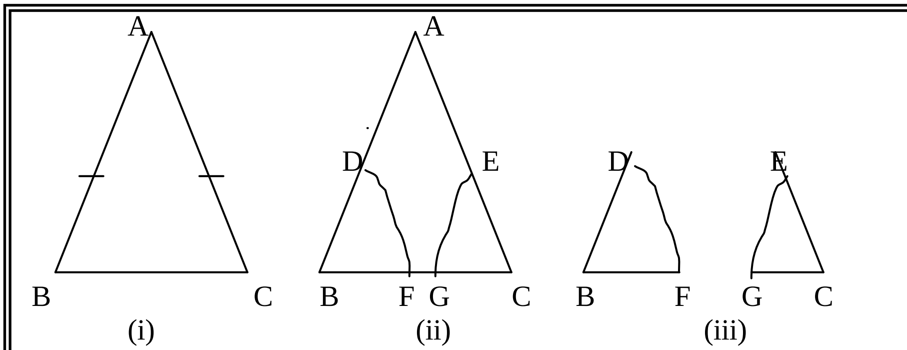
Gambar 3.3

Kombinasi jenis-jenis segitiga tersebut menurut ukuran sisi maupun menurut jenis sudutnya, menurunkan beberapa macam segitiga yaitu: Segitiga lancip samakaki, segitiga siku-siku samakaki, dan segitiga tumpul samakaki. Tetapi tidak mungkin terbentuk segitiga tumpul samasisi maupun segitiga siku-siku samasisi (Tabel 4.1).

Tabel 3. 1
Kombinasi Jenis-jenis Segitiga
Menurut Ukuran Sisi Dan Menurut Ukuran Sudut

Pengelompokkan segitiga menurut ukuran sisinya	Pengelompokkan segitiga menurut ukuran sisinya	
	Segitiga sama kaki	Segitiga sama sisi
Segitiga lancip	Segitiga lancip samakaki	*Segitiga sama sisi dipastikan segitiga lancip*
Segitiga siku-siku	Segitiga siku-siku sama kaki	*Tidak ada segitiga siku-siku sama sisi*
Segitiga tumpul	Segitiga tumpul sama kaki	*Tidak ada segitiga tumpul sama sisi*

Pada ∆ ABC, ∠ BAC atau ∠ A dikatakan sebagai sudut *dihadapan* sisi BC, juga ∠ B dihadapan sisi AC dan ∠ C dihadapan sisi AB. Misalkan ∆ ABC sama kaki AB = AC seperti terlihat pada Gambar 4.4(i). Gunting masing-masing daerah ∠ B dan ∠ C seperti terlihat pada Gambar 3.4 (ii). Kemudian impitkan potongan DBF dan potongan ECG, dimana titik B diimpitkan dengan titik C, kaki BF diimpitkan dengan kaki CG, ternyata kaki BD berimpit pula dengan kaki CE. Ini menunjukkan bahwa:
Pada segitiga samakaki, sudut- sudut yang dihadapan sisi yang sama berukuran sama besar.
Akibatnya:
Sudut-sudut pada segitiga sama sisi berukuran sama.



Gambar 3.4

Latihan 3.1
Berikan tanda silang (X) pada huruf di depan jawaban yang paling tepat.
l. Suatu segitiga yang besar sudutnya 100^o, 50^o, dan 30^o disebut segitiga ……….

a. sembarang c. tumpul
b. lancip d. siku-siku

2. Diberikan sebuah Δ PQR, dengan PQ = QR = 6 cm, dan PR = 4 cm. Manakah pasangan sudut yang berukuran sama besar ?

A. ∠ P dan ∠ Q B. ∠ P dan ∠ R C. ∠ R dan ∠ Q D. tidak ada

3. Manakah pernyataan di bawah ini yang *salah* ?

A. Segitiga siku-siku adalah segitiga yang memiliki sebuah sudut siku-siku
B. Segitiga lancip adalah segitiga yang memiliki sebuah sudut lancip
C. Segitiga tumpul adalah segitiga yang memiliki sebuah sudut tumpul
D. Segitiga lancip adalah segitiga yang memiliki tiga buah sudut lancip

4. Untuk membentuk Δ ABC diperlukan tiga buah ruas garis, AB, AC, dan BC. Ukuran ruas garis manakah yang dapat membentuk segitiga ? (Petunjuk: Gunakan potongan lidi).

A. AB = 5 cm, AC = 3 cm, dan BC = 8 cm
B. AB = 5 cm, AC = 10 cm, dan BC = 4 cm
C. AB = 5 cm, AC = 4 cm, dan BC = 4 cm
D. AB = 10 cm, AC = 4 cm, dan BC = 4 cm

5. Diketahui Δ KLM dengan KL = 6 cm, KM = 4 cm, dan LM = 8 cm. Manakah pernyataan yang benar di bawah ini ? (Petunjuk: Gunakan langkah seperti pada Gambar 3.4)

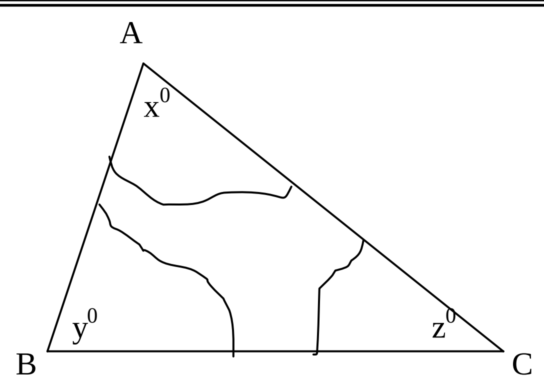
A. m∠ K > m ∠ M
B. m∠ K < m ∠ M
C. m∠ L > m ∠ K
D. m∠ M < m ∠ L

3.2 Jumlah ukuran sudut-sudut dalam segitiga

Pada Δ ABC segitiga itu terdapat tiga buah sudut yaitu : ∠ABC, ∠ACB, dan ∠BAC. Adakah keteraturan jumlah ukuran ketiga sudut dalam segitiga itu ? Untuk memperkirakan adanya keteraturan itu, gambarlah berbagai macam segitiga seperti, segitiga sembarang, segitiga lancip, segitiga siku-siku, dan segitiga tumpul. Setiap segitiga ukurlah masing-masing sudutnya dan kemudian jumlahkan, apabila mengukurnya cukup teliti, maka akan diperoleh jumlah ketiga ukuran sudut pada setiap segitiga adalah 180^0.

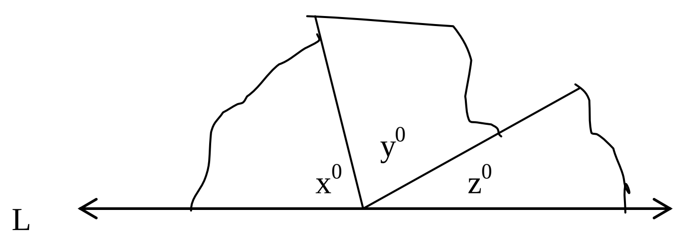
Ini menunjukkan adanya keteraturan jumlah ukuran sudut-sudut dalam segitiga:
Jumlah ukuran sudut-sudut dalam segitiga adalah 180^0.

Cara lain untuk menunjukkan adanya keteraturan di atas, adalah sebagai berikut:.



Gambar 3.5

Buatlah sebarang Δ ABC pada selembar kertas, dan guntinglah masing-masing daerah sudut seperti pada Gambar 3.5. Pada kertas lain, gambarkan sebuah garis $\overline{}$, tempelkan potongan-potongan ketiga daerah sudut dan ternyata seperti potongan-potongan itu membentuk garis lurus (lihat Gambar 3.6). Hal ini menunjukkan bahwa jumlah ketiga ukuran sudut sebuah segitiga sama dengan ukuran sudut lurus, yaitu 180^0.



Gambar 3.6

Pada bagian 4.1 di atas telah diketahui bahwa pada segitiga sama kaki, maka ukuran sudut-sudut yang dihadapan sisi-sisi yang panjangnya sama adalah sama besar. Apakah pernyataan sebaliknya juga benar ? Apabila sebuah segitiga memiliki dua sudut yang sama besar, maka sisi-sisi yang dihadapan sudut-sudut tersebut sama panjang. Pernyataan ini adalah benar, sebab jika sisi-sisi itu tidak sama panjang bertentangan dengan pernyataan sebelumnya.

Pada sebuah segitiga yang memiliki dua sudut yang berukuran sama, maka segitiga itu sama kaki.

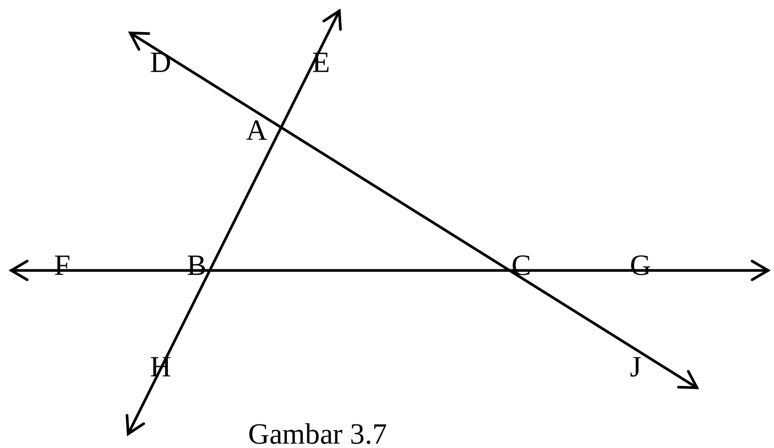
Pada bagian 3.1 telah dikemukakan pula bahwa segitiga sama sisi memiliki ukuran sudut yang sama. Oleh karena jumlah ukuran sudut sudut dalam segitiga 180^0, maka dapat disimpulkan bahwa:

Segitiga sama sisi setiap sudutnya berukuran sama yaitu 60^0.

Juga sebaliknya:

Jika suatu segitiga setiap sudutnya 60^0*, maka segitiga tersebut merupakan segitiga sama sisi.*

Perhatikan Gambar 4.7, bila dibuat tiga buah garis yang masing-masing memuat sisi-sisi Δ ABC, akan terbentuk sudut-sudut yang disebut sebagai sudut luar segitiga. Sebagaimana kita ketahui bahwa yang dimaksud sudut-sudut pada Δ ABC adalah $\angle$BAC, $\angle$ABC, dan $\angle$ACB. Sedangkan $\angle$BAD, $\angle$CAE, $\angle$ABF, $\angle$CBH, $\angle$ACG, dan $\angle$BCJ disebut *sudut luar Δ ABC* . $\angle$BAD dan $\angle$CAE dikatakan sudut luar Δ ABC yang bersesuaian dengan $\angle$BAC. $\angle$ABF dan $\angle$CBH adalah sudut luar yang bersesuaian dengan $\angle$ABC. Sedangkan $\angle$ACG, dan $\angle$BCJ sudut luar yang bersesuaian dengan $\angle$ACB.



Gambar 3.7

Telah diketahui bahwa jumlah ukuran sudut-sudut dalam segitiga adalah 180^0. Perhatikan $\angle$ABC pada Gambar 4.7 di atas, m$\angle$ABC + (m$\angle$BAC + m $\angle$ACB) = 180^0. Di samping itu $\angle$ABC dan $\angle$ABF saling suplemen (berpelurus), atau m$\angle$ABC + m$\angle$ABF = 180^0. Dengan demikian m$\angle$ABC + (m$\angle$BAC + m $\angle$ACB) = m$\angle$ABC + m$\angle$ABF sehingga diperoleh kesimpulan (m$\angle$BAC + m $\angle$ACB) = m$\angle$ABF.

Ukuran sebuah sudut luar suatu segitiga sama dengan jumlah ukuran dua sudut dalam segitiga lainnya yang tidak bersesuaian dengan sudut luar itu.

Akibatnya:

Ukuran sebuah sudut luar suatu segitiga lebih besar dari ukuran suatu sudut dalam segitiga lainnya yang tidak bersesuaian dengan sudut luar itu.

Latihan 3.2

Berikan tanda silang (X) pada huruf di depan jawaban yang paling tepat.

1.Perhatikan gambar 3.8 (i) , Δ PQR dengan m$\angle$PQR = 40^0 dan m$\angle$PRQ = 70^0. Berapakah m$\angle$QRP ?

A. 30^0 B. 40^0 C. 70^0 D. 110^0

2.Perhatikan gambar 4.8(ii), Δ KLM sama kaki KM = KL dan m$\angle$KLM = 35^0. Berapakah m$\angle$LKM ?

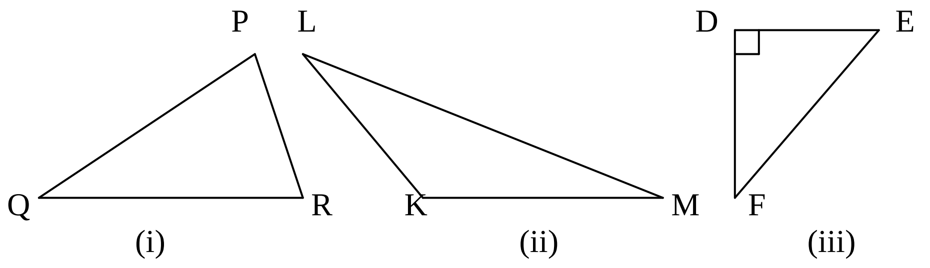
A. 30^0 B. 40^0 C. 70^0 D. 110^0

3.Perhatikan gambar 4.8 (iii) , Δ DEF siku-siku di D. Jika dengan m$\angle$DEF = 50^0 ,. berapakah m$\angle$DEF ?

A. 30^0 B. 40^0 C. 70^0 D. 110^0

4 .Berapakah ukuran sebuah sudut pada segitiga sama sisi ?

A. 30^0 B. 45^0 C. 60^0 D. 90^0



Gambar 3.8

5.Diketahui Δ ABC dengan AB = 5 cm, m$\angle$ABC = m$\angle$ACB = 65^0. Manakah pernyatan yang benar dibawah ini ?

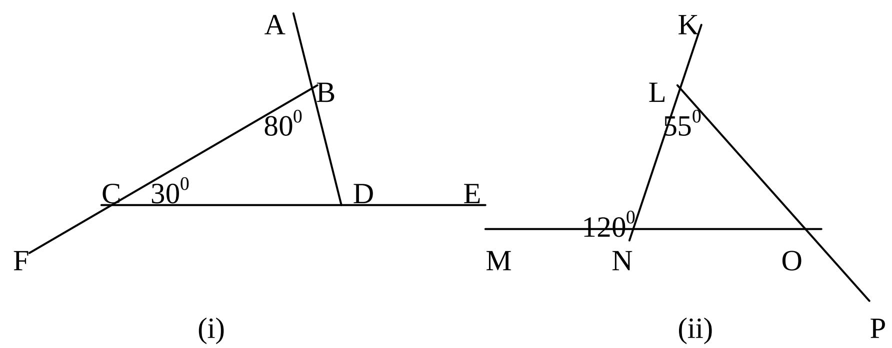
A. BC = 5 cm B. AC = 5 cm C. m$\angle$BAC = 65^0 D. m$\angle$BAC = 55^0

6. Perhatikan Gambar 4.9 (i), bila m$\angle$CBD = 80^0 dan m$\angle$BC D = 30^0, berapakah m$\angle$BDE ?

A. 50^0 b. 80^0 C. 110^0 D. 120^0

7. Perhatikan Gambar 4.9 (ii), bila m$\angle$LNM = 120^0 dan m$\angle$NLO = 55^0, berapakah m$\angle$LON ?

A. 55^0 b. 65^0 C. 75^0 D. 175^0

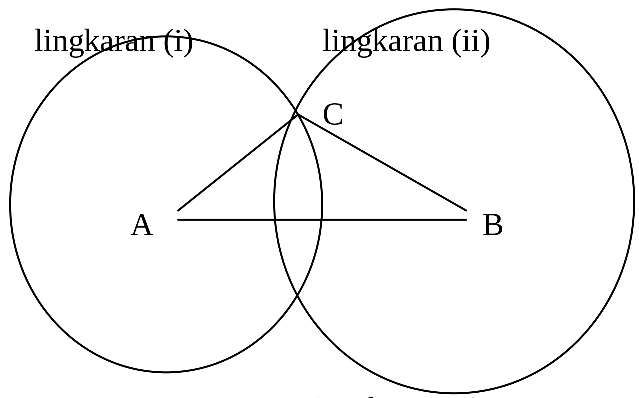


Gambar 3.9

Melukis segitiga

Ukuran-ukuran pada sebuah segitiga terbagi menjadi ukuran sisi dan ukuran sudut, ada tiga buah ukuran sisi dan tiga buah ukuran sudut. Apakah untuk melukis sebuah segitiga harus semua ukuran sisi maupun ukuran sudut diketahui terlebih dahulu ? Pada bagian 3.1 di muka telah disinggung bahwa jika diketahui ukuran ketiga sisi segitiga yang memenuhi syarat tertentu (ketidaksamaan segitiga) maka dapat dibentuk segitiga. Berdasarkan fakta tersebut, ternyata untuk melukis sebuah segitiga tertentu tidak harus diketahui terlebih dahulu seluruh unsur-unsurnya. Dengan menggunakan mistar dan jangka, serta busur kita dapat melukis sebuah segitiga walaupun hanya diketahui ukuran tiga unsur dari enam unsur segitiga.

a. Melukis segitiga yang diketahui ukuran ketiga sisinya.
Contoh:
Lukislah Δ ABC, jika AB = 6 cm, BC = 4 cm dan AC = 3 cm.
Perhatikan Gambar 4. 10, adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.
1.Buatlah ruas garis AB = 6 cm.
2.Buat lingkaran (i) dengan pusat A dengan jari-jari AC = 3 cm.
3.Buatlah lingkaran (ii) dengan pusat B dengan jari-jari BC = 4 cm
4.Perpotongan lingkaran (i) dan (ii) merupakan titik C
5.Terdapat dua titik potong kedua lingkaran itu, pilihlah salah satu saja.
6. Buatlah ruas garis AC dan BC, terbentuklah segitiga yang diinginkan



Gambar 3. 10

Apabila ukuran ketiga sisinya itu sama panjang, dengan prosedur dia atas, dapat dilukis segitiga sama sisi, yang menurut pernyataan pada bagian 3.2 sudut-sudutnya sama besar yaitu 60^0. Dengan demikian untuk melukis sebuah sudut yang berukuran 60^0 dapat digunakan prosedur melukis segitiga sama sisi. Selanjutnya dengan melukis garis bagi sudut yang berukuran 60^0, diperoleh sudut yang berukuran 30^0.

b. Melukis segitiga yang diketahui ukuran dua sisinya serta ukuran sudut yang diapit kedua sisi itu.
Contoh:
Lukislah Δ DEF, jika DE = 4 cm, DF = 5 cm, dan $m\angle EDF = 50^0$.
Cobalah lakukan sendiri langkah-langkah berikut.
1.Buatlah ruas garis DE = 4 cm.
2.Dengan menggunakan busur buatlah sinar DG, sehingga $m\angle GDF = 50^0$.
3.Buatlah lingkaran dengan pusat D dengan jari-jari DF = 5 cm
4.Perpotongan lingkaran dengan sinar DG adalah titik F.

c. Melukis segitiga yang diketahui ukuran dua sudutnya serta panjang sisi yang diapit kedua sudut itu.

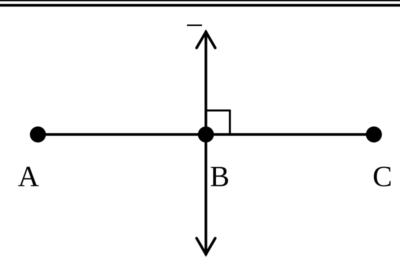
Contoh:
Lukislah Δ KLM, jika KL = 5 cm, m$\angle$KLM = 20^0, dan m$\angle$LKM = 70^0.
Cobalah lakukan sendiri langkah-langkah berikut.
1.Buatlah ruas garis KL = 5 cm.
2.Dengan menggunakan busur buatlah sinar KX, sehingga m$\angle$LKX = 70^0.
3.Dengan menggunakan busur buatlah sinar LY, sehingga m$\angle$KLY = 20^0.
4.Perpotongan sinar KX dan sinar LY adalah titik M yang diinginkan.

Latihan 3.3
Segitiga di bawah ini manakah yang dapat dilukis ? Apabila dapat, gunakan mistar, jangka dan busur untuk melukisnya dan bila tidak dapat dilukis berikan alasan !

1. Δ ABC sama sisi dengan AB = 5 cm.
2. Δ GHO dengan GH = 10 cm, GO = 4 cm dan HO = 3 cm
3. Δ DEF, jika DE = 4 cm, DF = 4 cm, dan m$\angle$EDF = 60^0.
4. Δ KLM, jika KL = 5 cm, m$\angle$KLM = 70^0, dan m$\angle$MKL = 50^0.
5. Δ PQR, jika PQ = 6 cm, m$\angle$PQR = 50^0, dan m$\angle$PRQ = 100^0.
6. Δ STU, jika ST = 3 cm, TU = 6 cm, dan m$\angle$SUT = 80^0.
7. Δ XYZ, jika m$\angle$XYZ = 70^0, m$\angle$XZY = 60^0, dan m$\angle$YXZ = 50^0.
8. Lukislah sebuah sudut yang berukuran 60^0, dan kemudian sudut berukuran 30^0.

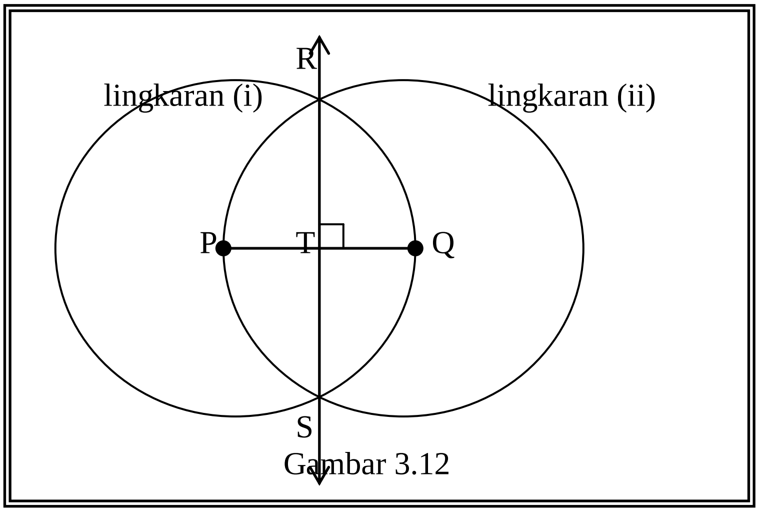
3. 4 Garis garis pada segitiga

Misalkan titik-titik A, B dan C kolinear, bila AB = BC, maka B disebut titik tengah ruas garis $\overline{AC}$. Garis yang melalui titik B dan tegak lurus $\overline{AC}$ AC, disebut garis sumbu dari $\overline{AC}$ (lihat Gambar 3. 11).



Gambar 3. 11

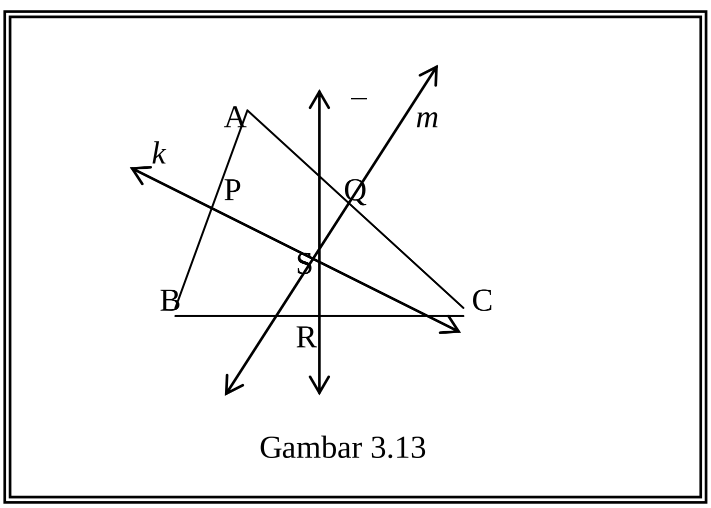
Cara melukis garis sumbu ruas garis $\overline{PQ}$ dan menentukan titik tengahnya seperti terlihat pada Gambar 3.12 dengan langkah-langkah sebagai berikut:



Gambar 3.12

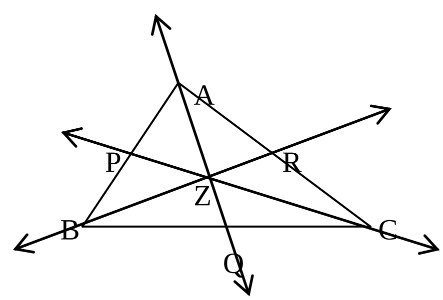
1. Buat lingkaran (i) dengan pusat P dan jari-jari PQ
2. Buat lingkaran (ii) dengan pusat Q dan jari-jari QP
3. Titik potong lingkaran (i) dan lingkaran (ii) ada dua, misalkan R dan S
4. Garis $\overleftrightarrow{RS}$ adalah garis sumbu dari $\overline{PQ}$ dan T titik potong $\overleftrightarrow{RS}$ dan $\overline{PQ}$ adalah titik tengah $\overline{PQ}$.

Pada sebuah segitiga dikenal dengan garis sumbu sisi-sisi segitiga, garis berat, garis bagi sudut-sudut segitiga, dan garis tinggi (tinggi) suatu segitiga. Perhatikan Gambar 3.13, *k*, ‾, dan *m* masing-masing garis sumbu sisi $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ dan $\overline{AC}$ pada Δ ABC. Titik-titik P, Q dan R berturut-turut adalah titik tengah sisi $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, dan $\overline{BC}$. Garis $k \perp \overleftrightarrow{AB}$ di P, $m \perp \overleftrightarrow{AC}$ di Q, serta ‾ $\perp \overleftrightarrow{BC}$. Ketiga garis itu berpotongan di sebuah titik S, ketiga garis seperti itu dikatakan *konkuren*.. Cara melukis garis-garis sumbu tersebut, seperti melukis garis sumbu suatu ruas garis yang telah pada Gambar 3.12 di atas.



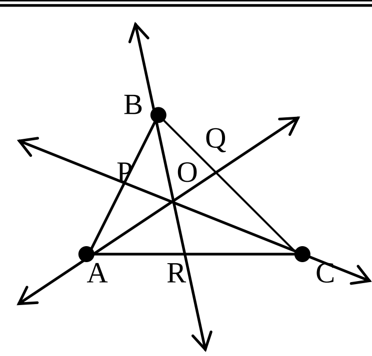
Gambar 3.13

Garis berat segitiga adalah garis yang melalui titik sudut segitiga dan titik tengah sisi dihadapan sudut tersebut. Perhatikan Δ ABC pada Gambar 4.14, P, Q, dan R masing-masing titik tengah sisi $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ dan $\overline{AC}$. Garis garis berat segitiga itu ada tiga buah yaitu $\overleftrightarrow{AQ}$, $\overleftrightarrow{BR}$, dan $\overleftrightarrow{CP}$. Ketiga garis berat suatu segitiga juga konkuren di sebuah titik, sebut saja titik Z. Untuk menentukan titik tengah masing-masing sisi segitiga, digunakan prosedur melukis garis sumbu yang telah dikemukakan di atas.



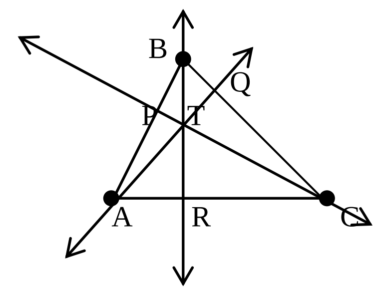
Gambar 3.14

Garis bagi sebuah segitiga adalah garis bagi masing-masing sudutnya, untuk melukisnya digunakan prosedur melukis garis bagi suatu sudut. Garis bagi Δ ABC ada tiga buah, yaitu masing-masing garis AQ membagi dua sama besar ∠A, BR membagi dua sama besar ∠B, dan garis CP membagi dua sama besar ∠C. Ketiga garis bagi tersebut juga konkuren di titik O (lihat pada Gambar 3.15).



Gambar 3.15

Garis tinggi sebuah segitiga adalah garis yang melalui titik sudut segitiga dan tegaklurus terhadap yang memuat sisi dihadapannya. Gambar 4. 16, memperlihatkan garis $\overleftrightarrow{AQ}$, $\overleftrightarrow{BR}$, dan $\overleftrightarrow{CP}$ adalah garis-garis tinggi Δ ABC. $\overleftrightarrow{AQ} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BR} \perp \overleftrightarrow{AC}$, dan $\overleftrightarrow{CP} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Ketiga garis tinggi ini juga konkuren di titik T. Untuk melukis garis tinggi segitiga dipergunakan prosedur melukis garis tegaklurus terhadap sebuah garis yang diberikan dan melalui sebuah titik yang terletak di luar garis tersebut.



Gambar 3. 16

Untuk kepentingan pada bagian tertentu selanjutnya, dibedakan antara *garis tinggi* dengan *tinggi* segitiga. Tinggi segitiga bermakna ruas garis, sehingga memiliki ukuran. Pada Gambar 3. 16 ruas garis $\overline{AQ}$ adalah tinggi yang bersesuaian dengan sisi $\overline{BC}$, $\overline{BR}$ adalah tinggi yang bersesuaian dengan sisi $\overline{AC}$, dan $\overline{CP}$ adalah tinggi yang bersesuaian dengan sisi $\overline{AB}$.

Latihan 3. 4

1. Lukislah ketiga garis berat dari sebuah Δ ABC siku-siku di B.
2. Lukislah ketiga garis bagi Δ KLM yang lancip.
3. Lukislah ketiga garis tinggi Δ PQR yang memiliki sudut tumpul di R.

Bahan Diskusi

1.Diketahui Δ DEF dengan DE = 5 cm, DF = 4 cm, serta $\angle$DEF = 60^0. Dapat segitiga itu dilukis ?

2.Diketahui Δ MNO dengan MN = 5 cm, $\angle$MNO = 60^0 dan $\angle$MON = 45^0 . Dapatkah segitiga itu dilukis?

3. Diberikan sebuah segitiga dengan sisi-sisinya berbeda panjangnya. Manakah sudut yang paling besar, manakah sudut yang paling kecil ?

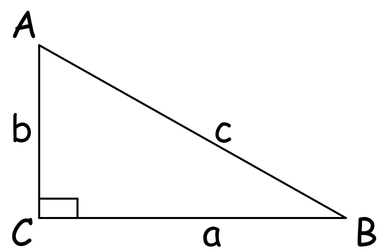
4.Pada suatu segitiga siku-siku, di manakah ketiga garis tingginya konkuren ?

5.Pada suatu segitiga tumpul, di manakah ketiga garis tingginya konkuren ?

6.Bila diberikan sebuah gambar sudut, carilah prosedur melukis sudut yang ukurannya sama dengan sudut yang diberikan.

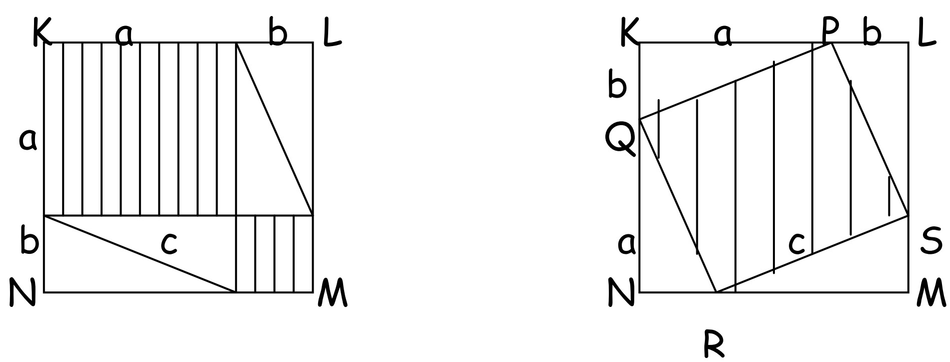
3.5 Teorema Pythagoras dan Kebalikannya

Perhatikan segitiga ABC si-siku di C pada Gambar 3.17 berikut ini. Sisi AC dan BC disebut sisi siku-siku, sedangkan sisi AB disebut hipotenusa (sering disebut sisi miring). Hipotenusa atau sisi miring adalah sisi yang dihadapan sudut siku-siku (bukan karena digambar miring). Ukuran panjang sisi dihadapan titik A biasa dimisalkan a satuan panjang (misal cm), ukuran panjang sisi dihadapan titik B adalah b satuan panjang dan ukuran panjang dihadapan titik C adalah c satuan panjang. Permasalahannya adalah jika ukuran a dan b bagaimana rumus c yang dinyatakan a dan b.



Gambar 3.17.

Sekarang perhatikan gambar persegi KLMN dengan ukuran sisinya (a + b)ntuk membuktikan teorema di atas buatlah persegi dengan ukuran sisi (a +b) dalam dua gambar yang berbeda sebagai berikut:



(i) (ii)

Gambar 3.18

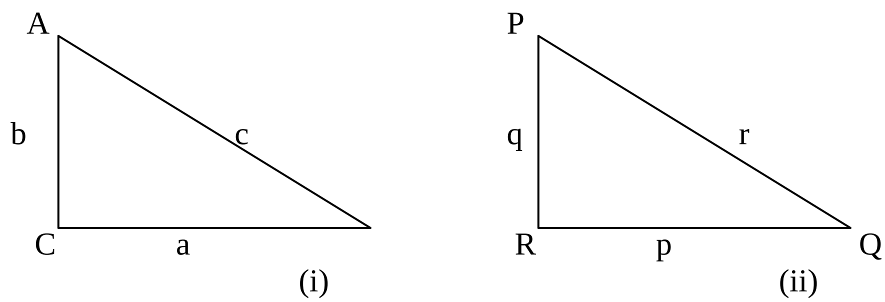
Luas kedua persegi itu sama yaitu $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Perhatikan Gambar 3.18 (ii) Δ PQK siku-siku di K dengan PK = a dan QK = b sehingga luas daerah Δ PQK adalah ½ ab. Demikian pula luas daerah Δ PSL = luas daerah Δ RSM = luas daerah Δ QRN = ½ ab. Segiempat PQRS berupa persegi dengan panjang sisi c, sehingga luas daerahnya adalah c^2. Luas daerah PQRS = luas daerah KLMN – luas daerah Δ PQK- luas daerah Δ PSL luas daerah - Δ RSM - luas daerah Δ QRN atau

$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - ½\,ab - ½\,ab - ½\,ab - ½\,ab$ atau $c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$.

Kebalikan Teorema Pythagoras

Teorema Pythagoras menyatakan bahwa pada Δ ABC jika $\angle$ C siku-siku, maka $a^2 + b^2 = c^2$. Perlu diingat kembali bahwa c merupakan sisi yang terpanjang. Kebalikan dalil Pythagoras adalah, pada Δ ABC dengan sisi yang terpanjang adalah c , jika $c^2 = a^2 + b^2$ maka $\angle$ C siku-siku.

Perhatikan Gambar 3.19, pada Gambar 5.13 (i) diketahui bahwa $c^2 = a^2 + b^2$, apakah $\angle$ C siku-siku ? Sedangkan Gambar 5. 13 (i) adalah segitiga siku-siku dengan sisi-sisi sikunya a dan b, hipotenusanya tidak diketahui, misalkan x. Berdasarkan dalil Pythagoras, maka $x^2 = a^2 + b^2$. Dari $c^2 = a^2 + b^2$ dan $x^2 = a^2 + b^2$ diperoleh kesimpulan bahwa $x^2 = a^2$ atau x = a. Dengan demikian kedua segitiga itu Δ ABC dan ΔPQR sisi sisi yang bersesuian memiliki ukuran sama AB = PQ, AC = PR, dan BC = QR. Dengan kata lain Δ ABC kongruen ΔPQR, akibatnya sudut-sudut yang bersesuaian haruslah berukuran sama, sehingga ukuran $\angle$ C = ukuran $\angle$ R, artinya $\angle$ C siku-siku.



Gambar 3.19

Tigaan (Tripel) Pythagoras

Ukuran ketiga sisi-sisi segitiga siku-siku berupa bilangan asli disebut tripel Pythagoras. Misalnya 3, 4, dan 5 sebab $3^2 + 4^2 = 5^2$, demikian pula 5, 12, dan 13 sebab $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Untuk memperoleh tripel Pythagoras, isilah table berikut ini dengan cara memilih dua bilangan asli yang berbeda, misalnya m dan n dengan m > n.

M	n	m^2-n^2	2mn	m^2+n^2	Tripel Pythagoras
2	1	2^2-1^2 = 3	2 × 2 × 1 = 4	2^2 + 1^2 = 5	3, 4, 5
3	1				
3	2	3^2 – 2^2 = 5	2 × 3 × 2 = 12	32 + 2^2 = 13	5, 12, 13
4	1				
4	2				
4	3				
5	1				
5	2				
5	3				
5	4				

Latihan 3.5

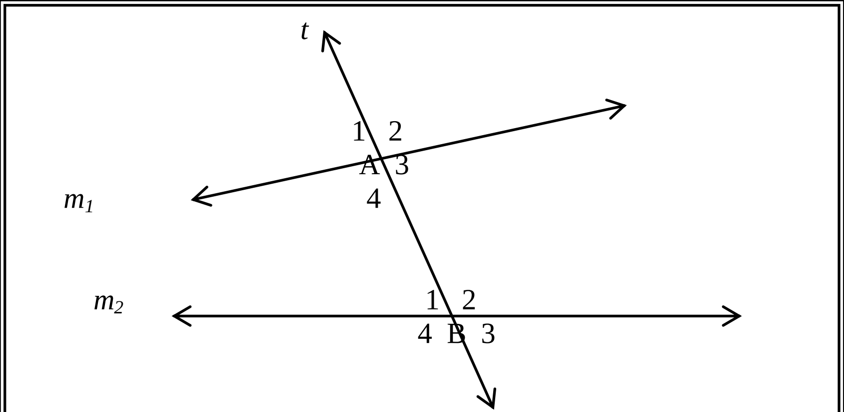
1. Buktikan teorema Pythagoras dan kebalikannya dengan cara lain

2. Jika suatu segitiga sisi-sisinya a, b, dan c dengan c adalah sisi yang terpanjang. Jika $a^2 + b^2 \neq c^2$, maka segitiga itu bukanlah segitiga siku-siku. Segitiga apakah jika $a^2 + b^2 > c^2$, dan segitiga apakah jika $a^2 + b^2 < c^2$.

BAB IV
GARIS-GARIS SEJAJAR

4.1 Macam-macam Pasangan Sudut

Misalkan pada sebuah bidang terdapat dua garis yaitu m_1 dan m_2 (tidak harus sejajar) dan dan ada sebuah garis lain t ((transversal) yang memotong kedua garis tersebut (Gambar 4.1) maka terdapat pasangan *sudut-sudut dalam berseberangan*, *sudut-sudut luar berseberangan*, *sudut-sudut sehadap*, *sudut-sudut dalam sepihak*, dan *sudut-sudut luar sepihak*

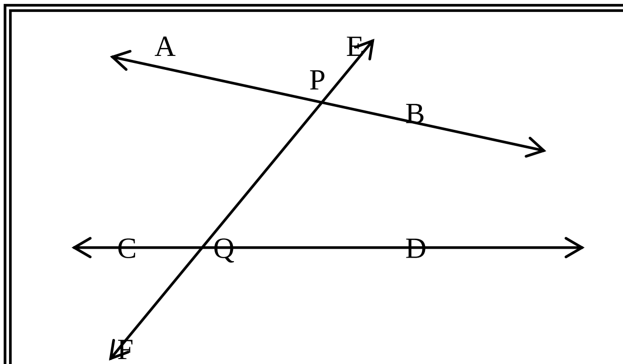


Gambar 4.1

Pasangan $\angle A_3$ dengan $\angle B_1$ dan pasangan $\angle A_4$ dengan $\angle B_2$ disebut pasangan *sudut-sudut dalam berseberangan* . Pasangan $\angle A_1$ dengan $\angle B_3$ dan $\angle A_2$ dengan $\angle B_4$ disebut pasangan *sudut-sudut luar berseberangan*. Pasangan $\angle A_1$ dengan $\angle B_1$, $\angle A_2$ dengan $\angle B_2$, $\angle A_3$ dengan $\angle B_3$, dan pasangan $\angle A_4$ dengan $\angle B_4$ disebut pasangan *sudut-sudut sehadap*. Pasangan $\angle A_3$ dengan $\angle B_2$ dan $\angle A_4$ dengan $\angle B_1$ disebut pasangan *sudut-sudut dalam sepihak*. Pasangan $\angle A_2$ dengan $\angle B_3$ dan $\angle A_1$ dengan $\angle B_4$ disebut pasangan *sudut-sudut luar sepihak.*

Latihan 4.1

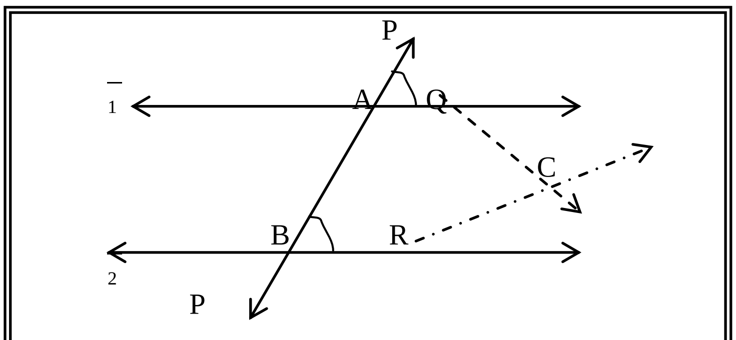
Perhatikan gambar 4.2 di bawah ini, garis $\overleftrightarrow{EF}$ memotong garis $\overleftrightarrow{AB}$ dan garis $\overleftrightarrow{CD}$ masing-masing di titik P dan Q. Tuliskan masing-masing sepasang sudut-sudut : (a) sehadap, (b) dalam berseberangan, (c) luar berseberangan, (d) dalam sepihak, dan (e) luar sepihak.



Gambar 4.2

4.2 Kesejajaran Dua Garis

Misalkan garis $\overline{\ }_1$ dan $\overline{\ }_2$ dipotong oleh transversal t dimana titik potongnya A dan B seperti terlihat pada Gambar 4.3. Jika ukuran pasangan sudut-sudut sehadapnya sama, apakah $\overline{\ }_1$ dan $\overline{\ }_2$ sejajar ?

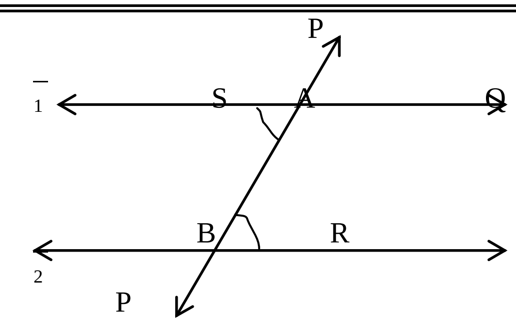


Gambar 4.3

Salah satu pasangan sudut sehadap pada Gambar 4.2 adalah $\angle$ PAQ dan $\angle$ PBR dan m$\angle$ PAQ = m $\angle$ PBR. Andaikan $\overline{\ }_1$ dan $\overline{\ }_2$ tidak sejajar, dan berpotongan di titik C, sehingga terbentuk Δ ABC. $\angle$ PAC = $\angle$ PAQ adalah sudut luar yang bersesuaian dengan $\angle$ BAQ. Menurut aturan pada bagian 2. 2, m$\angle$ PAQ > m$\angle$ ABC atau m$\angle$ PAQ > m$\angle$ PBR. Hal ini bertentangan dengan yang diketahui bahwa m$\angle$ PAQ = m$\angle$ PBR, oleh karena itu pengandaian $\overline{\ }_1$ dan $\overline{\ }_2$ tidak sejajar adalah salah. Jadi haruslah $\overline{\ }_1$ sejajar $\overline{\ }_2$.

Misalkan ada dua garis dipotong oleh garis ketiga, jika sudut sehadapnya berukuran sama maka kedua garis itu sejajar.

Perhatikan Gambar 4.4, garis $\overline{\ }_1$ dan $\overline{\ }_2$ dipotong oleh transversal *t* dimana titik potongnya A dan B, serta pasangan sudut dalam berseberangan $\angle$ ABR dan $\angle$ BAS berukuran sama. Karena ∠ BAS dan ∠ PAQ saling bertolak belakang, maka m∠ BAS = m ∠ PAQ, sedangkan m ∠ BAS = m∠ ABR , disimpulkan m ∠ PAQ = m ∠ ABR. Pasangan sudut ∠ PAQ dan ∠ ABR adalah pasangan sudut yang sehadap, berdasarkan aturan di atas disimpulkan $_1$ dan $_2$ sejajar.



Gambar 4.4

Misalkan ada dua garis dipotong oleh garis ketiga, jika pasangan sudut dalam berseberangannya berukuran sama maka kedua garis itu sejajar.

Selanjutnya dapat ditunjukkan pula aturan-aturan sebagai berikut:

(1) **Misalkan ada dua garis dipotong oleh garis ketiga, jika pasangan sudut luar berseberangannya berukuran sama maka kedua garis itu sejajar.**

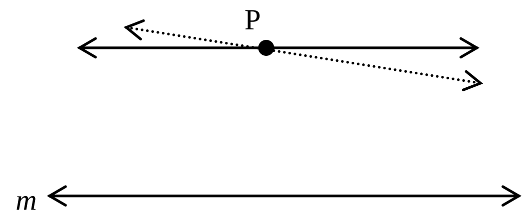
(2) **Misalkan ada dua garis dipotong oleh garis ketiga, jika ukuran pasangan sudut sudut dalam sepihaknya berjumlah 180^0 maka kedua garis itu sejajar.**

(3) **Misalkan ada dua garis dipotong oleh garis ketiga, jika ukuran pasangan sudut sudut luar sepihaknya berjumlah 180^0 maka kedua garis itu sejajar.**

Latihan 4.2
Tunjukkan kebenaran tiga pernyataan di atas !

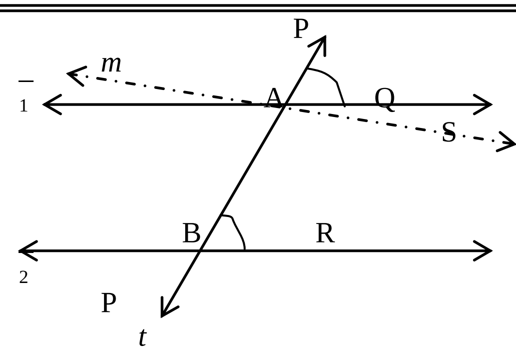
5.3 Ukuran Pasangan Sudut Pada Garis-garis Sejajar

Menurut Euclid, melalui sebuah titik P yang terletak di luar sebuah garis *m* terdapat tepat satu garis yang sejajar dengan garis yang diketahui (gambar 4.5). Geometri yang dikembangkan berdasarkan ketentuan (postulat) tersebut disebut Geometri Euclid.



Gambar 4.5

Perhatikan Gambar 4.6, garis $\overline{\ }_1$ sejajar $\overline{\ }_2$ dipotong oleh transversal *t* dimana titik potongnya A dan B, apakah ukuran pasangan sudut sehadapnya sama ?

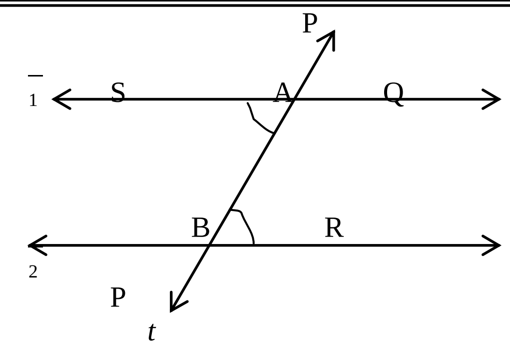


Gambar 4.6

Andaikan ukuran pasangan sehadapnya tidak sama, m∠ PAQ ≠ m∠ PBR. Maka melalui titik A dapat dibuat garis m sehingga m∠ PAS = m∠ PBR. Dengan demikian ∠ PAS dan ∠ PBR merupakan pasangan sudut sehadap, berdasarkan aturan di atas disimpulkan garis *m* sejajar dengan garis $\overline{\ }_{2.}$ Karena $\overline{\ }_1$ juga melalui titik A dan sejajar $\overline{\ }_{2.}$ maka terdapat dua garis yang melalui A dan sejajar dengan $\overline{\ }_{2.}$ Hal ini tidak mungkin karena berlawanan dengan ketentuan Euclid di atas. Dengan demikian pengandaian di atas adalah salah, haruslah , m ∠ PAQ = m∠ PBR.

Jika dua garis yang sejajar dipotong oleh garis ketiga, maka ukuran pasangan sudut sehadapnya sama

Perhatikan Gambar 4.7, garis $\overline{\ }_1$ sejajar $\overline{\ }_2$ dipotong oleh transversal *t* dimana titik potongnya A dan B, apakah ukuran pasangan sudut dalam berseberangannya sama sama ?



Gambar 4.7

Menurut aturan di atas, jika ${}_1$ sejajar ${}_2$ maka $m\angle PAQ = m\angle PBR$. Karena $\angle PAQ$ dan $\angle BAS$ bertolak belakang maka $m\angle PAQ = m\angle BAS$, sehingga disimpulkan $m\angle BAS = m\angle PBR$. Dengan kata lain:

Jika dua garis yang sejajar dipotong oleh garis ketiga, maka ukuran pasangan sudut dalam berseberangannya sama.

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan aturan-aturan berikut:

(1) Jika dua garis yang sejajar dipotong oleh garis ketiga, maka ukuran pasangan sudut luar berseberangannya sama.

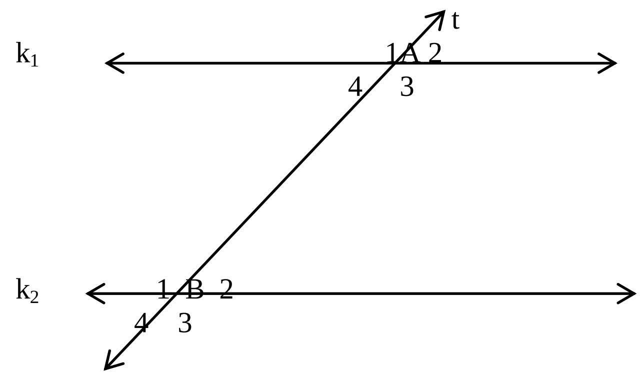
(2) Jika dua garis yang sejajar dipotong oleh garis ketiga, maka jumlah ukuran pasangan sudut dalam sepihaknya adalah 180^0.

(3) Jika dua garis yang sejajar dipotong oleh garis ketiga, maka jumlah ukuran pasangan sudut dalam sepihaknya adalah 180^0.

Latihan 4.3

1. Tunjukkan ketiga pernyataan di atas!
2. Perhatikan Gambar 5.7 Garis k_1 sejajar dengan garis k_2 dipotong oleh garis t masing Masing di titik A dan B, misalkan $m\angle A_2 = 40^0$, tentukan :

   a. $m\angle A_1$ b. $m\angle A_3$ c. $m\angle B_1$ d. $m\angle B_3$ e. $m\angle B_4$



Gambar 5.7

3. Diketahui $\overline{\ }_1$ sejajar $\overline{\ }_2$., dan garis *m* memotong kedua garis itu. Jika *m* tegaklurus $\overline{\ }_1$ tunjukkan *m* tegaklurus pula terhadap $\overline{\ }_2$.

Bahan Diskusi

1.Diketahui garis $\overline{\ }_1 \perp m$ dan $\overline{\ }_2 \perp m$, tunjukkan $\overline{\ }_1$ sejajar $\overline{\ }_2$.

2.Diketahui garis $\overline{\ }_1$ sejajar *m* dan $\overline{\ }_2$ sejajar *m*, tunjukkan $\overline{\ }_1$ sejajar $\overline{\ }$

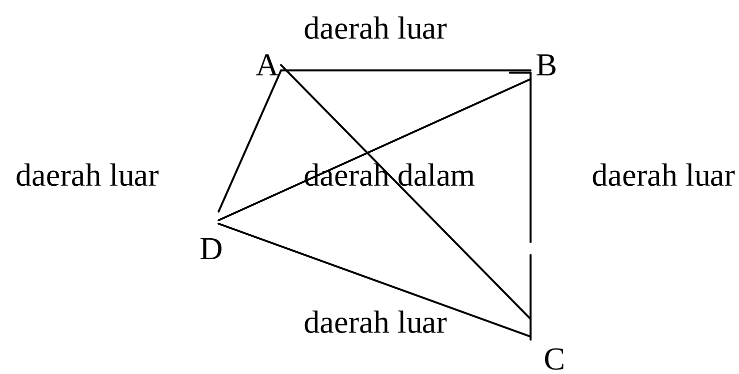
3.Diketahui garis $\overline{\ }_1$ sejajar $\overline{\ }_2$ keduanya memotong garis *m*, tunjukkan bahwa kedua garis bagi pasangan sudut sehadap sejajar.

4.Diketahui garis $\overline{\ }_1$ dan $\overline{\ }_2$ dipotong oleh garis ketiga *m* . Tunjukkan jika kedua garis bagi dari pasangan sudut sehadap sejajar, maka $\overline{\ }_1$ sejajar $\overline{\ }_2$.

BAB V
SEGIEMPAT

5.1 Jenis-jenis segiempat

Dalam keseharian, sering ditemukan bangun-bangun yang memuat segiempat. Sebagai contoh, bidang-bidang yang membentuk kemasan susu bubuk berbentuk persegi panjang. Contoh lain adalah berbagai lapangan permainan seperti; lapangan basket, sepakbola, dan sebagainya. Dalam pandangan matematika yang dimaksud dengan persegi panjang pada lapangan sepakbola adalah ruas garis pembatas antara daerah permainan dan daerah luar permainan. Dengan demikian menurut matematika, segiempat ABCD adalah gabungan dari $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, dan $\overline{DA}$. yang membatasi daerah dalam (interior) dan daerah luar (eksterior), seperti terlihat pada Gambar 5.1.

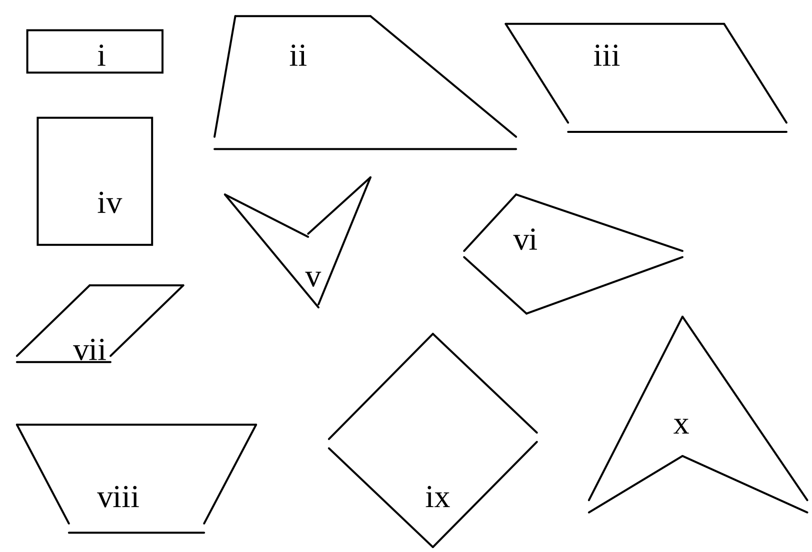


Gambar 5.1

Segiempat terdiri dari empat ruas garis yang disebut *sisi*. Setiap ujung sisi yang satu berimpit dengan titik ujung sisi yang lain dan tidak ada dua sisi yang terletak segaris, serta tidak ada dua sisi yang berpotongan selain di titik ujungnya. Pasangan dua sisi yang tidak memiliki titik persekutuan disebut *pasangan sisi yang berhadapan*. Pasangan dua sisi yang memiliki titik persekutuan disebut *pasangan sisi yang berdekatan*. Pada Gambar 6.1, pasangan $\overline{AB}$ dan $\overline{DC}$, juga pasangan $\overline{AD}$ dan $\overline{BC}$ merupakan pasangan sisi yang berhadapan. Sedangkan pasangan $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$, pasangan $\overline{BC}$ dan $\overline{CD}$, pasangan $\overline{CD}$ dan $\overline{DA}$, serta pasangan $\overline{DA}$ dan $\overline{AB}$ merupakan pasangan sisi yang berdekatan. Ruas garis $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ dinamakan *diagonal*

Pada segiempat terbentuk empat buah sudut. Pasangan sudut yang tidak memiliki kaki persekutuan disebut *pasangan sudut yang berhadapan*. Pasangan sudut yang memiliki kaki persekutuan disebut *pasangan sudut yang bersisian*. Pada Gambar 5.1, pasangan sudut yang berhadapan adalah pasangan $\angle A$ dan $\angle C$ serta pasangan $\angle B$ dan $\angle D$. Sedangkan pasangan sudut yang bersisian adalah $\angle A$ dan $\angle B$, $\angle B$ dan $\angle C$, $\angle C$ dan $\angle D$, serta $\angle D$ dan $\angle A$.

Bangun segiempat ada berbagai ragam seperti seperti; persegi, persegi panjang, trapesium, belah ketupat, jajar genjang, layang-layang, dan sebagainya seperti yang terlihat pada Gambar 5.2. Bangun Gambar 5.2 (i) secara khusus disebut persegi panjang, secara umum bangun itu boleh juga dikatakan jajar genjang, bahkan boleh juga disebut trapesium. Demikian pula bangun Gambar 5.2 (iv), secara khusus disebut persegi, tetapi boleh disebut pula sebagai persegi panjang, atau belah ketupat, maupun jajar genjang. Hal ini didasarkan atas sifat-sifat yang berlaku pada bangun-bangun itu, yang kemudian mendefinisikan setiap bangun tersebut.



Gambar 5.2

Berdasarkan kesejajaran, jenis-jenis segiempat didefinisikan sebagai berikut:

1.Trapesium adalah segiempat yang paling sedikit memiliki sepasang sisi yang sejajar
2. Jajar genjang adalah segiempat yang memiliki dua pasang sisi yang sejajar
3. Persegi panjang adalah jajar genjang yang memiliki sudut siku-siku
4. Belah ketupat adalah jajar genjang yang semua ukuran sisinya sama
5. Persegi adalah persegi panjang yang ukuran semua sisinya sama
   atau belah ketupat yang memiliki sudut siku-siku
6.Layang-layang adalah segiempat yang memiliki dua pasang sisi yang berdekatan sama panjang.

Keterkaitan keenam jenis segiempat itu dapat digambarkan dalam diagram berikut.

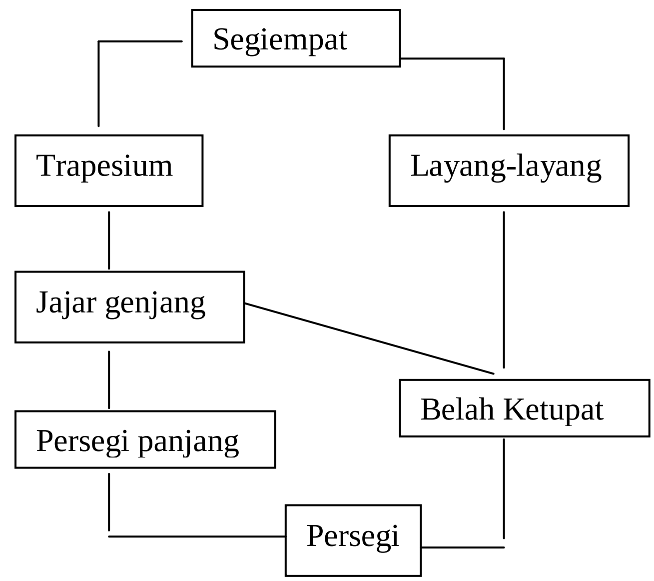
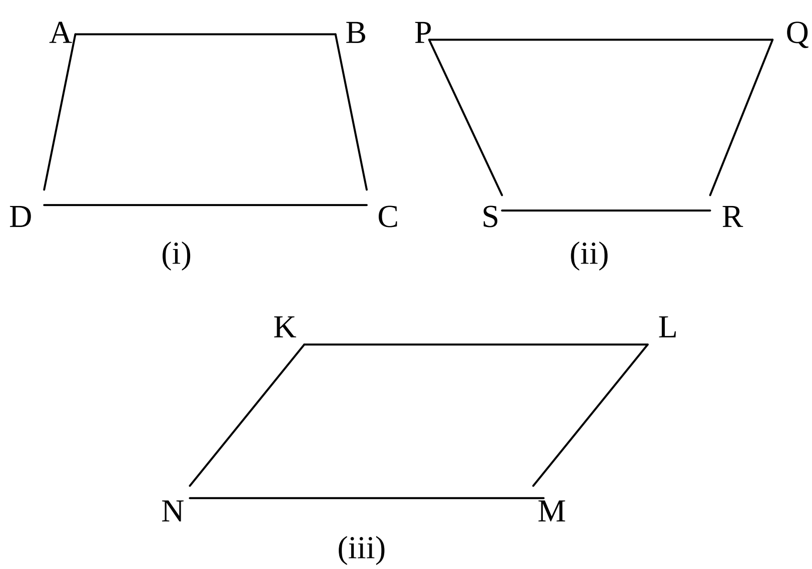


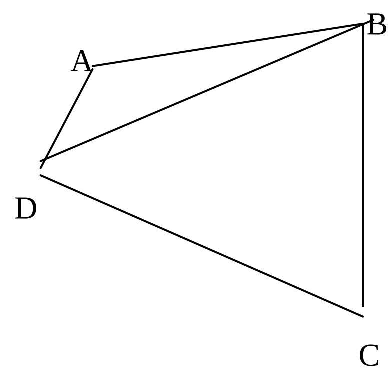
Diagram 5.1

Pada bangun trapesium ada yang disebut trapesium sama kaki, seperti yang terlihat pada gambar 5.3. Trapesium ABCD adalah trapesium samakaki karena AD = BC.Trapesium PQRS juga sama kaki karena PS = QR. Segiempat KLMN juga merupakan trapesium dan KN = LM, tentu trapesium KLMN juga samakaki. Di lain pihak bangun KLMN disebut jajar genjang, dengan demikian jajargenjang termasuk trapesium sama kaki.



Gambar 5.3

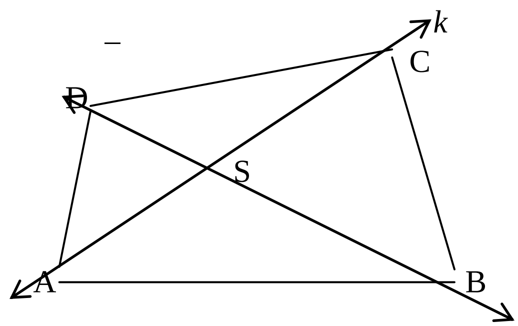
Telah kita ketahui bahwa jumlah ukuran sudut-sudut dalam segitiga adalah 180^0. Sekarang perhatikan segiempat ABCD pada Gambar 5.4, oleh diagonal $\overline{BD}$ terbentuk dua segitiga yaitu Δ ABD dan Δ CBD. Ukuran jumlah sudut-sudut Δ ABD yaitu $m\angle A + m\angle ABD + m\angle ADB = 180^0$, juga Ukuran jumlah sudut-sudut Δ CBD yaitu $m\angle C + m\angle CBD + m\angle CDB = 180^0$. Dengan demikian $(m\angle A + m\angle ABD + m\angle ADB) + (m\angle C + m\angle CBD + m\angle CDB) = 360^0$, atau $m\angle A + (m\angle ABD + m\angle CBD) + m\angle C + (m\angle ADB + m\angle CDB) = 360^0$. Tetapi $m\angle ABD + m\angle CBD = m\angle B$ dan $m\angle ADB + m\angle CDB = m\angle D$, jadi $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^0$.
Dengan demikian disimpulkan bahwa jumlah sudut-sudut dalam segiempat adalah 360^0.



Gambar 5.4

Latihan 5.1

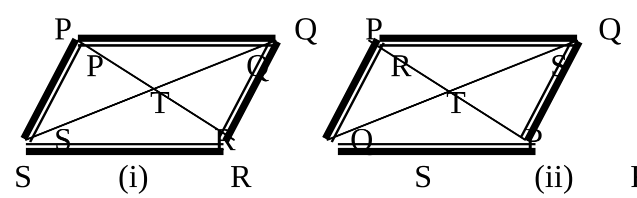
1. Gambarkan sebuah segiempat PQRS dengan PQ = 5 cm, QR = 4 cm, PS = 6 cm, $m\angle P = 120^0$, dan $m\angle Q = 90^0$.
2. Diketahui segiempat ABCD pada Gambar 6.5, garis *k* dan masing-masing garis bagi $\angle A$ dan $\angle B$ yang berpotongan di S.
   Tunjukkan $m\angle ASB = ½ (m\angle C + m\angle D)$.



Gambar 6.5

5.2 Jajar genjang

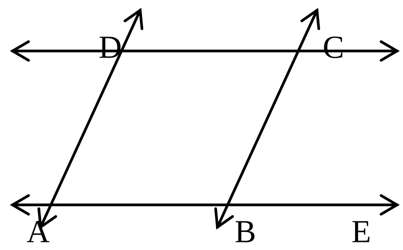
Misalkan jajar genjang PQRS dan diagonal-diagonalnya saling berpotongan di titik T. Oleh titik T diagonal PR terbagi dua menjadi PT dan RT, sedangkan diagonal QS terbagi dua menjadi TQ dan TS. Jajar genjang tersebut dapat menempati bingkainya dengan dua cara, pertama jajar genjang ditempatkan pada bingkainya seperti Gambar 6.6(i). Kemudian dengan memutar sejauh 180^0 searah jarum jam dengan pusat T, jajar genjang menempati bingkainya seperti ditunjukkan pada Gambar 5.6(ii). Titik P menempati titik R, titik Q menempati titik S, titik R menempati titik P dan titik S menempati Q. Selanjutnya diperoleh $\overline{PQ}$ menempati $\overline{RS}$ dan $\overline{QR}$ menempati $\overline{SP}$. Ini menunjukkan bahwa *pada jajar genjang sisi-sisi yang berhadapan berukuran sama.* Di samping itu juga ∠P menempati ∠R dan ∠Q menempati ∠S. Ini menunjukkan bahwa m∠P = m∠R, m∠Q = m∠S, atau *pada jajar genjang sudut-sudut yang berhadapan berukuran sama.* Lebih jauh lagi kita peroleh bahwa $\overline{TP}$ menempati $\overline{TR}$ dan $\overline{TQ}$ menempati $\overline{TS}$. Hal ini menunjukkan TP = TR dan TQ = TS, dengan kata lain, *pada jajar diagonal- diagonalnya saling membagi dua sama panjang.*



Gambar 5.6

Cara lain untuk menunjukkan bahwa pasangan sudut yang berhadapan pada jajar genjang adalah sebagai berikut:

Perhatikan jajar genjang ABCD pada Gambar 5.7, dengan ∠A dan ∠C adalah pasangan sudut yang saling berhadapan. Menurut definisi jajar genjang $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{DC}$ dan $\overleftrightarrow{AD}$ // $\overleftrightarrow{BC}$. ∠BAD dan ∠CBE merupakan pasangan sudut sehadap, karena $\overleftrightarrow{AD}$ // $\overleftrightarrow{BC}$, maka m∠BAD = m ∠CBE. ∠CBE dan ∠BCD merupakan pasangan sudut dalam berseberangan, karena $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{DC}$, maka m∠CBE = m ∠BCD. Akibatnya m∠BAD = m ∠BCD atau m∠A = m ∠C. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan m∠B = m ∠D.



Gambar 5.7

Perhatikan kembali Gambar 6.7, ∠A dan ∠B , ∠B dan ∠C, ∠C dan ∠D, serta ∠D dan ∠A, merupakan pasangan-pasangan sudut yang berdekatan. Telah dikemukakan di atas m∠DAB = m ∠CBE , karena AD // BC dan merupakan pasangan sehadap. Sementara ∠ABC dengan ∠CBE saling suplemen (saling berpelurus), akibatnya ∠DAB juga saling suplemen dengan ∠ABC. Dengan kata lain, *pada jajar genjang pasangan sudut yang berdekatan saling suplemen*.

Latihan 5.2

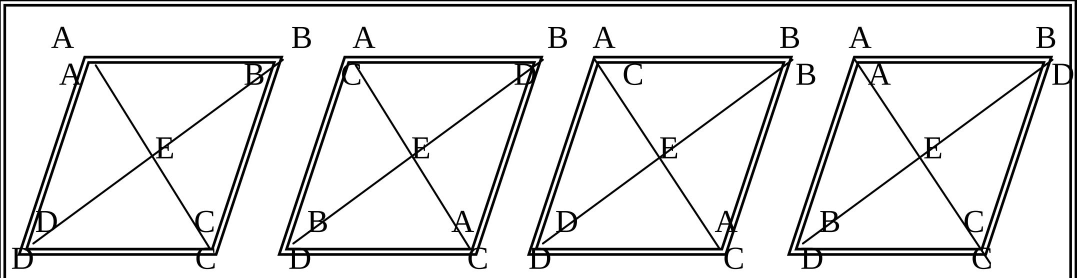
1. Gambarlah jajar genjang ABCD dengan AB = 5 cm, AD = 3 cm dan m∠A = 45^0.
2. Sebuah jajar genjang PQRS dengan diagonal-diagonalnya saling berpotongan di titik T. Gambarlah jajar genjang tersebut jika PR= 6 cm , QS = 4 cm, dan m∠PTS = 60^0.
3. Apakah keempat sifat jajar genjang itu, merupakan sifat belah ketupat, persegi panjang , dan persegi ? Berikan alasan !

5.3 Belah ketupat

Menurut definisi belah ketupat adalah jajar genjang yang ukuran sisinya sama. Oleh karena itu keempat sifat jajar genjang di atas merupakan sifat belah ketupat. Sekarang perhatikan belah ketupat ABCD, AB = BC = CD = DA, diagonal-diagonal AC dan BD berpotongan di titik E. Bangun belah ketupat dapat menempati bingkainya dalam empat cara seperti ditunjukkan pada Gambar 5.8.

Perhatikan Gambar 5.8 (i) dan (iii) menunjukkan ∠ AEB dan ∠ CEB bisa saling tukar tempat, artinya ∠ AEB ditempati ∠ CEB dan sebaliknya ∠ CEB ditempati ∠ AEB. Hal ini menunjukkan bahwa m∠ AEB = m ∠ CEB. Di samping itu ∠ AEB dan ∠ CEB saling berpelurus atau m∠ AEB + m ∠ CEB = 180^0, akibatnya m∠ AEB = m ∠ CEB = 90^0. Dengan kata lain, *pada belah ketupat diagonal-diagonalnya saling berpotongan tegaklurus.*

Gambar 6.8(i) dan (iii) juga menunjukkan bahwa ∠ ABE dan ∠ CBE serta ∠ ADE dan ∠ CDE bisa saling tukar tempat, artinya m∠ ABE = m ∠ CBE dan m∠ ADE = m ∠ CDE Ini menyimpulkan bahwa diagonal BD membagi ∠ ABC maupun ∠ ADC menjadi dua sama besar. Begitu pula diagonal AC membagi dua sama besar ∠ BAE dan ∠ ACE. Dengan kata lain *pada belah ketupat diagonal-diagonalnya nerupakan garis bagi sudut-sudutnya yang bersesuaian.*



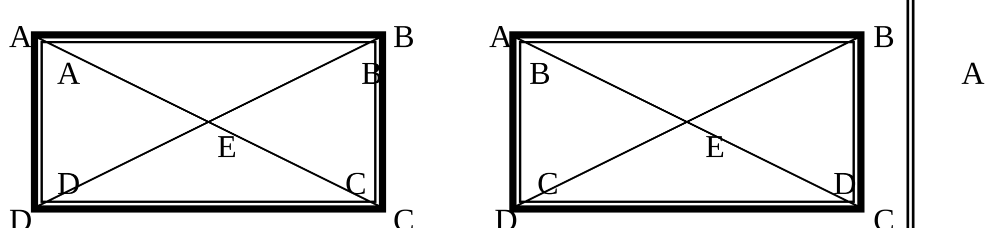
Gambar 6.8

Latihan 5.3

1. Gambarlah belahketupat PQRS dengan PR = 6 cm dan QS = 4 cm
2. Diketahui belah ketupat PQRS, diagonal-diagonalnya berpotongan di titik T.
   Jika m∠ PQT = 15^0, tentukan m∠ PQR dan m ∠ QRS !

5.4 Persegi panjang

Berdasarkan definisi di atas, persegi panjang adalah jajar genjang yang memiliki sudut siku-siku. Dengan demikian sifat jajar genjang berlaku pula pada persegi panjang. Jika ABCD suatu jajar genjang dan m∠ A = 90^0, menurut sifat jajar genjang sudut yang berhadapan dengan ∠ A yaitu ∠ C berukuran 90^0 pula. Demikian pula menurut sifat jajar genjang yang lain, sudut yang yang berdekatan dengan ∠ A yaitu, ∠ B dan ∠ D masing-masing saling suplemen dengan ∠ A. Karena m∠ A = 90^0 maka pasangan suplemennya m∠ B = m∠ D = $(180- 90)^0$= 90^0. Dengan demikian disimpulkan bahwa setiap sudut pada sebuah persegi panjang adalah sama dan berukuran 90^0.

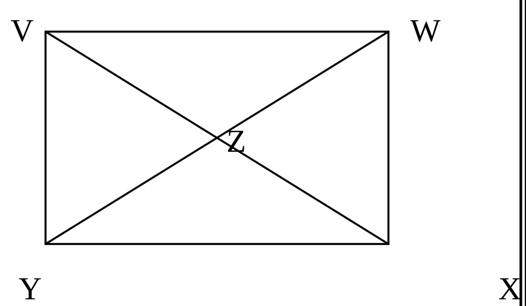


(i) Gambar 5.9 (ii)

Suatu persegi panjang dapat menempati bingkainya dengan empat cara, dua di antaranya seperti terlihat pada Gambar 5.9. Gambar tersebut menunjukkan bahwa diagonal BD dan diagonal AC dapat bertukar tempat, ini berarti AC = BD. Jadi dapat disimpulkan bahwa *pada persegi panjang diagonal-diagonalnya sama panjang*.

Latihan 5.4

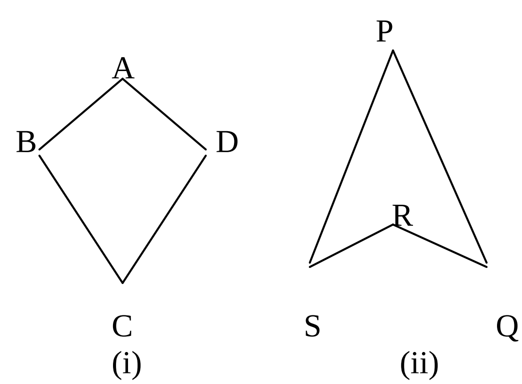
1. Gambarlah persegi panjang KLMN dengan KL = 7 cm dan KN = 3 cm.
2. Perhatikan persegi panjang VWXY pada Gambar 6.10. Jika m $\angle$VZW = 120^0, Tentukan m $\angle$VWY, m $\angle$VZY, dan m $\angle$YVX.



Gambar 5.10

5.5 Layang-layang

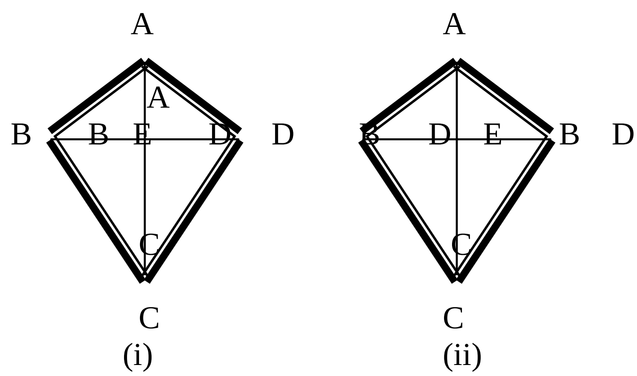
Layang-layang didefinisikan sebagai segiempat dengan dua pasang sisi yang berdekatan memiliki ukuran yang sama. Pada Gambar 5.11 (i) pasangan sisi yang berdekatan AB dengan AD dan CB dengan CD masing-masing pasangan berukuran sama. Demikian pula Gambar 5.11(ii) PQ dengan PS serta RQ dengan RS adalah pasangan sisi yang saling berdekatan masing-masing memiliki ukuran yang sama. Layang-layang ABCD disebut layang layang yang cembung, dan layang-layang PQRS disebut layang-layang yang tidak cembung.



Gambar 5.11

Berdasarkan definisi, belah ketupat memiliki ukuran sisi yang sama, dengan demikian jelas bahwa sisi-sisi yang berdekatan itu memiliki ukuran yang sama. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa suatu belah ketupat merupakan layang-layang, tetapi tidak setiap layang-layang merupakan belah ketupat.

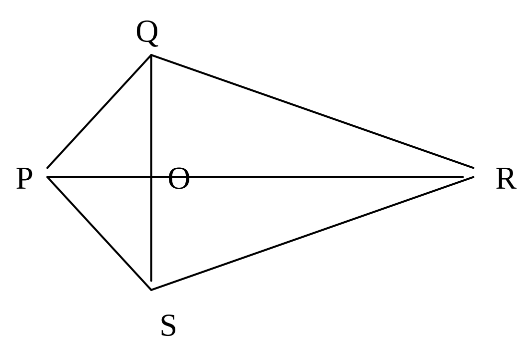
Layang-layang dapat menempati bingkainya dengan dua cara, seperti ditunjukkan pada Gambar 6.12. Titik B dan D bisa saling tukar tempat, demikian pula $\angle$ AEB dan $\angle$ AED. Hal ini menunjukkan m$\angle$ AEB = m$\angle$ AED. Sementara itu $\angle$ AEB dan $\angle$ AED saling suplemen, akibatnya m$\angle$ AEB = m$\angle$ AED = 900. Dengan demikian dapat disimpulkan *pada layang-layang diagonal-diagonalnya saling berpotongan tegaklurus.*



Gambar 5.12

Latihan 5.5

1. Gambarlah sebuah layang-layang cembung KLMN. KL = KN = 6 cm, ML = MN = 4 cm dan m$\angle$K = 60^0 .
2. Diberikan layang-layang PQRS dan O titik potong diagonalnya seperti terlihat pada Gambar 5.13. Jika m$\angle$P = 100^0 dan m$\angle$R = 40^0, tentukan m$\angle$PQS dan $\angle$RSQ



Gambar 6.13

5.6 Persegi

Persegi adalah persegi panjang yang ukuran sisi-sisinya sama. Karena persegi panjang itu juga jajar genjang, maka semua sifat jajar genjang dan persegi panjang berlaku pada bangun persegi. Karena persegi merupakan jajar genjang dan ukuran sisinya sama, maka persegi itu juga merupakan belah ketupat. Dengan demikian semua sifat belah ketupat berlaku pada bangun persegi. Tabel 6.1 di bawah ini menggambarkan sifat-sifat segiempat yang berlaku pada masing-masing jenis segiempat.

Tabel 5.1
Sifat sifat Segiempat yang Berlaku Pada Tiap jenis Segiempat

Sifat-sifat segiempat	Persegi	Persegi panjang	Belah ketupat	Jajar Genjang	Layang layang	Trapesium
Jumlah ukuran sudut sudut dalam 360^0.	√	√	√	√	√	√
Ukuran sisi sisi yang berhadapan sama	√	√	√	√		
Ukuran sudut sudut yang berhadapan sama	√	√	√	√		
Jumlah ukuran sudut sudut yang berdekatan 180^0.	√	√	√	√		
Diagonal diagonalnya saling membagi sama panjang	√	√	√	√		
Diagonal diagonalnya saling berpotongan tegaklurus	√		√		√	
Diagonal diagonalnya merupakan garis bagi sudut yang bersesuaian	√		√			
Diagonal diagonalnya berukuran sama	√	√				
Sudut sudutnya berukuran sama yaitu 90^0.	√	√				

Latihan 5.6

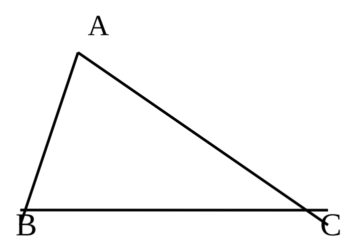
1. Gambarlah sebuah persegi yang diagonalnya 6 cm.
2. Tunjukkan pada persegi ABCD $m\angle ABD = 45^0$.
3. Tambahkan sifat-sifat segiempat pada Tabel 5. 1 di atas

BAB VI

KONGRUENSI

6.1 Kongruensi Segmen dan Kongruensi Sudut

Sebagaimana kita ketahui bahwa segitiga memuat tiga ruas garis dan tiga buah sudut. Misalnya segitiga ABC memuat ruas garis AB, BC, dan AC serta memuat $\angle$ CAB, $\angle$ ABC, dan $\angle$ BCA. Penulisan sudut seperti itu sering disingkat berturut-turut sebagai $\angle$ A, $\angle$ B, dan $\angle$ C.



Gambar 6.1

Dengan demikian sebelum membicarakan kongruensi di antara segitiga perlu dipahami terlebih dahulu kongruensi diantara ruas garis dan kongruensi di antara sudut. Perlu diperhatikan cara menuliskan panjang (jarak) AB dengan ruas garis AB. Demikian pula cara menuliskan sudut ABC dengan ukuran sudut ABC. AB menyatakan panjang ruas garis AB atau jarak dari titik A ke titik B. Misalnya jarak dari titik A ke titik B adalah 3 cm ditulis AB = 3 cm. Sedangkan AB menyatakan ruas garis AB, yaitu himpunan semua titik- titik yang terletak antara titik A dan titik B digabung dengan titik A dan B. $\angle$ ABC menyatakan sudut ABC yaitu gabungan sinar BA dan sinar BC, sedangkan m$\angle$ ABC menyatakan ukuran sudut ABC. Misalnya ukuran $\angle$ ABC adalah 30^0 ditulis m$\angle$ ABC = 30^0, namun selanjutnya biasa ditulis $\angle$ ABC = 30^0.

Definisi:

(1) Ruas garis AB dikatakan kongruen dengan ruas garis CD (ditulis AB $\cong$ CD) jika dan hanya AB = CD.

(2) Sudut ABC dikatakan kongruen dengan sudut PQR (ditulis$\angle$ ABC $\cong$ $\angle$ PQR) Jika dan hanya jika ukuran $\angle$ ABC = ukuran $\angle$ PQR.

Kongruensi di antara ruas garis dan di antara sudut merupakan relasi ekivalen, yaitu relasi yang memenuhi tiga sifat yaitu seperti terlihat pada Tabel 6.1:

Tabel 6.1

Sifat	Kongruensi di antara ruas garis	Kongruensi di antara sudut
Refleksi	$AB \cong AB$	$\angle ABC \cong \angle ABC$
Simetri	Jika $AB \cong PQ$ maka $PQ \cong AB$	Jika $\angle ABC \cong \angle PQR$ maka $\angle PQR \cong \angle ABC$
Transitif	Jika$AB \cong PQ$ dan $PQ \cong XY$, maka $AB \cong XY$	Jika $\angle ABC \cong \angle PQR$ dan $\angle PQR \cong \angle XYZ$, maka $\angle ABC \cong \angle XYZ$

Misalkan kita mempunyai dua segitiga Δ ABC dan Δ PQR seperti pada gambar 6.1, kedua segitiga itu dikatakan kongruen jika ΔABC dipindahkan dapat menutupi secara tepat ΔPQR, ditulis $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.

.

Gambar 6.2

Untuk memindahkan segitiga pertama ke segitiga yang kedua, kita harus menempatkan A pada P, B pada Q, dan C pada R. Dengan menggunakan korespondensi satu-satu antara titik-titik sudut segitiga pertama dengan titik-titik sudut segitiga kedua dapat ditulis sebagai berikut

$$\Delta\, A\, B\, C \leftrightarrow \Delta\, P\, Q\, R$$

$$A \leftrightarrow P$$
$$B \leftrightarrow Q$$
$$C \leftrightarrow R$$

Demikian pula sisi-sisi serta sudut-sudut pada segitiga pertama berkorespondensi dengan sisi-sisi serta sudut-sudut pada segitiga kedua sebagai berikut:

$AB \leftrightarrow PQ$

$BC \leftrightarrow QR$

$AC \leftrightarrow PR$

$\angle A \leftrightarrow \angle P$

$\angle B \leftrightarrow \angle Q$

$\angle C \leftrightarrow \angle R$

Definisi:

Δ ABC dikatakan kongruen dengan Δ PQR , jika dan hanya jika terdapat korespondensi satu-satu antara Δ ABC dengan Δ PQR dan tiap pasangan sisi-sisi serta sudut-sudut yang berkorespondensi kongruen.

Dapat pula ditulis sebagai berikut :

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$ jika $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ dan $AB \cong PQ$, $BC \cong QR$, $AC \cong PR$, $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$

Latihan 6.1.

1. a. Diketahui Δ ABC sama sisi apakah pasangan segitiga di bawah ini kongruen ?

   (i). Δ ABC dan Δ ACB (ii). Δ ABC dan Δ BCA

   b. Tulislah pasangan lainnya yang kongruen dengan Δ ABC.
2. Diketahui Δ PQR samakaki $PQ = PR \neq QR$ tulislah pasangan segitiga yang kongruen dengan Δ PQR.
3. Diketahui $\Delta ABC \cong \Delta PQR$; Δ ABC siku-siku di B, PQ = 3 cm, dan QR = 4 cm Tentukanlah panjang AB, BC dan AC .
4. Diketahui Δ KLM segitiga siku-siku di K, $\angle M = 30^0$. Jika $\Delta KLM \cong \Delta DEF$ tentukanlah $\angle D$, $\angle E$, $\angle F$.
5. Diketahui $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$, $\angle P = 55^0$, dan $\angle Y = 80^0$. Tentukanlah $m\angle Q$, $\angle R$, $\angle X$, dan $\angle Z$.

Bahan Diskusi:

Buktikan secara formal (deduktif) sifat-sifat pada Tabel 6.1.

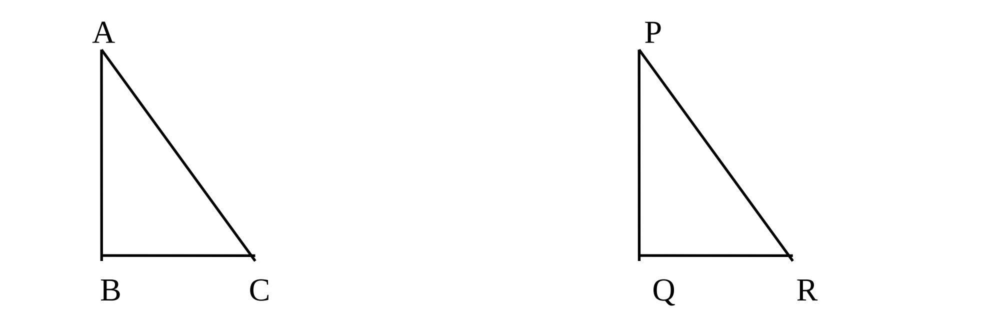
6.2. Syarat-syarat Dua segitiga kongruen

Untuk memeriksa apakah dua segitiga yang diberikan itu kongruen atau tidak, kita tidak perlu memeriksa ke-enam pasang bagian-bagian yang berkorespondensi, tetapi cukup hanya memeriksa tiga pasang saja.

Perhatikan dua segitiga siku-siku pada Gambar 6.3 :

Δ ABC siku-siku di B, AB = 4 cm dan BC = 3 cm

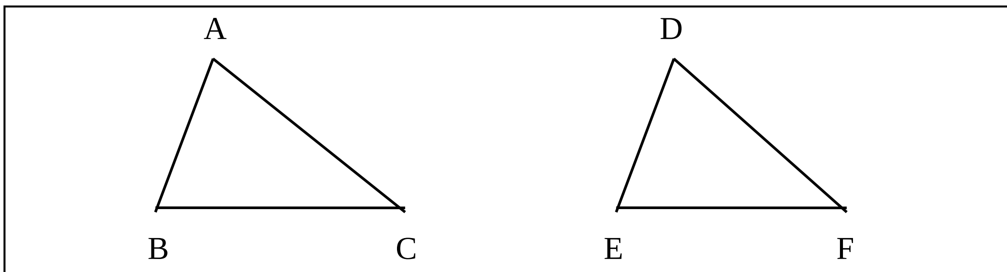
ΔPQR siku-siku di Q, PQ = 4 cm, dan QR = 3 cm



Gambar 6.3

Dengan melihat gambar di atas kita dapat memperoleh korespondensi satu-satu di antara kedua segitiga itu yaitu ditulis Δ ABC $\leftrightarrow$ Δ PQR dan AB $\cong$ PQ, $\angle$ B $\cong$ $\angle$Q, BC $\cong$ QR Berdasarkan teorema Pythagoras dengan mudah diperoleh bahwa panjang AC = 5 cm, juga PR = 5cm sehingga AC $\cong$ PR. Dengan demikian Δ ABC jika dipindahkan akan tepat berimpit dengan Δ PQR. Jadi walaupun hanya tiga pasang bagian yang kongruen kita dapat memastikan bahwa Δ ABC $\cong$ Δ PQR. Syarat kongruensi untuk dua segitiga siku-siku diatas dapat diperluas pada segitiga yang bukan siku-siku.

Misalkan Δ ABC $\leftrightarrow$ Δ DEF dan jika AB $\cong$ DE, $\angle$ B $\cong$ $\angle$ E , BC $\cong$ EF, maka Δ ABC $\cong$ Δ DEF.



Gambar 6.4

Postulat Sisi-Sudut-Sisi disingkat S-Sd-S.

Dua segitiga dikatakan kongruen jika dua sisi dan sudut yang diapitnya pada segitiga pertama kongruen dengan bagian-bagian yang berkorespondensi pada segitiga kedua.

Contoh:

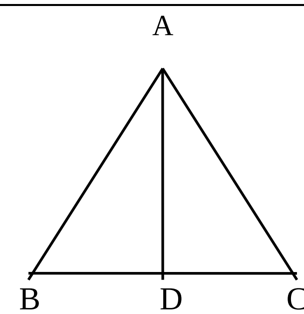
Diketahui ΔABC sama kaki AB = AC dan titik D pada BC sehingga AD *garis bagi* $\angle$ BAC .

a. Tentukan pasangan segitiga yang kongruen

b. Buktikan D titik tengah BC.

Jawab:

Perhatikan gambar 4.6 berikut:



Gambar 6.5

a. Pasangan segitiga yang kongruen adalah Δ BAD dengan Δ CAD, sedangkan buktinya sebagai berikut:

AD garis bagi $\angle$ BAC artinya $\angle$ BAD = $\angle$ CAD atau $\angle$ BAD $\cong$ $\angle$ CAD

$$\Delta\ BAD \leftrightarrow \Delta\ CAD$$

$$AB \cong AC \text{ (diketahui)}$$

$$\angle BAD \cong \angle CAD \text{ (diketahui)}$$

$$AD \cong AD \text{ (jelas)}$$

Jadi berdasarkan S-Sd-S maka Δ BAD $\cong$ Δ CAD.

Catatan: Hati-hati dengan urutannya jika Δ BAD $\cong$ Δ CAD boleh ditulis Δ ABD $\cong$ Δ ACD atau Δ ADB $\cong$ Δ ADC, tetapi Δ ABD tidak kongruen dengan Δ CAD.

b. Oleh karena ∆ BAD ≅ ∆ CAD mengakibatkan BD ≅ CD atau BD = CD, karena titik B, D dan C terletak segaris maka titik D merupakan titik tengah BC.

Adapun syarat-syarat kongruensi di antara segitiga yang lainnya adalah:

Teorema Sudut-Sisi-Sudut (Sd-S-Sd)

Dua segitiga dikatakan kongruen jika dua sudut dan sisi yang diapitnya pada segitiga pertama kongruen dengan bagian-bagian yang berkorespondensi pada segitiga kedua.

Pernyataan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

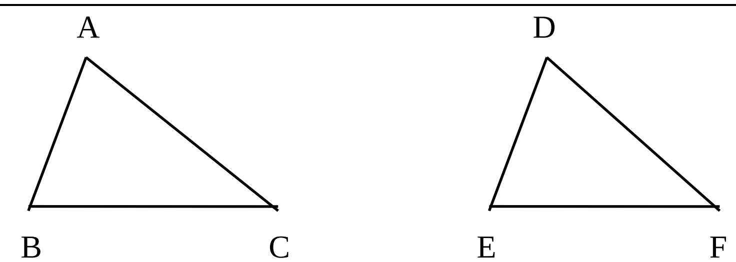
Jika ∆ ABC ↔ ∆ DEF dan

∠ A ≅ ∠ D

AB ≅ DE

∠ B ≅ ∠ E

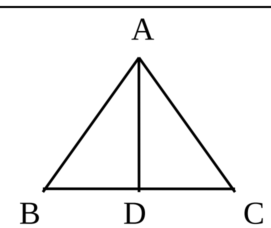
maka ∆ ABC ≅ ∆ DEF



Gambar 6.6

Contoh:

Diketahui ∆ ABC titik D pada BC sehingga AD merupakan *garis bagi* ∠ BAC, juga *garis tinggi* ∆ ABC (lihat Gambar 6.7). Buktikan ∆ ABC samakaki.



Gambar 6.7

Bukti:

(i) AD garis bagi ∠ BAC artinya ∠ BAD = ∠ CAD atau ∠ BAD ≅ ∠ CAD

(ii) AD garis tinggi Δ ABC artinya AD tegaklurus BC dengan kata lain

$\angle$ ADB = $\angle$ ADC = 90^0 atau $\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ ADC.

Δ ADB $\leftrightarrow$ Δ ADC

$\angle$ BAD $\cong$ $\angle$ CAD (i)

AD $\cong$ AD (jelas)

$\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ ADC (ii)

Jadi berdasarkan Sd-S-Sd maka Δ ADB $\cong$ Δ ADC, akibatnya AB $\cong$ AC artinya Δ ABC segitiga samakaki.

Teorema Sisi-Sisi-Sisi (S-S-S)

Dua segitiga dikatakan kongruen jika ketiga pasangan sisinya pada segitiga pertama kongruen dengan bagian-bagian yang berkorespondensi pada segitiga kedua.

Pernyataan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

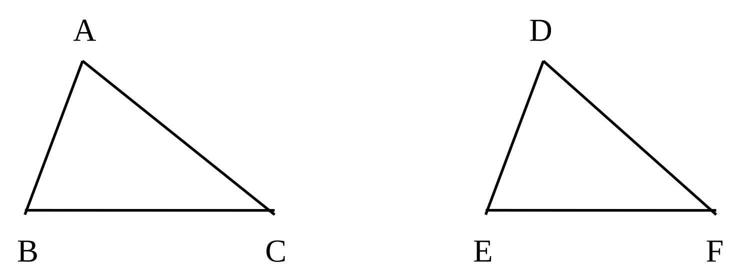
Jika Δ ABC $\leftrightarrow$ Δ DEF dan

AC $\cong$ DF

AB $\cong$ DE

BC $\cong$ EF

maka Δ ABC $\cong$ Δ DEF



Gambar 6.8

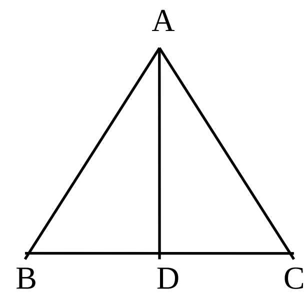
Contoh:

Diketahui ΔABC sama kaki AB = AC dan titik D titik tengah BC .

Buktikan AD tegaklurus BC.

Bukti:

Perhatikan gambar 6.9 berikut ini.



Gambar 6.9

Titik D merupakan titik tengah BC artinya BD = CD atau BD $\cong$ CD

$$\Delta\ ADB \leftrightarrow \Delta\ ADC$$

$$AB \cong AC \text{ (diketahui)}$$

$$AD \cong AD \text{ (jelas)}$$

$$BD \cong CD \text{ (diketahui)}$$

Jadi berdasarkan S-S-S maka Δ ADB $\cong$ Δ ADC, akibatnya $\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ ADC atau m$\angle$ ADB = m$\angle$ ADC . Oleh karena $\angle$ ADB saling berpelurus dengan $\angle$ ADC maka m$\angle$ ADB + m$\angle$ ADC = $180^0 \Rightarrow$ 2m $\angle$ ADB = $180^0 \Rightarrow$ m $\angle$ADB = 90^0 artinya AD tegaklurus terhadap BC.

Teorema Sisi-Sudut-Sudut (S-Sd-Sd)

Dua segitiga dikatakan kongruen jika dua sudut dan sebuah sisi pada segitiga pertama kongruen dengan bagian-bagian yang berkorespondensi pada segitiga kedua.

Pernyataan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

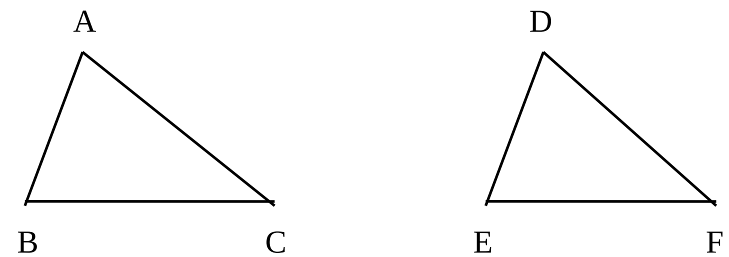
$$\text{Jika } \Delta\ ABC \leftrightarrow \Delta\ DEF \text{ dan}$$

$$AC \cong DF$$

$$\angle A \cong \angle D$$

$$\angle B \cong \angle E$$

$$\text{maka } \Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$$



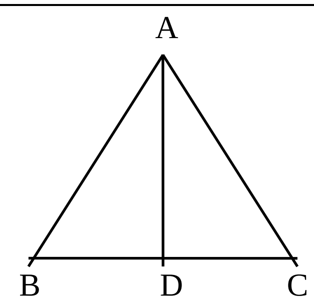
Gambar 6.10

Contoh:

Diketahui Δ ABC titik D pada BC sehingga AD merupakan *garis tinggi* Δ ABC. Jika m$\angle$ ABC = m$\angle$ ACB buktikan AD *garis bagi* $\angle$ BAC.

Bukti:

Perhatikan gambar 6.11 di bawah ini.



Gambar 6.11

AD garis tinggi Δ ABC artinya AD tegaklurus BC dengan kata lain

m$\angle$ ADB = m$\angle$ ADC = 90^0 atau $\angle$ADB $\cong$ $\angle$ADC

$$\Delta \text{ ADB} \leftrightarrow \Delta \text{ ADC}$$

$$\text{AD} \cong \text{AD (jelas)}$$

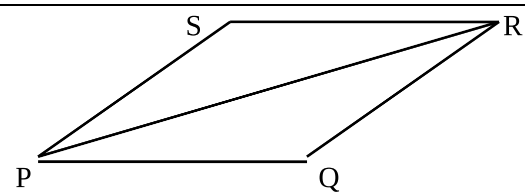
$$\angle \text{ ADB} \cong \angle \text{ ADC (diketahui)}$$

$$\angle \text{ABD} \cong \angle \text{ACD (diketahui)}$$

Jadi berdasarkan S-Sd-Sd maka Δ ADB $\cong$ Δ ADC, akibatnya $\angle$ BAD $\cong$ $\angle$ CAD artinya AD garis bagi $\angle$ BAC.

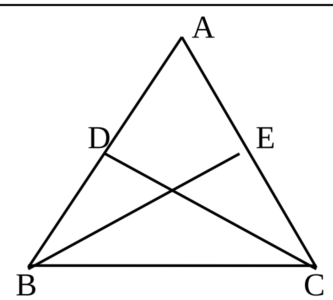
Latihan 6.2

1. Buktikan jika Δ XYZ samakaki, XY = XZ, maka Δ XYZ $\cong$ Δ XZY.
2. Buktikan jika Δ UVW dan $\angle$ V = $\angle$ W, maka Δ UVW $\cong$ Δ UWV
3. Diketahui Δ ABC siku-siku di B; $\angle$ A = 40^0, AC = 10 cm. Δ PQR di Q m$\angle$ R = 50^0 PR = 10 cm buktikan Δ ABC $\cong$ Δ PQR.
4. Diketahui belah ketupat PQRS dengan sisi 4 cm (lihat Gambar 6.12). Buktikan $\angle$ PQR = $\angle$ PSR.



Gambar 6.12

5. Diketahui Δ ABC , m$\angle$ ABC = m$\angle$ ACB = 70^0, CD $\perp$ AB dan BE $\perp$ AC (lihat Gambar 6.13). Buktikan AD $\cong$ AE



Gambar 6.13

Bahan Diskusi

Buktikan secara formal (deduktif).

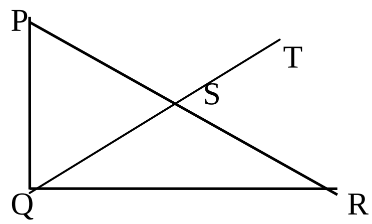
1. Teorema segitiga samakaki:
   Jika dua buah sisi suatu segitiga kongruen maka sudut-sudut dihadapan sisi-sisi itu kongruen.
2. Kebalikan teorema segitiga samakaki
   Jika dua buah sudut suatu segitiga kongruen maka sisi-sisi dihadapan sisi-sisi itu kongruen.
4. Teorema Sudut-Sisi-Sudut
5. Teorema Sisi-Sisi-Sisi
6. Teorema Sisi-Sudut-Sudut

6.3. Penggunaan Kongruensi Segitiga

1. Menghitung panjang ruas garis bila besar sudut diketahui

Perhatikan Δ PQR segitiga siku-siku Q , $\angle R = 30^0$ (lihat gambar 6.14).

Akan dibuktikan bahwa PQ = $\frac{1}{2}$PR.



Gambar 6.14

Bukti:

Buatlah sinar garis QT sehingga $\angle$ RQT = 30^0 dan QT memotong PR di S.

Perhatikan Δ QRS m$\angle$ RQS= $\angle$ QRS = 30^0, menurut kebalikan teorema segitiga samakaki QS = RS ....(*)

Selain itu juga dapat kita ketahui bahwa $\angle$ QSR = $(180 - 60)^0 = 120^0$

Karena $\angle$ QSR dan $\angle$ QSP saling suplemen, maka $\angle$ QSP = $(180\text{-}120)^0 = 60^0$

Sekarang perhatikan Δ PQS, $\angle$ QSP = $\angle$ QPS = $\angle$ PQS = 60^0(mengapa ?).

Berdasarkan pernyataan (4) maka Δ PQS samasisi artinya PQ = QS = PS ....(**)

Dari (*) dan (**) diperoleh PQ = PS = RS. Oleh karena PR = PS + SR maka PQ = $\frac{1}{2}$PR.

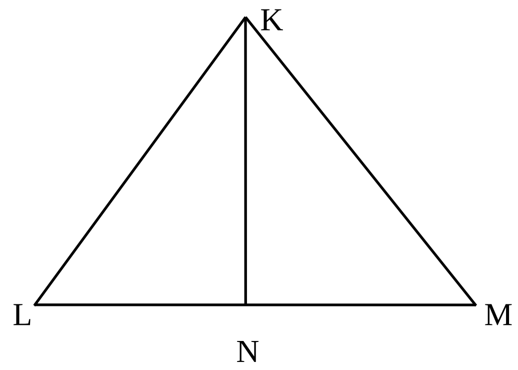
Pada Δ PQR siku-siku di Q, jika $\angle R = 30^0$ maka PQ = $\frac{1}{2}$PR.

Contoh:

Diketahui Δ KLM samakaki KL = KM = 6 cm. Titik N pada LM sehingga KN tegaklurus LM dan $\angle$LKN = $\angle$MKN =30^0 (lihat gambar 6.15).

Tentukanlah : a. panjang LM b. panjang KN

Jawab:



Gambar 6.15

Jawab:

a. Perhatikan Δ KLN siku-siku di N dan $\angle$ LKN = 30^0. Berdasarkan pernyataan

sebelumnya disimpulkan bahwa LN = $\frac{1}{2}$KL = $\frac{1}{2}$. 6 cm = 3 cm.

Dengan alasan yang sama pada Δ KMN siku-siku di N dan $\angle$ MKN = 30^0.

disimpulkan bahwa NM = $\frac{1}{2}$KM = $\frac{1}{2}$. 6 cm = 3 cm.

LM = LN + NM = (3 + 3) cm = 6 cm.

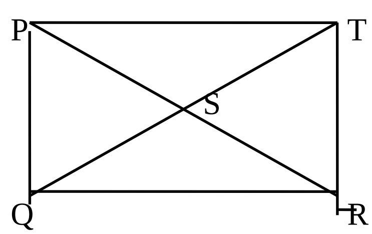
b. Selanjutnya berdasarkan teorema Pythagoras pada Δ KLN berlaku

KN = $\sqrt{KL^2 - LN^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ cm.

2. Menghitung besar sudut bila panjang sisi diketahui

Perhatikan Δ PQR segitiga siku-siku Q , PQ = $\frac{1}{2}$ PR (lihat gambar 6.16).

Akan dibuktikan bahwa $\angle$PRQ = 30^0.



Gambar 6.16

Bukti:

Misalkan S adalah titik tengah PR, karena PQ = $\frac{1}{2}$ PR maka PQ = PS.

Buatlah ruas garis QT melalui S sehingga QS = TS.

Segiempat PQRT diagonal-diagonalnya saling membagi dua sama panjang, maka dapat disimpulkan bahwa segiempat PQRT berupa jajargenjang. Tetapi karena $\angle PQR$ siku-siku maka dapat disimpulkan lagi bahwa segiempat PQRT berupa persegipanjang (karena sudut-sudut yang berhadapan pada jajaran genjang sama besar). Oleh karena PQRT persegi panjang dan diagonalnya saling berpotongan di titik S, maka QS = PS (karena pada persegi panjang , diagonal-diagonalnya sama panjang dan saling membagi sama panjang). Dengan demikian Δ PQS merupakan segitiga sama sisi, akibatnya $\angle QPS = 60^0$. Pada Δ PQR $\angle QPR = 60^0$ dan $\angle PQR = 90^0$, maka $\angle PRQ = 30^0$.

Pada Δ PQR siku-siku di Q, jika PQ = $\frac{1}{2}$PR maka $\angle R = 30^0$

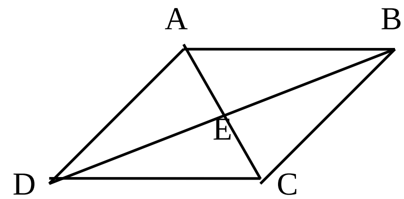
Contoh:

Diketahui belah ketupat ABCD, diagonal-diagonalnya berpotongan di titik E.

Jika AB = BD = 6 cm , tentukanlah : a. $\angle BAE$ b. $\angle ABE$

Jawab:

Perhatikan gambar 6.17 di bawah ini.



Gambar 6.17

Ingat sifat- sifat belah ketupat, antara lain :

(i) sisi-sisinya sama panjang

(ii) diagonal-diagonalnya saling berpotongan tegaklurus

(iii) diagonal-diagonalnya saling membagi dua sama panjang

a. Berdasarkan sifat (ii) Δ ABE siku-siku di E.

Berdasarkan sifat (iii) maka BE = $\frac{1}{2}$BD = 3 cm

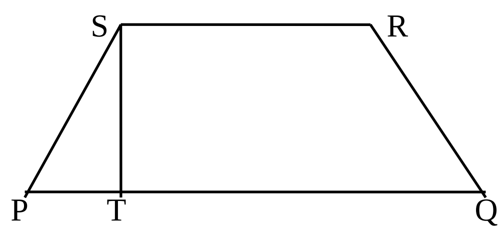
Pada Δ ABE siku-siku di E, AB = 6 cm dan BE = 3 cm artinya BE = $\frac{1}{2}$AB, berdasarkan sifat (6) maka $\angle BAE = 30^0$.

b. Pada Δ ABE siku-siku di E artinya $\angle AEB = 90^0$ dan $\angle BAE = 30^0$, maka $\angle ABE = (180 - 90 - 30)^0 = 60^0$.

Latihan 6.3

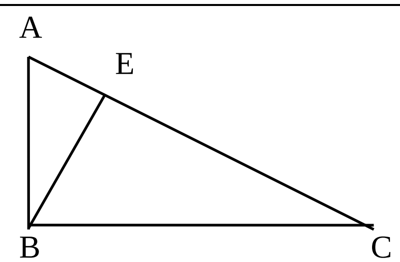
1. Diketahui trapesium samakaki PQRS (lihat gambar 6.18). PS = 8 cm, SR = 5 cm, dan $\angle$ SPQ $= 60^0$. Jika ST tegak lurus PQ tentukan:

   a. panjang PT   b. panjang ST   c. panjang PQ.



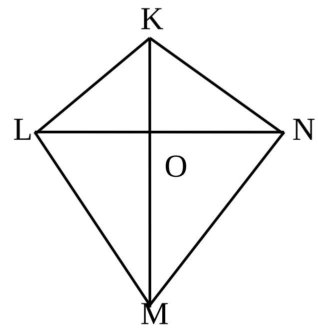
Gambar 6.18

2. Diketahui Δ ABC siku-siku di B, $\angle ACB = 30^0$, $BE \perp AC$ (lihat gambar 6.19). Jika AB = 5 cm hitunglah panjang CE.



Gambar 6.19

3. Diketahui layang-layang KLMN (lihat gambar 6.20).



Gambar 6.20

Jika $\angle$ KLN = 45^0, $\angle$ LMK = 30^0, dan LN = 6 cm, tentukanlah:

a. panjang KL

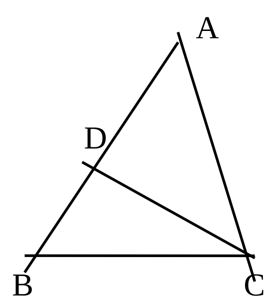
b. panjang LM

4. Diketahui belah ketupat ABCD, $\angle$ ABC = 120^0, dan AB = 5 cm.

   Tentukan panjang diagonal-diagonalnya.

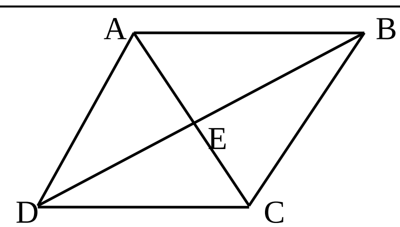
5. Diketahui Δ ABC $\angle$ BAC = 45^0 ,$\angle$ ACB = 75^0, CD $\perp$ AB (lihat gambar 6.21).

   Jika BC = 4 cm hitunglah panjang AD.



Gambar 6.21

6. Diketahui belah ketupat ABCD, diagonal-diagonalnya berpotongan di titik E seperti terlihat pada gambar 6.22.Jika BD = $10\sqrt{3}$ cm dan AC = 10 cm hitunglah :



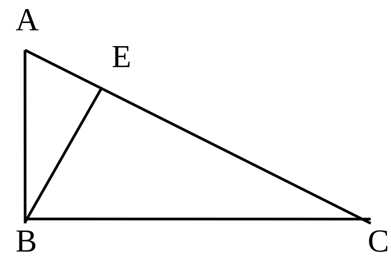
Gambar 6.22

a. panjang AE b. panjang BE c. panjang AB d. m$\angle$ BAE

e. m$\angle$ BAC f. m$\angle$ ABE g. m$\angle$ ABC.

7. Diketahui Δ ABC siku-siku di B, , BE $\perp$ AC (lihat gambar 6.23).

   Jika AB = 6 cm dan AE = 3 cm hitunglah panjang $\angle$ ACB .



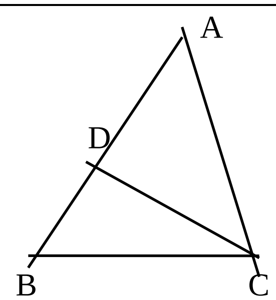
Gambar 6.23

8. Diketahui Δ ABC $\angle$ BAC = 45^0, CD ⊥ AB (lihat gambar 6.24).

Jika BC = 6 cm dan CD = $3\sqrt{3}$ cm hitunglah:

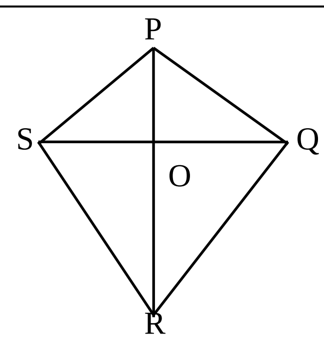
a. panjang BDb. m$\angle$ BCD c. m$\angle$ ABC

d. $\angle$ ACB e. $\angle$ ACD f. panjang AC



Gambar 6.24

9. Diketahui layang-layang PQRS (lihat gambar 6.25).



Gambar 6.25

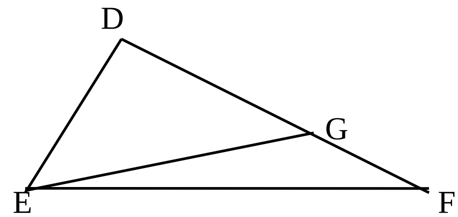
Jika OP = OQ = 2 cm RS = 4 cm hitunglah:

a. $\angle$ PSQ b. $\angle$PRQ b. $\angle$RQS c. $\angle$PSR.

10. Diketahui Δ DEF, titik G pada DF sehingga DG = DE (lihat gambar 6.26).

Jika $\angle$ DFE = 25^0 dan $\angle$ DEG = 45^0, hitunglah:

a. $\angle$ EDF b. $\angle$ FEG



Gambar 6.26

BAB VII
KESEBANGUNAN SEGITIGA

7.1 Pengertian Kesebangunan Segitiga

Misalkan Δ ABC berkorespondensi satu-satu dengan Δ PQR sebagai berikut:

$$\Delta\, A\, B\, C \leftrightarrow \Delta\, P\, Q\, R$$

$$A \leftrightarrow P$$

$$B \leftrightarrow Q$$

$$C \leftrightarrow R$$

Demikian pula sisi-sisi serta sudut-sudut pada segitiga pertama berkorespondensi dengan sisi-sisi serta sudut-sudut pada segitiga kedua sebagai berikut:

$$AB \leftrightarrow PQ$$

$$BC \leftrightarrow QR$$

$$AC \leftrightarrow PR$$

$$\angle A \leftrightarrow \angle P$$

$$\angle B \leftrightarrow \angle Q$$

$$\angle C \leftrightarrow \angle R$$

Definisi:

Δ ABC dikatakan sebangun dengan Δ PQR , jika dan hanya jika terdapat korespondensi satu-satu antara Δ ABC dengan Δ PQR dan tiap pasangan sudut-sudut yang berkorespondensi kongruen serta semua perbandingan sisi-sisi yang berkorespondensi sama

Dapat pula ditulis sebagai berikut :

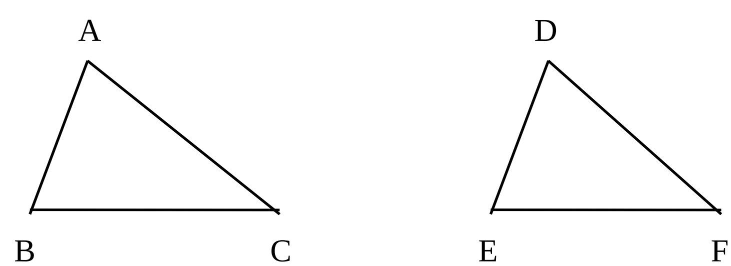
Δ ABC ~ Δ PQR jika Δ ABC$\leftrightarrow$$\Delta$ PQR dan m$\angle$ A = m$\angle$ P, m$\angle$ B = m$\angle$ Q, m$\angle$ C = m$\angle$ R dan AB : PQ = BC : QR = AC : PR.

Untuk memeriksa apakah dua segitiga yang diberikan itu sebangun atau tidak; tidak perlu memeriksa ketiga pasang sudut yang berkorespondensi itu ukuran sama dan perbandingan ketiga pasang sisinya sama, tetapi cukup dengan memeriksa sebagian unsur-unsur yang berkorespondensi. Adapun pemeriksaan kesebangunan segitiga itu menggunakan postulat-postulat sebagai berikut:

1. Postulat Sudut-Sudut-Sudut.
   Dua buah segitiga dikatakan sebangun jika dua sudut yang berkorespondensi ukurannya sama.
2. Teorema Sudut-sudut
3. Teorema Sisi-Sisi-Sisi.
   Dua buah segitiga dikatakan sebangun jika semua perbandingan sisi yang berkorespondensi sama.
4. Teorema Sisi-Sudut-Sisi
   Dua buah segitiga dikatakan sebangun jika perbandingan dua pasang sisi yang berkorespondensi sama dan pasangan sudut yang diapitnya berukuran sama.

Pernyataan di atas masing-masing dapat dituliskan sebagai berikut:

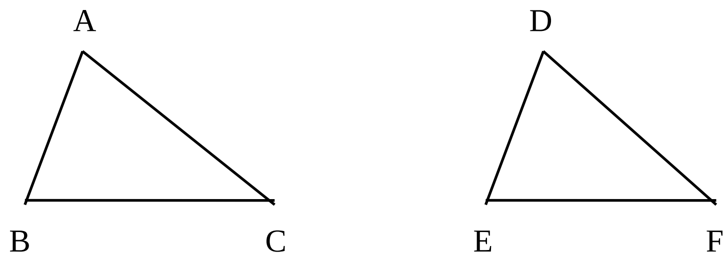
1. Misalkan Δ ABC $\leftrightarrow$ Δ DEF; jika m$\angle$ A = m$\angle$ D, m$\angle$ B = m$\angle$ E dan m$\angle$ C = $\angle$ F, maka Δ ABC $\sim$ Δ DEF (lihat Gambar 7.1).



Gambar 7.1

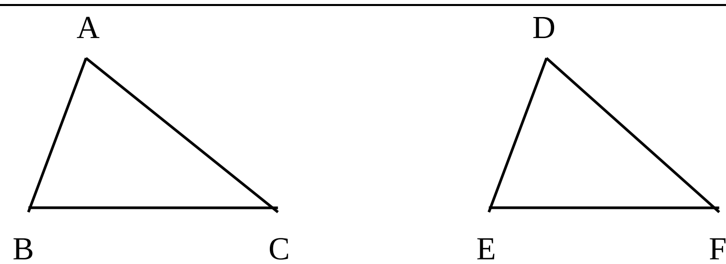
2. Misalkan Δ ABC $\leftrightarrow$ Δ DEF; jika m$\angle$ A = m$\angle$ D dan m$\angle$ B = m$\angle$ E maka Δ ABC $\sim$ Δ DEF (lihat Gambar 7.2).

Hal ini berlaku karena jumlah ukuran sudut-sudut dalam sebuah segitiga adalah 1800, sehingga apabila dua sudut yang berkorespondensi berukuran sama, maka ukuran sudut yang ketiga akan sama pula.



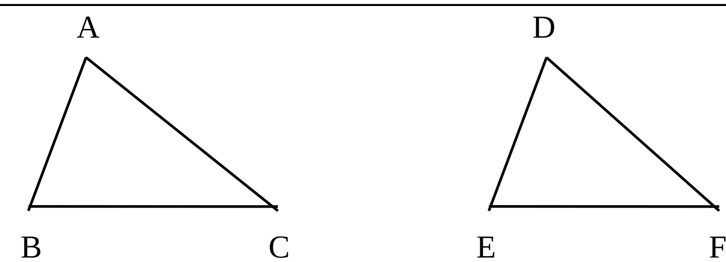
Gambar 7.2

3. Misalkan Δ ABC $\leftrightarrow$ Δ DEF; jika AC : DF = AB : DE = BC : EF maka Δ ABC ~ Δ DEF (lihat gambar 7.3).



Gambar 7.3

3. Misalkan Δ ABC $\leftrightarrow$ Δ DEF; jika AB : DE = AC : DF dan m$\angle$ A = m$\angle$ D maka Δ ABC ~ Δ DEF (lihat gambar 7.4).

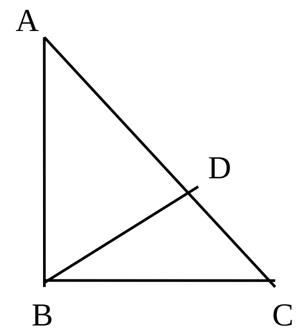


Gambar 7.4

Catatan: Hati-hati dengan urutannya jika Δ ABC ~ Δ DEF boleh ditulis Δ BAC ~ Δ EDF atau Δ ACB ~ Δ DFE, tetapi Δ ABC tidak (belum tentu) sebangun dengan Δ EDF.

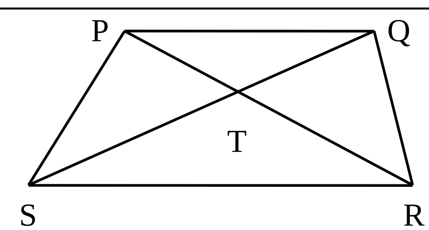
Latihan 7.1.

1.Diketahui ΔABC siku-siku di B, titik D pada AC sehingga BD ⊥ AC (lihat gambar 7.5). Tulislah segitiga-segitiga yang sebangun dengan ΔABC, dan berikan alasannya.



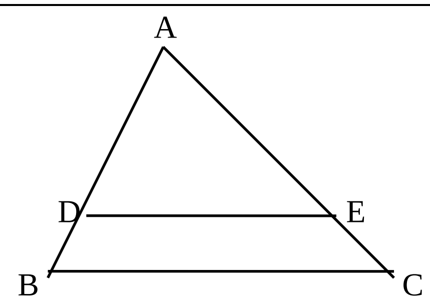
Gambar 7.5

2. Diketahui trapesium PQRS seperti pada gambar 7.6, diagonal-diagonalnya berpotongan di titik T. Tuliskan pasangan segitiga yang sebangun, dan berikan alasannya.



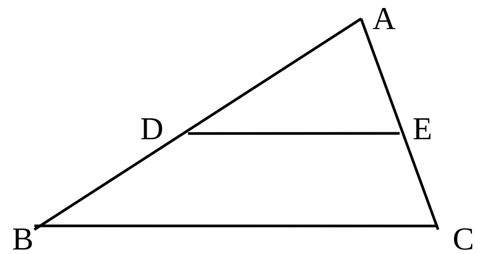
Gambar 7.6

3. Diketahui ΔABC , titik D pada AB. Melalui D dibuat garis sejajar BC sehingga memotong AC di E (lihat gambar 7.7). Tuliskan pasangan segitiga yang sebangun serta berikan alasannya.



Gambar 7.7

4. Diketahui ∆ABC , D adalah titik tengah AB dan E titik tengah AC seperti pada gambar 7.8. Berikan alasan mengapa ∆ABC sebangun ∆ ADE



Gambar 7.8

5. Diketahui ∆ABC siku-siku di B, AB = 4 cm dan AC = 5 cm. Jika ∆PQR siku-siku di Q, PQ = 12 cm dan PR = 15 cm, tunjukkan bahwa ∆ ABC sebangun dengan ∆ PQR.

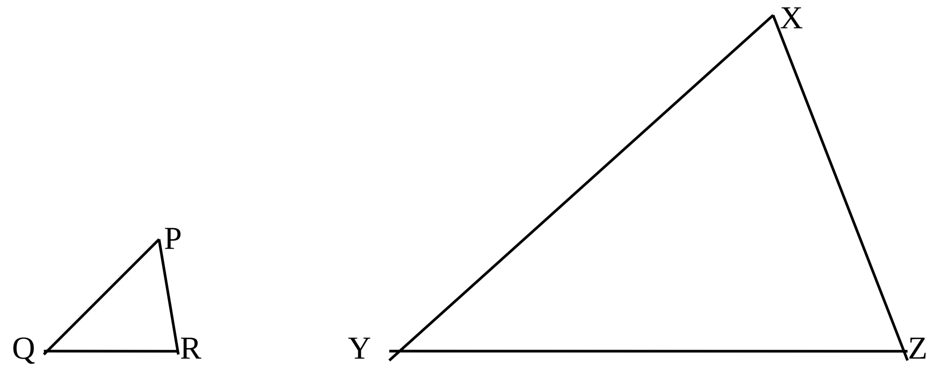
Bahan Diskusi
Buktikan secara formal (deduktif) teorema 3 dan 4 di atas.

7.2. Penggunaan Kesebangunan Segitiga

Contoh 1:

Diketahui ∆ PQR sebangun ∆ XYZ , PQ = 3 cm dan PR = 7 cm seperti terlihat pada gambar 7.9; tentukanlah panjang XY jika XZ = 28 cm.

Jawab:



Gambar 7.9

Δ PQR sebangun Δ XYZ artinya PQ : XY = QR : YZ = PR : XZ.

Pilih perbandingan PQ : XY = PR : XZ $\Rightarrow$ 3 : XY = 7 : 28

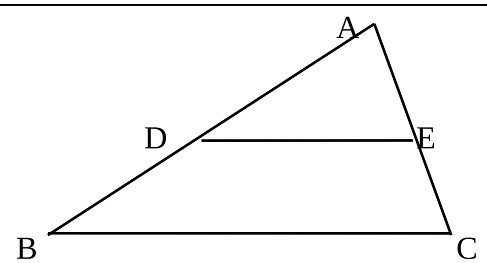
$\Rightarrow$ 3 x 28 = XY x 7

$\Rightarrow$ XY = (3X28)/7 = 12

Jadi panjang XY = 7 cm.

Contoh 2:

Diketahui ΔABC , D adalah titik tengah AB dan E titik tengah AC. Tunjukkan bahwa DE = $\frac{1}{2}$BC (lihat Gambar 7.10).



Gambar 7.10

Bukti:

D titik tengah AB artinya AD : AB = 1 : 2, demikian pula karena E titik tengah AC maka AE : AC = 1 : 2.

Perhatikan ΔADE $\leftrightarrow$ ΔABC, AD : AB = AE : AC dan m$\angle$ DAE = m$\angle$ BAC.

Berdasarkan ***S-Sd-S*** maka ΔADE ~ ΔABC.

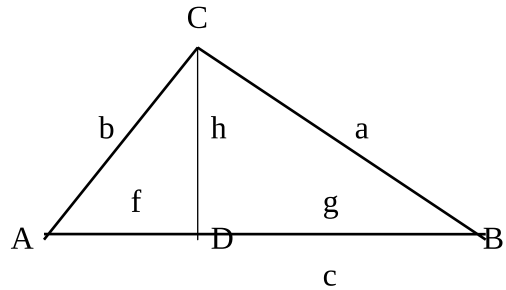
Akibatnya DE : BC = AD : AB = AE : AC = 1 : 2 atau DE = $\frac{1}{2}$BC.

Contoh 3:

Diketahui Δ ABC siku-siku di C, jika BC = a, AC = b dan AB = c, buktikan bahwa $a^2 + b^2 = c^2$.

Bukti :

Perhatikan Gambar 7.11 di bawah ini



Gambar 7.11

Buatlah garis melalui C dan tegaklurus AB memotong AB di titik D.

Misalkan AD = f dan DB = g sehingga f + g = c .... (i)

Δ ACD $\sim \Delta$ ABC (Sd-Sd), akibatnya AD : AC = AC : AB atau f : b = b : c atau

$f = \dfrac{b^2}{c}$ ....(ii).

Δ CBD $\sim \Delta$ ABC (Sd-Sd), akibatnya BD : BC = CB : AB atau g : a = a : c atau

$g = \dfrac{a^2}{c}$......................................(iii).

Subsitusi (ii) dan (iii) pada (i) maka diperoleh

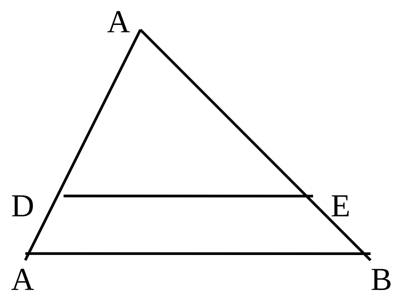
$$f + g = c \Rightarrow \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c} = c \Rightarrow \frac{b^2 + a^2}{c} = c \Rightarrow b^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Contoh 4:

Diketahui Δ ABC titik D pada AB. Melalui D dibuat garis sejajar BC sehingga memotong AC di E seperti terlihat pada Gambar 7.12.

a. Tunjukkan bahwa DE : BC = AD : AB = AE : AC.

b. Jika AD = 4 cm, AB = 6 cm dan BC = 9 cm hitunglah DE.



Gambar 7.12

Jawab :

a. $\angle$ ADE dan $\angle$ ABC pasangan sudut sehadap, karena DE//BC maka

m$\angle$ ADE = m$\angle$ ABC Perhatikan Δ ADE $\leftrightarrow$ Δ ABC, m$\angle$ ADE = m$\angle$ ABC dan

m$\angle$ DAE = m$\angle$ BAC. Berdasarkan Sd-Sd Δ ADE ~ Δ ABC, akibatnya

DE : AB = AD : AB = AE : AC

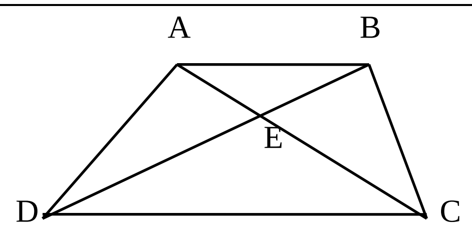
b. DE : AB = AD : AB $\Rightarrow$ DE : 9 = 4 : 6 $\Rightarrow$ DE x 6 = 9 x 4 $\Rightarrow$ DE = 36/6 = 6

Jadi panjang DE = 6 cm.

Latihan 7.2

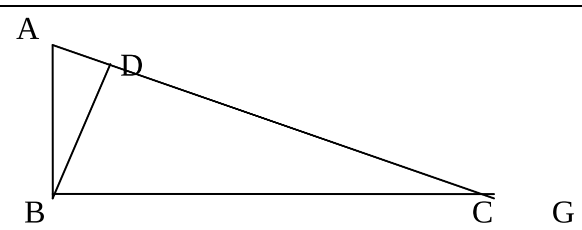
1. Diketahui ΔABC sama kaki AB = AC = 3 cm, dan ΔPQR sama kaki PQ = PR = 8 cm. Jika m$\angle$ BAC = m$\angle$ QPR dan QR = 12 cm tentukan BC.
2. Pada gambar 7.13 trapesium ABCD, AB = 18 cm, DC = 30 cm, AC = 36 cm dan BD = 42 cm. Jika diagonal-diagonalnya berptongan di titik E, tentukan

   a. AE b. BE c. CE d. DE



Gambar 7.13

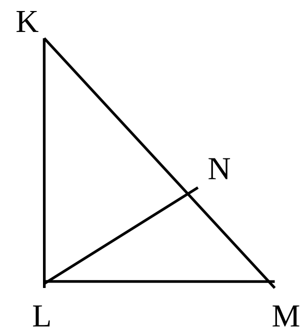
3. Pada Gambar 7.14 ΔABC siku-siku di B, titik D pada AC sehingga BD $\perp$ AC. Tunjukkan BD^2 = AD x DC.



Gambar 7.14

4. Diketahui Δ KLM siku-siku di L, titik N pada KM sehingga LN $\perp$ KM (lihat Gambar 7.15). Jika KL = 12 cm dan LM = 5 cm hitunglah

a. KN b. MN c. LN

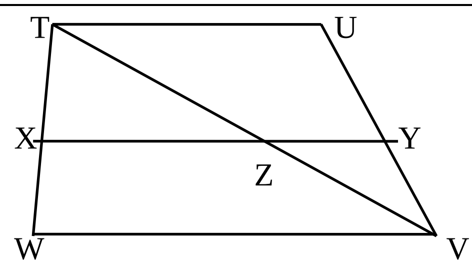


Gambar 7.15

5. Perhatikan Gambar 7.16 pada trapesium TUVW, X titik tengah TW dan Y titik tengah UV.

a. Tunjukkan bahwa XY = $\frac{1}{2}$ (TU + VW).

b. Jika TU = 10 cm dan XY = 13 cm hitunglah VW.

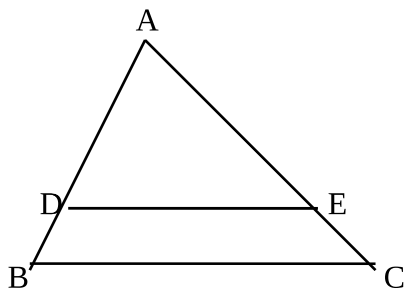


Gambar 7.16

6. Diketahui Δ ABC titik D pada AB. Melalui D dibuat garis sejajar BC sehingga memotong AC di E (lihat Gambar 7.17).

a. Tunjukkan bahwa AD : DB = AE : EC.

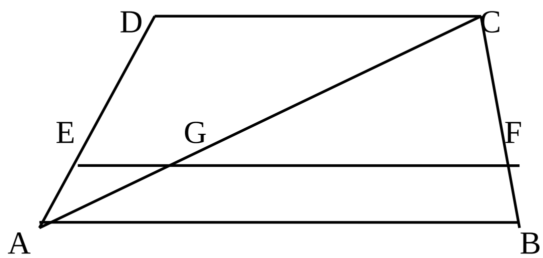
b. Jika AD = 4 cm, AB = 6 cm dan AC = 9 cm hitunglah AE dan EC.



Gambar 7.17

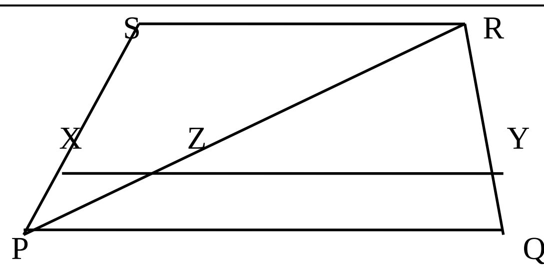
7. Diketahui trapesium ABCD, EF //AB, EF memotong AC di G, AB = 9 cm dan CD = 6 cm (lihat Gambar 7.18).

   Jika AG : GC = 1 : 2 hitunglah a. EG b. GF c. EF



Gambar 7.18

8. Perhatikan Gambar 7.19, trapesium PQRS XY //PQ, XY memotong PR di Z, PQ = a, RS = b cm, dan PX : XS = p : q. Tunjukkan bahwa XY = $\dfrac{p.b + q.a}{p + q}$

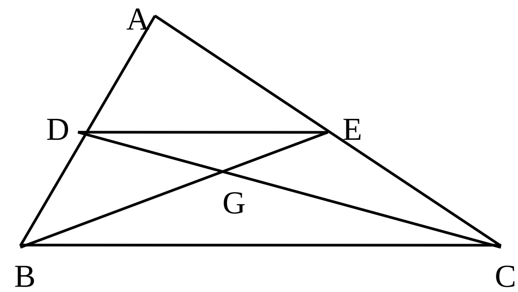


Gambar 7.19

9. Diketahui Δ ABC, D titik tengah AB, E titik tengah AC, BE dan CD berpotongan di titik G (lihat Gambar 7.20).

   a. Tunjukkan bahwa DE // BC

   b. Tunjukkan BG : GE = 2 : 1

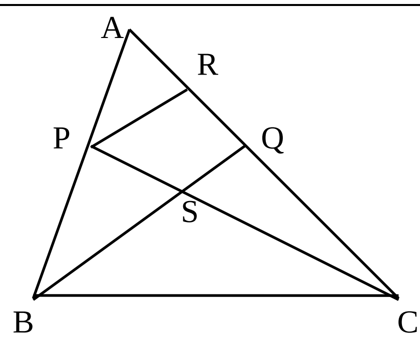


Gambar 7.20

10. Pada Gambar 7.21 diberikan Δ ABC, P pada AB dan titik Q pada AC sehingga AP = 4 cm, AQ = 5 cm, PB = QC = 6 cm.

   Jika PR // BQ, hitunglah

   a. panjang RQ   b. PS : PC



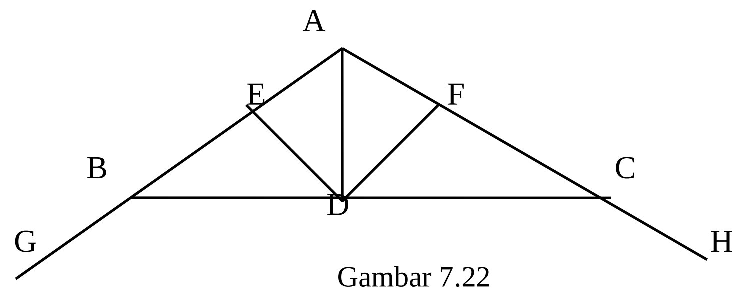
Gambar 7.21

Bahan Diskusi.

1. Perhatikan Gambar 7.22 sebuah rangka atap rumah terbuat dari kayu sebagai berikut. Jika BG = AE, DE tegaklurus AB BC = 13 m dan AD = 2,5 m hitunglah

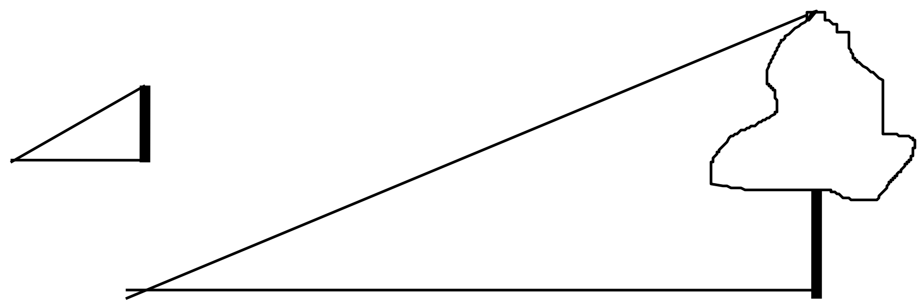
   a.   AB   b. AE   c. ED

   d. Panjang jumlah potongan kayu seluruhnya



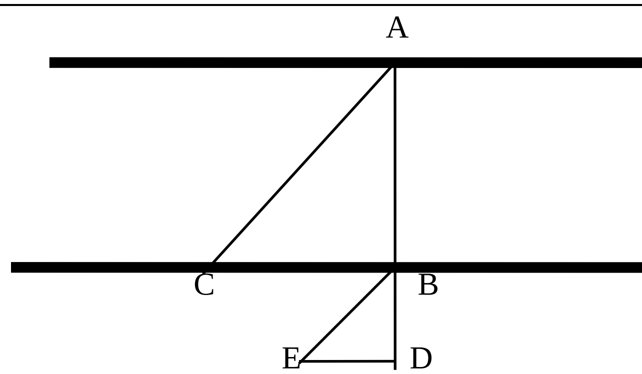
Gambar 7.22

2. Sebuah pohon memiliki bayangan pada tanah rata sepanjang 30 m , sedangkan tiang yang tingginya 4 m memiliki bayangan sepanjang 7,5 m (lihat Gambar 7.23). Tentukan tinggi pohon itu.



Gambar 7.23

3. Seseorang akan mengukur lebar sungai dengan cara tidak langsung dengan menggunakan klinometer (lihat Gambar 7.24).



Gambar 7.24

Langkah-langkahnya sebagai berikut:

(i) Tentukan titik A di seberang sungai (misalnya berupa pohon).

(ii) Tentukan titik B di tepi sungai (misalnya patok dari bambu) sehingga AB tegak lurus terhadap pinggiran sungai.

(iii) Tentukan titik C yang jaraknya 5 m dari B, kemudian dengan menggunakan klinometer ukurlah sudut $\angle$ BCA, misal m$\angle$ BCA = x^0

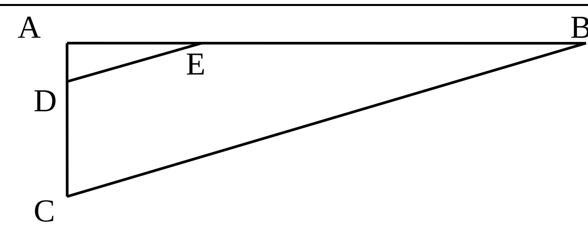
(iv) Tentukan titik D (menggunakan tali) perpanjangan AB misalkan BD = 2 m.

(v) Melalui D buat garis sejajar pinggiran sungai (menggunakan tali).

(vi) Tentukan titik E sehingga m$\angle$ DEB = m$\angle$ BCA = x^0

Jika DE = 1,25 m berapakah lebar sungai ?

4. Seseorang akan menghitung jarak antar dua pohon secara tidak langsung menggunakan klinometer (lihat Gambar 7.25).



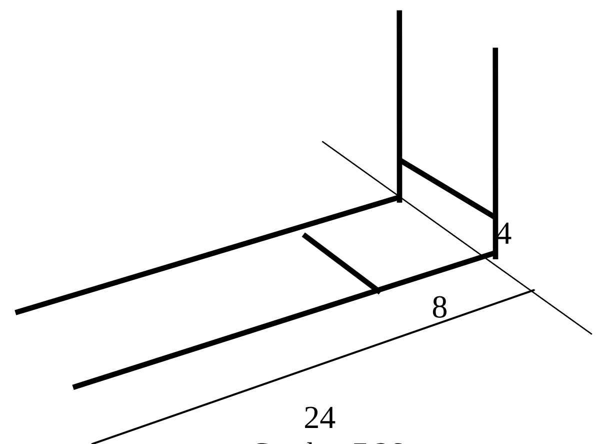
Gambar 7.25

Misalkan titik A dan titik B mewakili dua pohon yang akan dicari jaraknya, sedangkan kita berada sekitar pohon A. Langkah-langkah sebagai berikut :

(i) Tentukan titik C sehingga AC tegaklurus AB dengan AC = 5 m, kemudian dengan menggunakan klinometer ukurlah $\angle$ ACB, misal m$\angle$ ACB = x^0.

(ii) Tentukan titik D pada AC, misal AD = 1 m, beri tanda titik E pada AB sehingga m$\angle$ ADE = x^0 . Jika DE = 4 m, hitunglah jarak kedua pohon tersebut.

5. Pada gambar 7.26 di bawah ini tampak tiang besi dengan bayangannya karena sinar matahari yang terdiri dari bagian atas dan bagian bawah. Bagian bawah tingginya 4 m, bayangan bagian bawah panjangnya 8 m dan panjang bayangan seluruhnya 24 m. Hitunglah tinggi seluruh tiang itu.



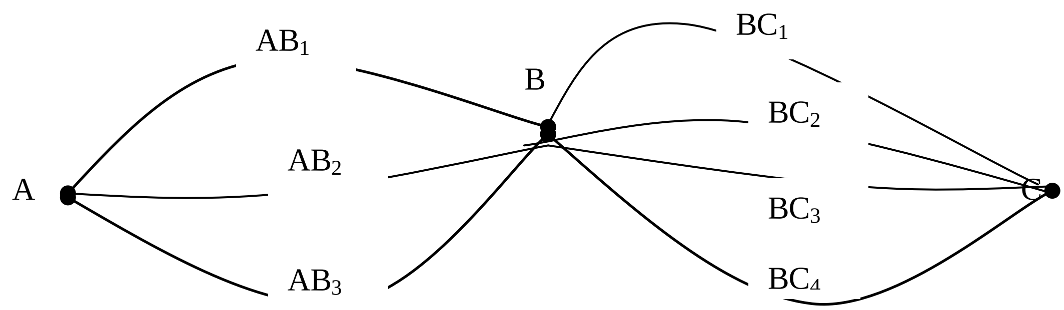
Gambar 7.26

BAB VIII
KAIDAH PENCACAHAN DAN PELUANG

8.1 Kaidah Perkalian, Permutasi dan Kombinasi

a. Kaidah Perkalian

Contoh 8.1
Dari kota A menuju ke kota B ada 3 pilihan lintasan, sedangkan dari kota B ke kota C ada 4 pilihan lintasan. Berapa pilihan lintasan dari kota A ke kota C bila melalui kota B?



Gambar 8.1

Jawab:
Banyaknya lintasan dari kota A ke kota C melalui kota B adalah

$AB_1 – BC_1$	$AB_2 – BC_1$	$AB_3 – BC_1$
$AB_1 – BC_2$	$AB_2 – BC_2$	$AB_3 – BC_2$
$AB_1 – BC_3$	$AB_2 – BC_3$	$AB_3 – BC_3$
$AB_1 – BC_4$	$AB_2 – BC_4$	$AB_3 – BC_4$

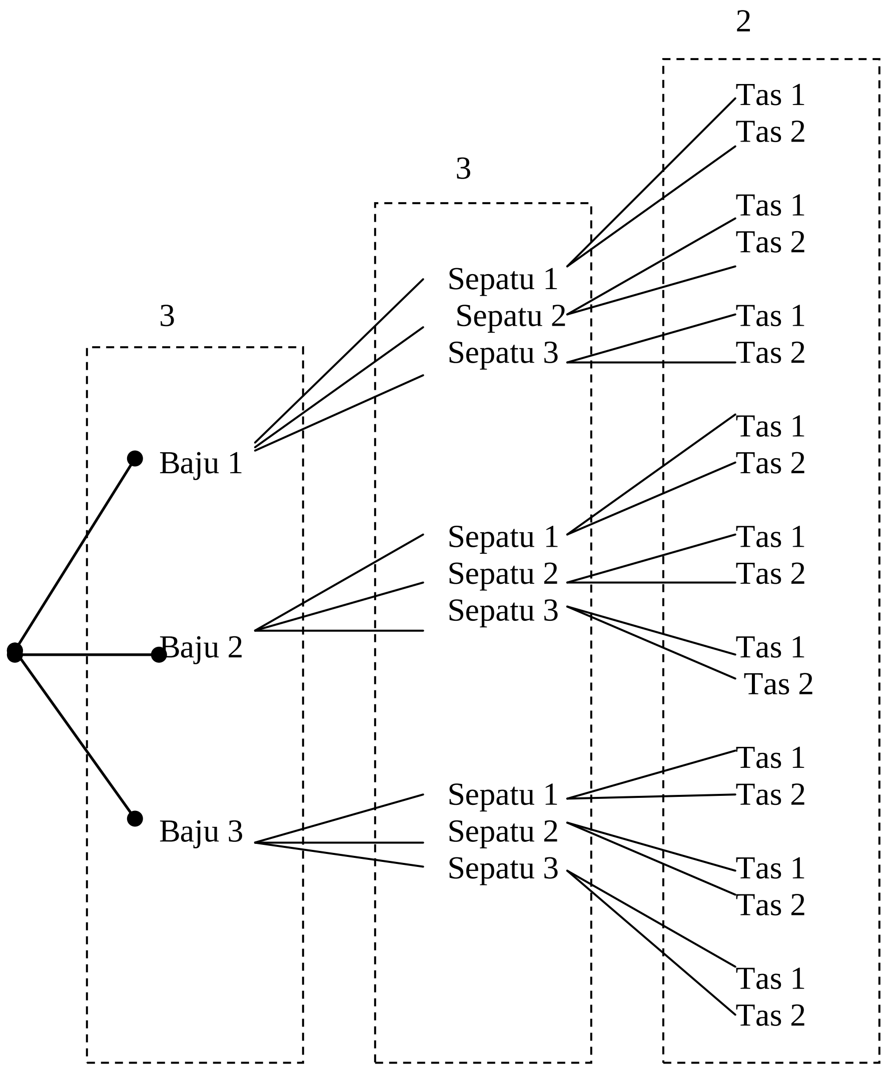
Ada $3 \times 4 = 12$ pilihan lintasan dari kota A ke kota C melalui kota B

Contoh 8.2
Seorang Ibu mau pergi ke undangan, memiliki 3 stel baju yang layak digunakan, ada 3 pasang sepatu dan 2 buah tas. Ada berapa pilihan pasangan baju, sepatu dan tas dapat digunakan ke undangan tersebut?

Jawab:
Banyaknya pilihan pasangan baju, sepatu dan tas adalah

Baju 1 – Sepatu 1 – Tas 1	Baju 1 – Sepatu 2 – Tas 1	Baju 1 – Sepatu 3 - Tas 1
Baju 1 – Sepatu 1 – Tas 2	Baju 1 – Sepatu 2 – Tas 2	Baju 1 – Sepatu 3 - Tas 2
Baju 2 – Sepatu 1 – Tas 1	Baju 2 – Sepatu 2 – Tas 1	Baju 2 – Sepatu 3 - Tas 1
Baju 2 – Sepatu 1 – Tas 2	Baju 2 – Sepatu 2 – Tas 2	Baju 2 – Sepatu 3 - Tas 2
Baju 3 – Sepatu 1 – Tas 1	Baju 3 – Sepatu 2 – Tas 1	Baju 3 – Sepatu 3 - Tas 1
Baju 3 – Sepatu 1 – Tas 2	Baju 3 – Sepatu 2 – Tas 2	Baju 3 – Sepatu 3 - Tas 2

Banyaknya pilihan ada 3 × 3× 2 = 18 pilihan.
Pilihan tersebut dapat digambarkan sebagai diagram pohon seperti berikut

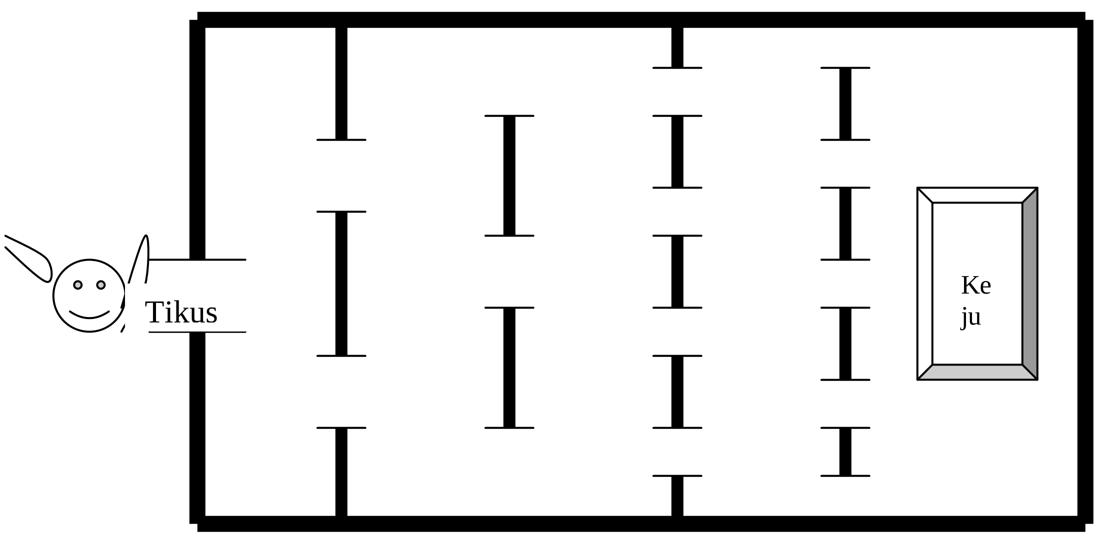


Gambar 8.2

Dari kedua contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:
Bila suatu aktivitas dilakukan dengan k tahap, dan tahap pertama dapat dilakuakan dengan n_1 cara, tahap kedua dapat dilakukan dengan n_2 cara, ..., dan tahap k dapat dilakukan dengan n_k cara, maka banyaknya cara melakukan aktivitas tersebut ada $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$

Latihan 8.1

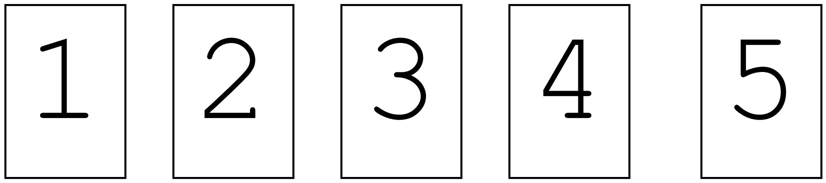
1. Dari Bandung ke Bandara Cengkareng ada 6 pilihan perusahaan angkutan darat, sedangkan dari Bandara ke Palangka Raya ada 4 pilihan perusahaan penerbangan. Berapa banyak pilihan angkutan yang digunakan dari Bandung ke Palangka Raya.
2. Dalam pemilihan Pengurus OSIS yang terdiri dari seorang Ketua, seorang Sekretaris, dan seorang Bendahara, terdapat 5 orang calon Ketua, 7 orang calon Sekretaris, dan 4 orang calon Bendahara. Berapa banyak susunan Pengurus OSIS yang mungkin?
3. Seorang siswa berniat joging pada hari Minggu pagi. Ia memiliki 7 kaos T-shirt, 6 potong celana oleh raga, dan 3 pasang sepatu olah raga. Berapa banyak pilihan pakaian yang dapat digunakan pada saat joging?
4. Dalam sebuah kotak yang disekat-sekat disimpan sepotong keju seperti terlihat pada Gambar 3. Berapa banyak jalan yang ditempuh tikus untuk mencapai keju tersebut ?



Gambar 8.3

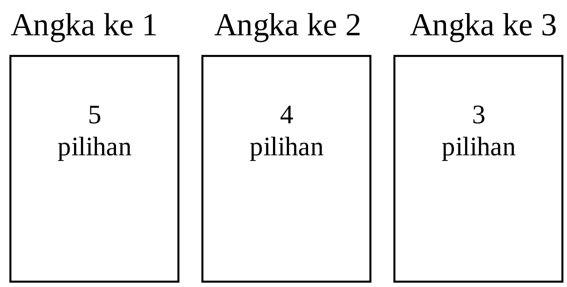
b. Permutasi

Misalkan ada lima kartu yang bertuliskan angka 1, 2, 3, 4, dan 5. Ada berapa pilihan susunan lambang bilangan yang terdiri dari tiga angka?



Gambar 8.4

Lambang bilangan yang terdiri dari tiga angka dapat digambarkan tiga kotak seperti berikut. Untuk mengisi kotak angka pertama terdapat 5 pilihan angka, untuk mengisi kotak angka kedua tinggal 4 pilihan karena satu angka telah diletakkan pada kotak pertama. Sedangkan untuk mengisi kotak angka yang ketiga tinggal 3 pilihan, sebab dari 5 angka yang tersedia telah diletakkan satu angka di kotak pertama dan satu angka di kotak kedua.



Gambar 8.5

Berdasarkan kaidah perkalian, maka banyaknya lambang bilangan yang dapat disusun ada $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Persoalan seperti di atas disebut permutasi 3 unsur dari 5 unsur ditulis $_5\mathbf{P}_3$.
Secara umum permutasi r unsur dari n unsur dengan $k \leq n$ ditulis $_n\mathbf{P}_r$.
Untuk memudahkan penulisan diperlukan lambang perkalian dari bilangan asli yang berurutan sebagai berikut.
$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ditulis $6!$ (dibaca: enam faktorial)
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ dan seterusnya.
Secara umum $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$, tentu saja $1! = 1$. Sedangkan $0! = 1$

Persoalan permutasi diatas dapat ditulis sebagai

$${}_5P_3 = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!} \, .$$

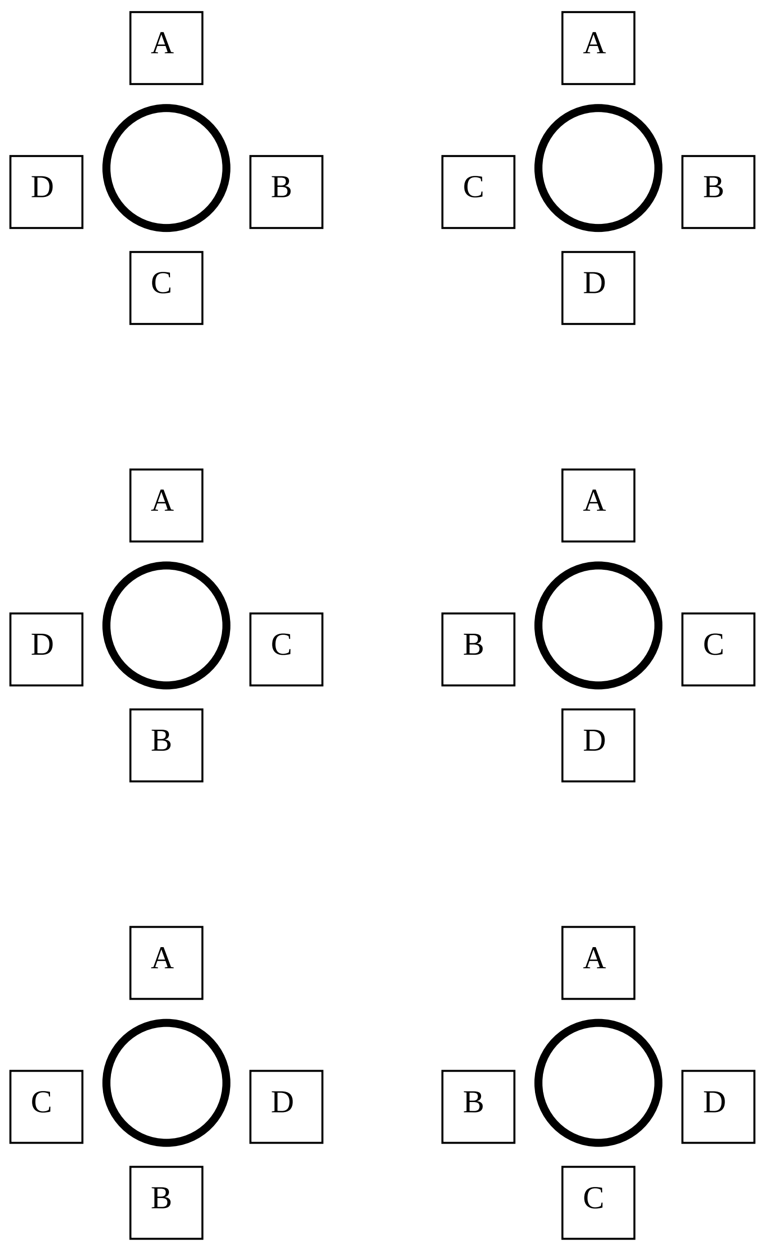
Dari uraian di atas diperoleh rumus permutasi $_n\mathbf{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Contoh 8.3
Pada saat 4 orang siswa akan menonton film di bioskop, tempat penjualan tiket sedang kosong. Pada saat membeli tiket mereka membuat antrian. Ada berapa susunan antrian yang mungkin ?
Jawab

Persoalan ini merupakan permutasi 4 unsur dari 4 unsur, jadi n = 4 dan r = 4, sehingga banyak susunan antrian ${}_4P_4 = \dfrac{4!}{(4-4)!} = \dfrac{4!}{0!} = \dfrac{4\times3\times2\times1}{1} = 24$.

Permutasi Memutar

Contoh 8.4:
Misalkan empat orang duduk mengelilingi sebuah meja. Ada berapa susunan cara mereka menduduki kursi?



Gambar 8.6

Dipandang putaran searah jarum jam terdapat 6 susunan yaitu ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, dan ADCB. Demikian pula bila dipandang putaran berlawanan arah jarum jam yaitu ADCB, ACDB, ADBC, ABDC, ACBD, dan ABCD. Jadi banyaknya susunan empat orang mengelilingi meja ada 6.
Banyaknya susunan mengelilingi suatu tempat disebut permutasi siklis (melingkar), dengan rumus $\mathbf{P_n = (n-1)!}$. Untuk n = 4 seperti contoh di atas, banyaknya susunan tersebut adalah $P_4 = (4-1)! = 3! = 3\times2\times1 = 6$.

Permutasi Beberapa Unsur sama
Contoh 8.5:
Ada berapa kata yang terdiri dari tiga huruf yang dapat disusun dari kata APA?
Kata APA terdiri dari tiga huruf , tetapi ada huruf yang sama yaitu huruf A. Misalkan huruf A yang pertama diberi indek A_1, dan huruf A kedua adalah A_2. Bila kita menyusun kata dari ketiga huruf A_1, A_2, dan P diperoleh 6 kata, yaitu A_1A_2P, A_1PA_2 , A_2A_1P, A_2PA_1, PA_1A_2, dan PA_2A_1. Akan tetapi bila indeksnya tidak diperhatikan, maka kita hanya memperoleh tiga kata yang berbeda yaitu,
$A_1A_2P = A_2A_1P = AAP$, $A_1PA_2 = A_2PA_1$, = APA dan $PA_1A_2 = PA_2A_1 = PAA$.
Jadi banyaknya kata yang (berbeda) yang dapat disusun dari kata APA adalah 3 kata yaitu AAP, APA, dan PAA. Cara memperolehnya adalah P = $\frac{3!}{2!} = \frac{3\times2\times1}{2\times1} = 3$.
Bila banyak unsur seluruhnya A, P, dan A dimisalkan n = 3 dan ada sebuah unsur yang sama yaitu A, banyaknya misalkan k = 2, maka rumus yang digunakan adalah permutasi itu 3 = $\frac{3\times2\times1}{2\times1}$ = $\frac{3!}{2!}$. Ini menyimpulkan bila banyak unsur seluruhnya n dan ada sebuah unsur yang sama dengan banyaknya k, maka permutasi dengan sebuah unsur yang sama memiliki rumus $\mathbf{P_n} = \frac{n!}{k!}$.
Secara umum, bila banyaknya seluruh unsur ada n, ada r buah unsur yang sama dengan masing-masing banyaknya k_1, k_2, …,k_r, maka $\mathbf{P_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$

Contoh 8.6:
Berapa banyaknya kata yang terdiri dari 10 huruf yang dapat disusun dari kata MATEMATIKA
Jawab:
Banyaknya seluruh huruf ada 10, artinya n = 10
Banyaknya huruf-huruf yang sama ada 3, yaitu M, A, dan T, artinya r = 3.
Huruf M ada 2 buah artinya $k_1 = 2$, huruf A ada 3 buah artinya $k_2 = 3$,dan huruf T yang sama ada 2 buah artinya $k_3 = 2$
Banyaknya susunan kata yang terdiri dari huruf MATEMATIKA adalah

$$\mathbf{P_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!} = \frac{10!}{2!\times3!\times2!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times3\times2\times1\times2\times1} = 151200$$

Latihan 8.2

1. Seorang pelukis membawa 8 lukisan yang akan dipajang pada dinding pameran. Ternyata ia hanya diperbolehkan memajang 4 lukisan dalam satu baris. Ada berapa banyak susunan lukisan yang mungkin dipajang pelukis tersebut?
2. Seorang siswa akan menumpuk 6 buah buku yang dikeluarkan dari tas. Berapa banyak tumpukan buku yang mungkin?
3. Ada berapa cara 5 orang siswa memasuki angkot ?
4. Dari 10 orang pengurus OSIS akan membetuk Panitia suatu acara yang terdiri dari seorang Ketua, seorang Sekretaris, dan seorang Bendahara. Berapa banyak susunan panitia dari pengurus OSIS tersebut?
5. Pada sebuah rapat yang dihadiri 7 orang, duduk mengelilingi sebuah meja. Berapa banyak susunan yang mungkin mereka duduk mengikuti rapat?
6. Barapa banyak kata yang dapat dibentuk dari kata CACAH?

c. Kombinasi

Contoh 8.7

Ada berapa susunan pasangan nomor ganda dari 5 pemain bulutangkis ?

Jawab:

Misalkan pemain itu A, B, C, D, dan E . Nomor ganda dibentuk oleh dua orang , kemungkinannya adalah AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, dan DE, banyaknya susunan yang mungkin ada 10. Banyaknya susunan ini disebut kombinasi 2 unsur dari 5 unsur ditulis ${}_5C_2$. Secara umum kombinasi r unsur dari n unsur dengan $r \le n$ memiliki rumus $\mathbf{{}_nC_r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

Soal di atas memiliki n = 5 dan r =2, maka ${}_5C_2 = \dfrac{5!}{(5-2)!2!} = \dfrac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{3\times 2\times 1\times 2\times 1} = 10.$

Coba perhatikan dengan persoalan berikut, susunlah banyaknya bilangan yang terdiri dari dua angka yang berbeda dari angka-angka 1, 2, 3, 4, dan 5. Untuk menjawab persoalan ini kita sediakan dua kotak, kotak pertama adalah kotak puluhan dan kedua kotak satuan sebagagai berikut.

Kotak Puluhan	Kotak Satuan

Gambar 8.7

Untuk mengisi kotak puluhan ada 5 pilihan yaitu angka-angka 1, 2, 3, 4, dan 5. Sedangkan untuk mengisi kotak satuan hanya ada 4 pilihan. Menurut kaidah perkalian banyaknya lambang bilangan tersebut ada $5 \times 4 = 20$. Bilangan-bilangan itu adalah

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

Dengan cara yang sama, banyaknya pasangan ganda dari 5 orang pemain bulutangkis A, B, C, D, dan E adalah diperoleh

AB	BA	CA	DA	EA
AC	BC	CB	DB	EB
AD	BD	CD	DC	EC
AE	BE	CE	DE	ED

Pada susunan lambang lambang bilangan 12 dan 21 berbeda walaupun angka yang disusun angka 1 dan 2, tetapi pada pasangan pemain bulutangkis pasangan AB dan BA sama saja, sehingga yang sama hanya dihitung satu kali saja, sehingga diperoleh 10 susunan

AB	(BA)	(CA)	(DA)	(EA)
AC	**BC**	(CB)	(DB)	(EB)
AD	**BD**	**CD**	(DC)	(EC)
AE	**BE**	**CE**	**DE**	(ED)

Secara singkat perbedaan permutasi dan kombinasi adalah pada permutasi memperhatikan urutan susunan 12 dan 21 merupakan dua susunan yang berbeda, sedangkan pada kombinasi {A,B} = {B,A} dianggap satu susunan.

Perpangkatan Suku-dua (Binomial)

Perhatikan perpangkatan dari suku-dua berikut.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, koefisien a^2 adalah 1 = ${}_2C_0$, koefisien ab adalah 2 = ${}_2C_1$ dan koefisien b^2 adalah 1 = ${}_2C_2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, koefisien a^3 adalah 1= ${}_3C_0$, koefisien a^2b adalah 3 = ${}_3C_1$ dan koefisien ab^2 adalah 3 = ${}_3C_2$ dan koefisien b^3 adalah 1 = ${}_3C_3$.

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, koefisien a^4 adalah 1= ${}_4C_0$, koefisien a^3b adalah 4 = ${}_4C_1$ dan koefisien a^2b^2 adalah 6 = ${}_4C_2$, koefisien ab3 adalah 4 = ${}_4C_3$ dan koefisien b^4 adalah 1 = ${}_4C_4$.

Selanjutnya dapat diduga bahwa pada

$$(a + b)^5 = {}_5C_0\, a^5 + {}_5C_1\, a^4b + {}_5C_2\, a^3b^2 + {}_5C_3\, a^2b^3 + {}_5C_4\, ab^4 + {}_5C_5\, b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10\, a^3b^2 + 10\, a^2b^3 + 5\, ab^4 + b^5$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa

$$\mathbf{(a + b)^n = {}_nC_0\, a^n + {}_nC_1\, a^{n-1}b + {}_nC_2\, a^{n-2}b^2 + \ldots + {}_nC_{n-2}\, a^2b^{n-2} + {}_nC_{n-1}\, ab^{n-1} + {}_nC_n\, b^n}$$

Contoh 8.8

Carilah koefisien suku ke 5 dari $(x + y)^7$.

Jawab:

Koefisien suku ke 5 adalah ${}_7C_4$ = $\frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{4!\times3\times2\times1} = 35$

Contoh 8.9

Carilah koefisien suku ke 4 dari $(x - 2y)^6$.

Jawab:

$(x - 2y)^6 = (x + (-2y))^6$, suku ke 4 adalah ${}_6C_3\ x^{6-3}\ (-2y)^3 = {}_6C_3\ x^3\ (-2)^3y^3 = {}_6C_3\ (-2)^3\ x^3y^3$

Jadi koefisien suku ke 4 adalah -8 ${}_6C_3$ =

$$-8\frac{6!}{3!(6-3)!} = -8\frac{6\times5\times4\times3!}{3!\times3\times2\times1} = -8\times20 = -160$$

Latihan 8.3

1. Dari 10 pemain bola volley dipilih 6 orang untuk mengawali pertandingan. Berapa banyak susunan yang dipilih?
2. Rapat Komite suatu sekolah dihadiri 15 orang, akan menetapkan 4 orang pengurus inti. Berapa banyak susunan yang mungkin dari pengurus inti tersebut?
3. Susunan panitia terdiri dari 3 orang yang dibentuk dari 5 pria dan 4 wanita. Susunan panitia harus terdiri dari 2 pria dan 1 wanita, berapakah susunan panitia yang dapat dibuat?
4. Tentukan koefisien ke 7 dari $(2x + y)^8$
5. Jika kita menulis lambang bilangan dari 1 hingga 999, berapa banyak kita menulis angka 1?

8.2. Peluang

a. Ruang Sampel

Contoh- contoh Ruang Sampel

1. Bila kita sebuah uang logam dilempar , maka yang terlihat dari atas ada dua kemungkingan yaitu Angka (A) atau Gambar (G). Himpunan {A , G} ini disebut ruang sampel dari pengetosan sekeping uang logam, dan banyaknya anggota ruang sampel adalah 2.
2. Jika sebuah dadu yang seimbang dilempar, maka mata dadu yang terlihat dari atas kemungkinannya adalah mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, atau 6. Himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6} adalah ruang sampel dari pengetosan sebuah dadu, dan banyaknya ruang sampel adalah 6.
3. Bila dilakukan pengetosan sebuah uang logam dan sebuah dadu bersama-sama, maka diperoleh ruang sampel {A1, A2, A3, A4, A5, A6, G1, G2, G3, G4, G5, G6}. Banyaknya ruang sampel ada 12 seperti terlihat pada Tabel 8.1.

Tabel 8.1

Dadu / Koin	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	A1	A2	A3	A4	A5	A6
G	G1	G2	G3	G4	G5	G6

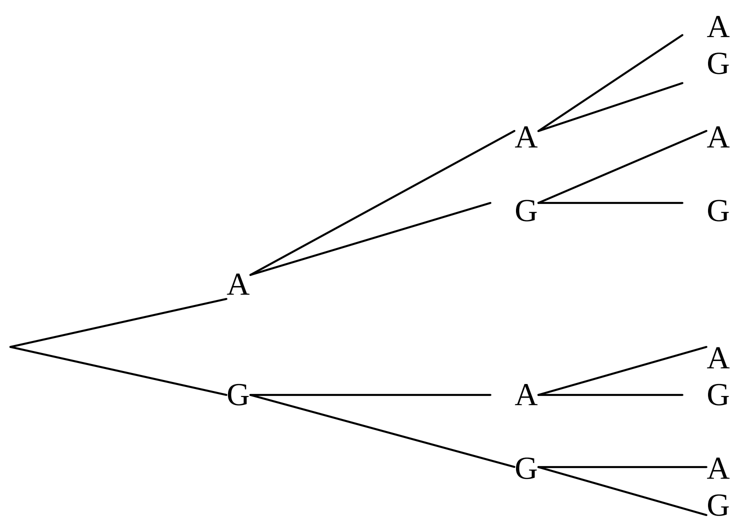
Persoalan –persoalan yang terkait dengan ruang sampel adalah mencari banyaknya anggota ruang sampel dan banyaknya (frekuensi) kejadian-kejadian tertentu pada ruang sampel tersebut.

Contoh 2.10

Tentukan banyaknya ruang sampel dari pengetosan 3 uang logam sekaligus, dan berapa banyaknya ruang sampel yang terdiri dua angka (A) dan satu gambar (G)?

Jawab:

Ruang sampel dari pengetosan 3 uang logam sekaligus dapat digambarkan sebagai diagram pohon pada Gambar 8. 8



Gambar 8.8

Ruang sampel itu adalah AAA, AAG, AGA, AGG, GAA, GAG, GGA, dan GGG, serta banyaknya ada 8

Cara lain untuk mengetahui banyaknya ruang sampel itu dengan kaidah perkalian, seperti terlihat pada Gambar 8.9

Uang ke 1	Uang ke 2	Uang ke 3
2 pilihan A atau G	2 pilihan A atau G	2 pilihan A atau B

Gambar 8.9

Jadi banyaknya ruang sampel adalah $2 \times 2 \times 2 = 8$
Munculnya 2 angka (A) dan satu gambar (G) yaitu ada 3 yaitu, AAG, AGA, dan GAA. Cara lain untuk memperoleh banyak munculnya dua A dan satu G dengan menggunakan kombinasi ${}_3C_2 = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = \dfrac{3 \times 2!}{2!1!} = 3$.

Latihan 8. 4

1. Tentukan ruang sampel dari pengetosan dua buah dadu sekaligus. Tentukan banyaknya ruang sampel dan banyaknya anggota ruang sampel yang jumlah kedua mata dadu genap.
2. Tentukan banyaknya ruang sampel dari pengetosan 4 uang logam sekaligus. Tentukan pula banyaknya anggota ruang sampel yang paling sedikit terdiri dari 2 angka.
3. Tentukan banyak anggota ruang sampel pengambilan 2 kartu sekaligus dari setumpuk kartu bridge. Tentukan pula banyaknya anggota ruang sampel yang kedua kartu berwarna hitam. (Setumpuk kartu bridge lengkap terdiri dari 52 kartu).
4. Dalam satu kotak terdapat 4 buah bola putih dan 5 bola merah. Tentukan banyaknya ruang sampel jika diambil 3 bola sekaligus dari kotak tersebut. Tentukan pula banyaknya anggota ruang sampel yang terdiri dari 1 bola putih dan 2 bola merah.

b. Pengertian Peluang

Peluang suatu kejadian tertentu , misalnya kejadian A didefinisikan sebagai

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{Banyaknya frekuensi munculnya peristiwa A}}{\textbf{Banyaknya ruang sampel}}$$

Contoh 8.11
Tentukan peluang munculnya gambar (G) pada pengetosan sebuah uang logam.
Jawab:
Banyaknya ruang sampel adalah 2 yaitu A dan G
Peluang munculnya gambar P(G) = ½

Contoh 8.12
Tentukan peluang terjadinya muncul mata dadu genap pada sekali pengetosan sebuah dadu.
Jawab:
Ruang sampel pengetosan sebuah dadu adalah {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan banyaknya ruang sampel ada 6. Banyaknya ruang sampel mata dadu genap ada 3 yaitu mata dadu 2, 4, dan 6.
Misalkan terjadinya muncul mata dadu genap disebut kejadian A, maka peluang muncul mata dadu genap adalah $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Contoh 8.13
Tentukan peluang terambilnya kartu As dari setumpuk kartu bridge?
Jawab:
Banyaknya ruang sampel dari setumpuk kartu bridge adalah 52, sedangkan banyaknya kartu As ada 4. Jadi peluang terambilnya kartu As adalah
$P(As) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Aksioma Peluang

1. Peluang suatu peristiwa yang tidak mungkin terjadi adalah 0
2. Peluang suatu peristiwa yang pasti terjadi adalah 1
3. Untuk setiap peristiwa A berlaku $0 \leq P(A) \leq 1$

Contoh 8.14
Tentukan peluang terjadinya orang akan mati
Jawab:
Semua orang akan mati, jadi P(orang akan mati) = 1

Contoh 8.15
Tentukan peluang muncul mata dadu 7 pada pelemparan sebuah dadu
Jawab:
Sebuah dadu hanya bermata 1, 2, 3, 4, 5, dan 6, jadi P(mata 7) = 0

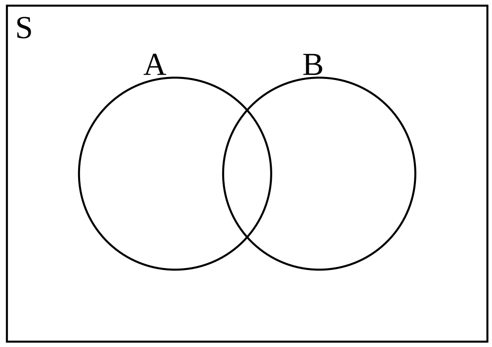
Teorema
Misalkan terdapat peristiwa Adalam ruang sampel S, maka peluang bukan A adalah
$P(A') = 1-P(A)$

Contoh 8.16
Tentukan peluang munculnya bukan mata dadu 2 pada pengetosan sebuah dadu.
Jawab:
$P(2) = \frac{1}{6}$, maka   P(bukan mata dadu 2) = $1- \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

c. Peluang Saling Lepas

Teorema

Bila A dan B sebarang dua peristiwa, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.



Gambar 8.10

Contoh 8.17

Tentukan peluang munculnya mata dadu genap atau mata dadu prima pada pengetosan sebuah dadu.

Jawab:

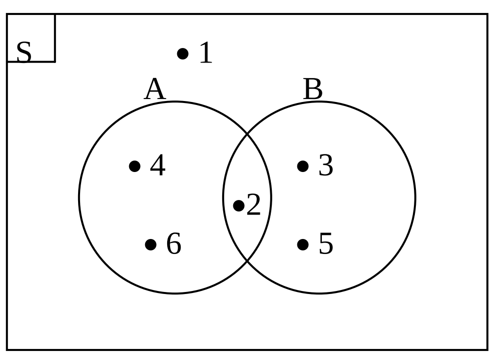
Ruang sampel pengetosan sebuah dadu adalah {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Banyaknya ruang sampel adalah 6. Peristiwa munculnya mata dadu genap adalah A = {2, 4, 6} dan peristiwa munculnya mata dadu prima adalah B = {2,3,5}, sehingga $A \cap B = \{2\}$

$P(A) = 3/6 = ½$ dan $P(B) = 3/6 = ½$ serta $P(A \cap B) = 1/6$.

Peluang muncul mata dadu genap atau prima adalah

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ½ + ½ - 1/6 = 5/6$.

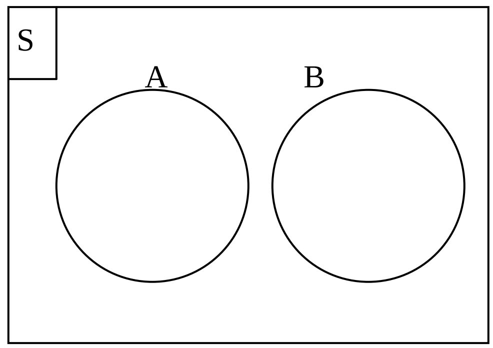
.



Gambar 8.11

Definisi:

Dua peristiwa A dan B disebut saling lepas jika dan hanya jika $A \cap B = \emptyset$.
Karena $A \cap B = \emptyset$, maka $P(A \cap B) = 0$, sehingga $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0$.
Dengan kata lain peristiwa A dan B saling lepas jika dan hanya jika
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



Gambar 8.12

Contoh 8.18

Tentukan peluang terambilnya sebuah kartu King atau Queen dari setumpuk kartu bridge lengkap.

Jawab:

$P(K) = 4/52 = 1/13$ dan $P(Q) = 4/52 = 1/13$. Karena himpunan K dan himpunan dan himpunan Q dua himpunan yang lepas, maka $P(K \cup Q) = P(K) + P(Q) = 1/13 + 1/13 = 2/13$

Latihan 8.5

1. Dua buah dadu dilempar sekaligus. Tentukan peluang jumlah mata dadu 5
2. Selembar kartu diambil setumpuk kartu bridge lengkap. Berapa peluang terambilnya kartu As atau kartu merah
3. Sebuah kotak berisi 6 bola hitam dan 4 bola putih. Jika diambil 4 buah bola sekaligus, tentukan peluang 3 bola hitam dan 1 bola putih.
4. Sebuah uang logam dan sebuah dadu ditos bersamaan. Tentukan peluang munculnya Gambar atau mata dadu lebih dari 4.

d. Peluang Bersyarat

Misal dalam sebuah kotak terdapat 3 bola merah dan 2 bola kuning. Mula-mula diambil sebuah bola, kemudian bola yang terambil itu dilihat ternyata berwarna merah. Kemudian diambil lagi sebuah bola tanpa mengembalikan bola merah yang telah terambil. Berapakah peluang terambilnya bola kuning? Peluang terambilnya bola kuning pada pengambilan kedua setelah pengambilan bola pertama terambil bola merah ini, mengilustrasikan peluang bersyarat. Bila peluang terambilnya bola kuning adalah P(K) dan peluang terambilnya bola merah adalah P(M), peluang terambilnya bola kuning bila sebelumnya terambil bola merah dilambangkan dengan P(K/M).

Teorema

Pada sebarang peristiwa A dan B berlaku $P(A \cap B) = P(A).\ P(B/A) = P(B).P(A/B)$ atau $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ dan $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Contoh 8.19

Dalam sebuah kotak terdapat 3 bola merah dan 2 bola kuning. Berapakah peluang terambilnya bola pertama bola merah dan bola kedua bola kuning (tanpa pengembalian).

Jawab:

Misalnya peristiwa terambilnya bola merah adalah M dan terambilnya bola kuning adalah K, peluang terambilnya sebuah bola merah dan sebuah bola kuning adalah $P(M \cap K) = P(M).P(K/M)$. Dari yang diketahui P(M) = 3/5 sedangkan P(K/M) = 2/4 = ½. Jadi $P(M \cap K)$ = 3/5. ½ = 3/10.

Contoh 8.20

Dalam satu kelas terdiri dari 25 siswi dan 15 siswa. Terdapat 5 siswi dan 10 siswa yang yang senang matematika. Jika dipilih sesorang secara acak dari siswa dan siswi yang senang matematika, berapa peluang terpilihnya sesorang siswa?

Jawab:

Misal himpunan yang senang matematika adalah M, himpunan siswa adalah L, maka

$P(M) = 15/40 = 3/8$, $P(M \cap L) = 10/40 = ¼$, dan $P(M/L) = \dfrac{P(M \cap L)}{P(L)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{2}{3}$

e. Peluang Saling Bebas

Definisi:

Dua peristiwa A dan B disebut saling bebas jika dan hanya jika

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Contoh 8.21

Sebuah dadu berwarna hitam dan sebuah dadu berwarna biru dilempar sekaligus. Tentukan peluang munculnya dadu hitam bermata ganjil dan dadu hitam bermata ganjil.

Jawab:

Misal peristiwa muncul mata ganjil dadu hitam adalah H dan peristiwa muncul mata genap dadu biru, maka P(H) = 3/6 = ½ dan P(B) = 3/6 = ½ , sehingga $P(H \cap B) = P(H).P(B)$ = ½ . ½ = ¼

Latihan 8.6

1. Misalkan kita memiliki 12 kartu yang diberi nomor 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, dan 12. Misalkan G adalah peristiwa terambilnya sebuah kartu bernomor genap, T adalah peristiwa terambilnya kartu dengan nomor kelipatan 3. Tentukan peluang dari (i) P(G), (ii) P(T), (iii) P(T/G), dan (iv) P(G/T).

2. Tabel 8.2. berikut menunjukkan jumlah siswa pria dan wanita kelas X suatu SMA yang mengikuti ekstra kurikuler olahraga dan bukan olah raga. Akan dipilih seorang siswa secara acak. Apakah peristiwa terpilihnya siswa pria dan siswa mengikuti ekstra kurikuler olahraga merupakan suatu kejadian saling bebas?

Tabel 2.2

Ekstra Kurikuler	Pria	Wanita
Olahraga	27	48
Bukan olahraga	83	92

3. Tabel 8.3. berikut menunjukkan jumlah siswa pria dan wanita kelas X suatu SMA yang senang dan tidak senang terhadap mata pelajaran matematika. Seorang siswa dipilih secara acak.

a. Tentukan peluang terambilnya seorang siswa yang senang matematika

b. Tentukan peluang terpilihnya seorang siswa pria yang senang matematika.

c. Tunjukkan bahwa senang terhadap matematika tidak saling bebas dengan jender siswa.

Tabel 8.3

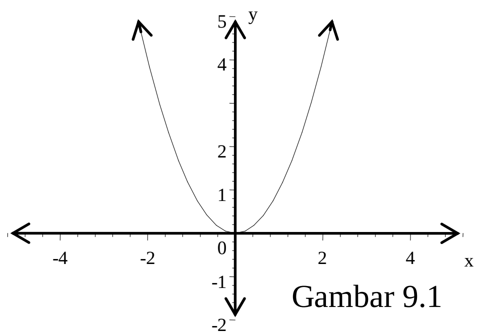
	Pria	Wanita
Senang Matematika	72	58
Tidak senang matematika	48	22

4. Dua orang siswa perempuan Ana dan Beta saling lempar –tangkap bola. Peluang Ana menangkap bola yang dilempar Beta adalah 0, 3, sedangkan peluang Beta menangkap bola yang dilempar Ana adalah 0,4. Jika kedua peristiwa itu saling bebas, tentukan peluang (i) Ana dan Beta keduanya dapat menangkap bola, dan (i) paling sedikit seorang dari kedua orang itu menangkap bola.

BAB IX
FUNGSI KUADRAT DAN NILAI MUTLAK

9.1 Fungsi Kuadrat

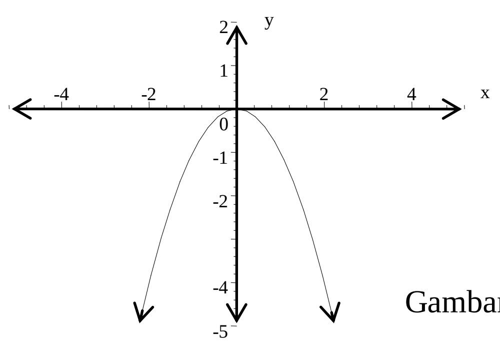
Bentuk umum $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, a, b, dan c bilangan real. Domain dan kodomainnya adalah bilangan real $\Re$.
Perhatikan Gambar 9.1 yang merupakan grafik fungsi $f(x) = x^2$, kita peroleh fakta bahwa



Gambar 9.1

1. Sumbu y merupakan sumbu simetri
2. Daerah hasil adalah $y \geq 0$, y bilangan real
3. Grafik fungsi di atas termasuk parabola yaitu, himpunan titik yang berjarak sama terhadap sebuah garis (direktrik) dan sebuah titik (fokus) di luar garis itu. Dalam hal ini direktriknya $y = -\frac{1}{4}$ dan fokusnya $(0, \frac{1}{4})$. Selanjutnya titik (0,0) disebut titik puncak parabola.
4. Grafik di atas Gambar 9.1 disebut terbuka ke atas.

Perhatikan Gambar 9.2 grafik fungsi $f(x) = -x^2$, kita peroleh fakta bahwa

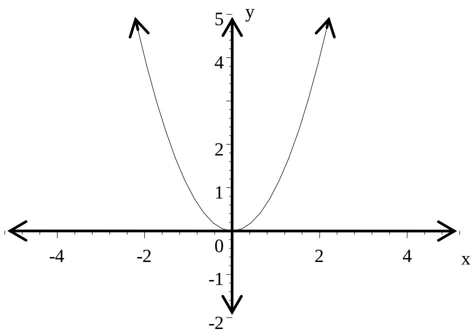


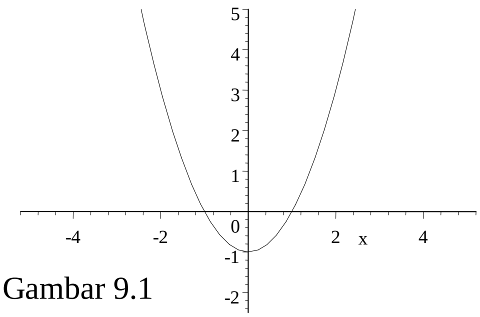
Gambar 9.2

1. Sumbu y merupakan sumbu simetri
2. Daerah hasil adalah $y \leq 0$, y bilangan real

3. Grafik fungsi di atas termasuk parabola yaitu, himpunan titik yang berjarak sama terhadap sebuah garis (direktrik) dan sebuah titik (fokus) di luar garis itu. Dalam hal ini direktriknya y = ¼ dan fokusnya (0, - ¼). Titik puncaknya k (0,0).
4. Grafik di atas dikatakan terbuka ke atas

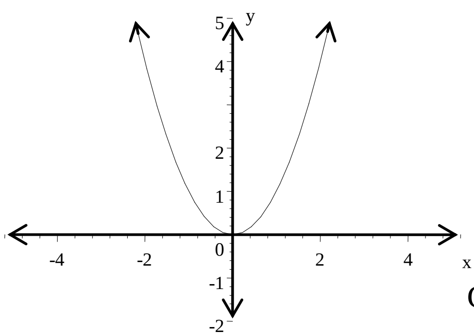
Sekarang perhatikan grafik $f(x) = x^2$ dan grafik $f(x) = x^2 – 1$

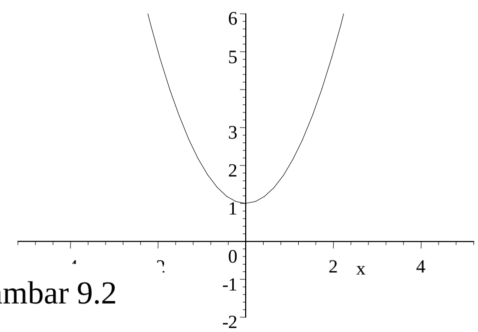




Gambar 9.1

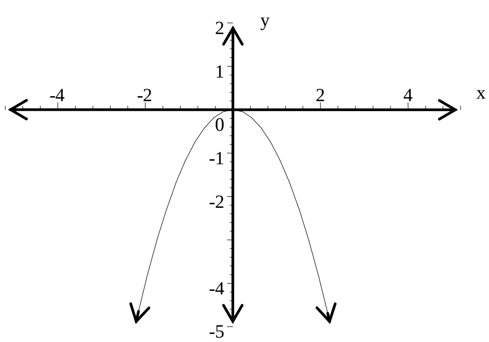
Sekarang perhatikan grafik $f(x) = x^2$ dan grafik $f(x) = x^2 +1$

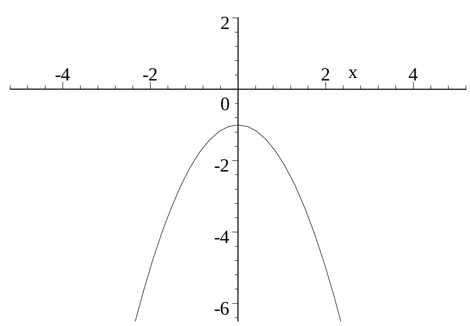




Gambar 9.2

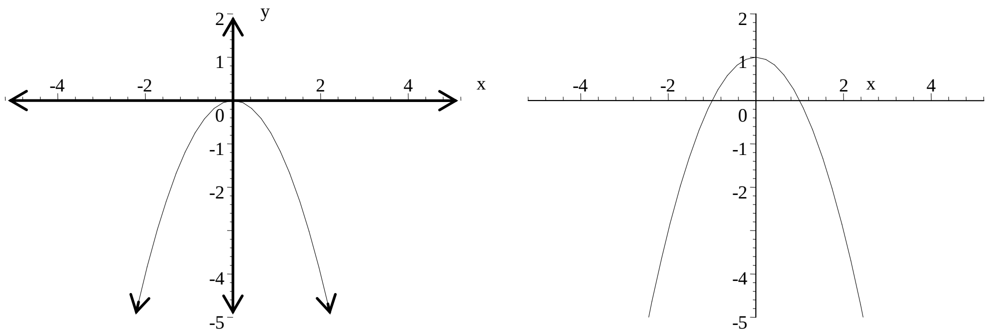
Sekarang perhatikan grafik $f(x) = -x^2$ dan grafik $f(x) = -x^2 – 1$





Gambar 9.3

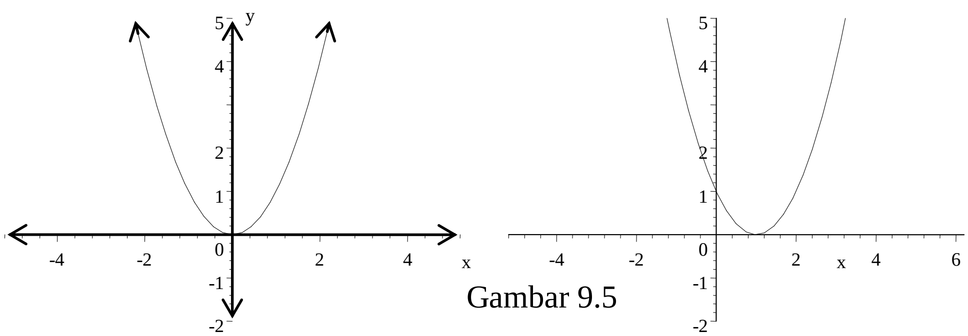
Sekarang perhatikan grafik $f(x) = -x^2$ dan grafik $f(x) = -x^2 + 1$



Gambar 9.4

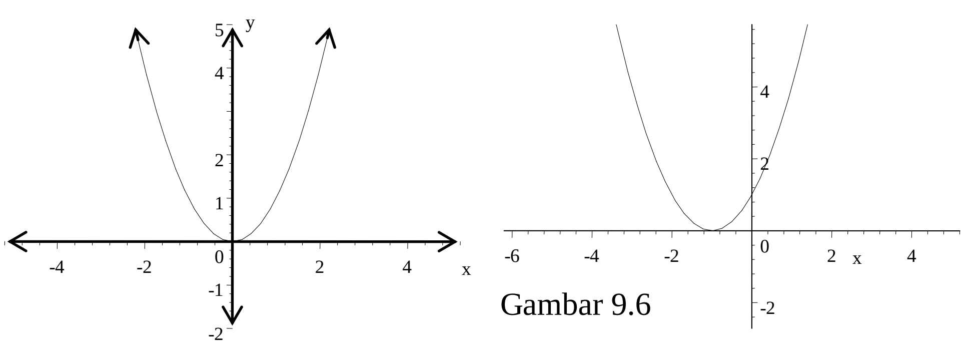
Apa yang Anda simpulkan?

Sekarang perhatikan grafik $f(x) = x^2$ dan grafik $f(x) = (x-1)^2$



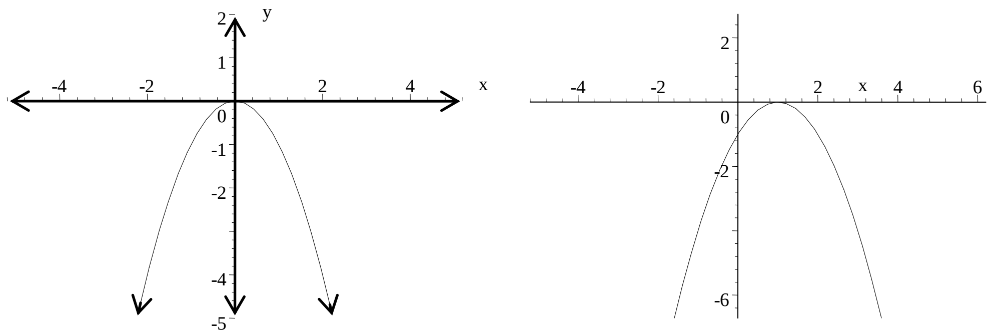
Gambar 9.5

Sekarang perhatikan grafik $f(x) = x^2$ dan grafik $f(x) = (x+1)^2$



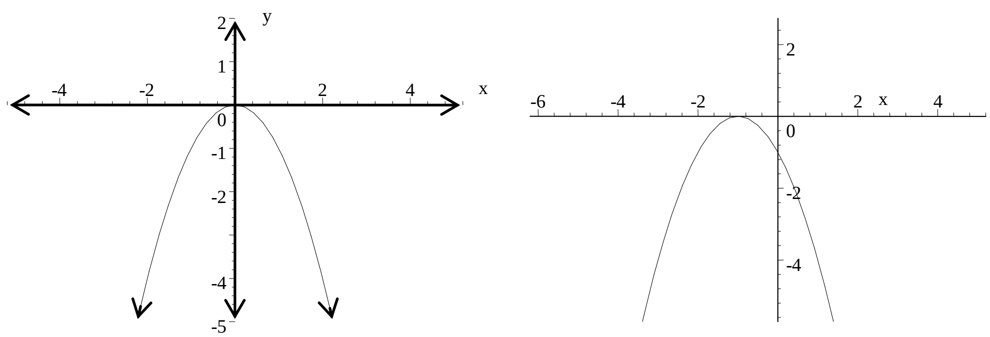
Gambar 9.6

Sekarang perhatikan grafik $f(x) = -x^2$ dan grafik $f(x) = -(x - 1)^2$



Gambar 9.7

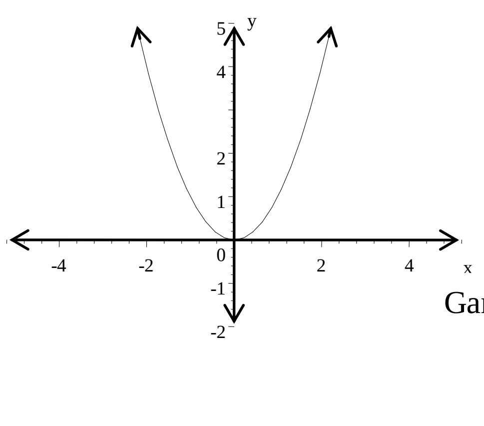
Sekarang perhatikan grafik $f(x) = -x^2$ dan grafik $f(x) = -(x + 1)^2$

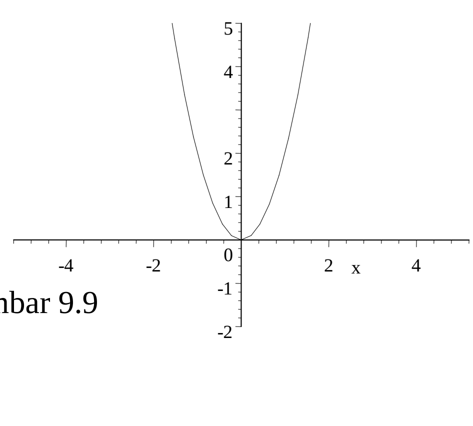


Gambar 9.8

Apa yang Anda simpulkan?

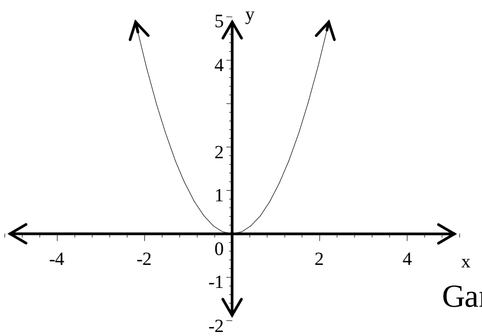
Sekarang perhatikan grafik $f(x) = x^2$ dan grafik $f(x) = 2x^2$

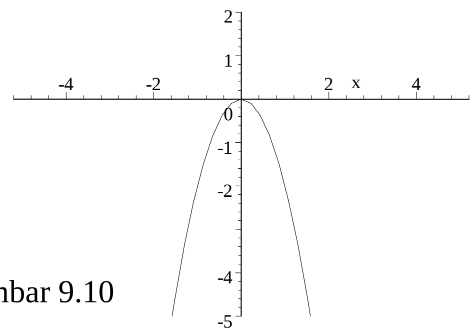




Gambar 9.9

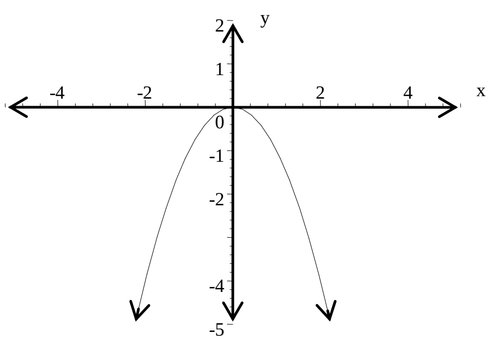
Sekarang perhatikan grafik $f(x) = x^2$ dan grafik $f(x) = -2x^2$

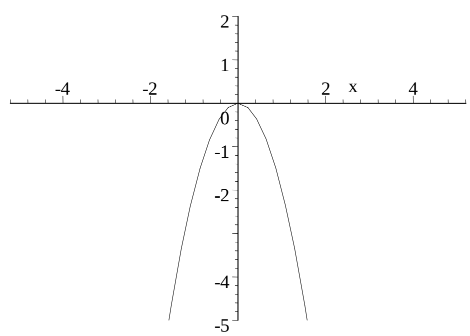




Gambar 9.10

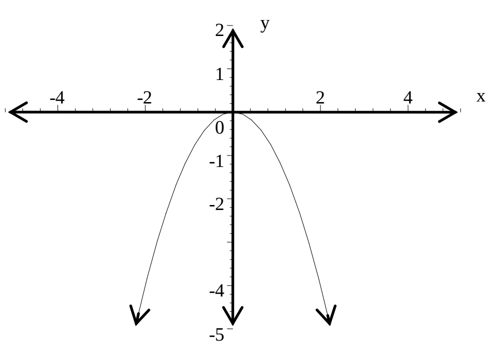
Sekarang perhatikan grafik $f(x) = -x^2$ dan grafik $f(x) = -2x^2$

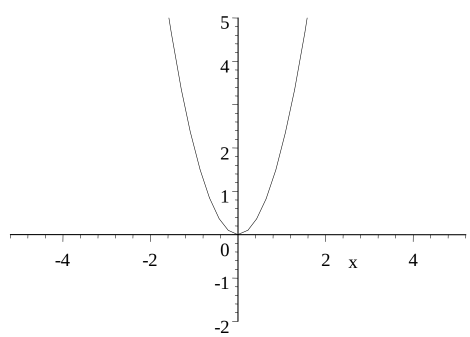




Gambar 9.11

Sekarang perhatikan grafik $f(x) = -x^2$ dan grafik $f(x) = 2x^2$

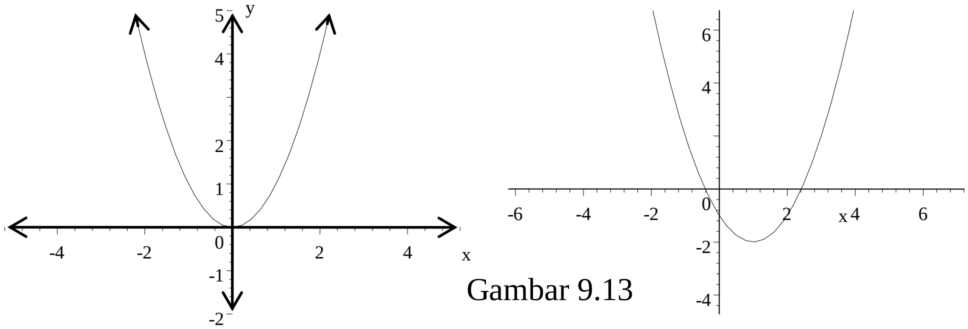




Gambar 9. 12

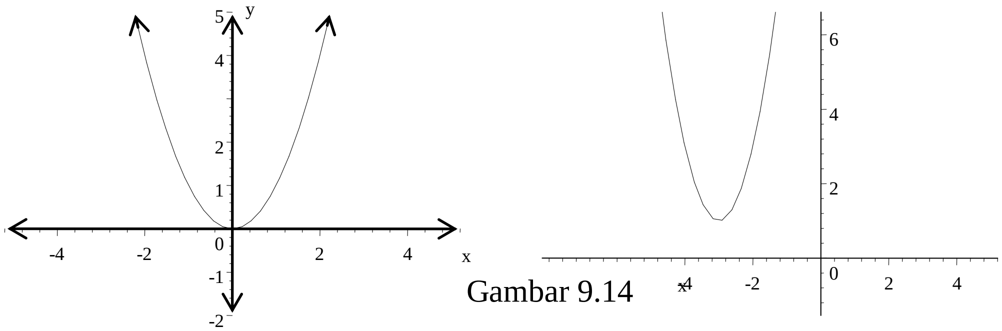
Apa yang dapat simpulkan?

Sekarang perhatikan grafik f(x) = x^2 dan grafik f(x) = $(x-1)^2$ -2



Gambar 9.13

Sekarang perhatikan grafik f(x) = x^2 dan grafik f(x) = $2(x+3)^2$ +1



Gambar 9.14

Apa yang dapat disimpulkan?

Berdasarkan eksplorasi grafik-grafik fungsi kuadrat tersebut, dapat diperoleh pola tentang grafik fungsi kuadrat f(x) = ax^2 + bx + c.

1. Jika a > 0 grafik terbuka ke atas dan jika a < 0 grafik terbuka ke bawah.
2. Grafik f(x) = ax^2 , a ≠ 0 merupakan dilatasi dengan pusat O(0,0) dan faktor dilatasi a dari grafik f(x) = x^2.
3. Fungsi f(x) = ax^2 + bx + c ekivalen dengan $f(x)+\frac{D}{4a}=a(x+\frac{b}{2a})^2$, dengan D = b^2 -4ac, grafiknya merupakan dilatasi dengan pusat O(0,0) dan faktor dilatasi dari grafik f (x) = x2 dilanjutkan translasi $\begin{pmatrix}\frac{-D}{4a}\\ \frac{-b}{2a}\end{pmatrix}$ sehingga memiliki sumbu simetri x = $\frac{-b}{2a}$ dan nilai maksimum atau minimum y = $\frac{-D}{4a}$

9.2 Persamaan Kuadrat

Grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ paling banyak memotong sumbu di dua titik, yang absisnya memenuhi $f(x) = 0$ atau $ax^2 + bx + c = 0$. Himpunan penyelesaian dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dipandang absis titik potong grafik fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan sumbu x.

Untuk menentukan himpunan penyelesaian persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dilakukan dengan faktorisasi, melengkapkan menjadi bentuk kuadrat sempurna, menggunakan rumus $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Prosedur mencari himpunan penyelesaian dengan faktorisasi adalah berdasarkan fakta, bila a dan b bilangan real dan $ab = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$. Rumus di atas dapat diturunkan berdasarkan fakta bila $x^2 = a$ dan $a > 0$, maka $x = \sqrt{a}$ atau $x = -\sqrt{a}$.

Perlu diperhatikan perbedaan antara $\sqrt{a}$ dan himpunan dari $x^2 = a$ dan $a > 0$. Nilai $\sqrt{a}$ dengan $a > 0$ adalah bilangan positif, sebagai contoh $\sqrt{4} = 2$ bukan ± 2. sedangkan pada persamaan $x^2 = 4$ himpunan penyelesaiannya adalah {2, -2} sebab jika x pada persamaan itu disubsitusi oleh 2 atau -2 menjadi kalimat yang benar.

Perhatikan rumus $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, jika $D = b^2 - 4ac$ maka rumus menjadi $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Nilai $\sqrt{D}$ bernilai real bila $D \geq 0$, sementara bila $D < 0$ nilai $\sqrt{D}$ menjadi bilangan imajiner. Selanjutnya dapat disimpulkan jika $D < 0$, maka persamaan kuadrat tersebut tidak memiliki himpunan penyelesaian bilangan real. Jika $D \geq 0$ ada dua kemungkinan yaitu $D = 0$ atau $D > 0$. Jika $D = 0$, maka $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$, hanya memiliki sebuah himpunan penyelesaian. Sedangkan jika $D > 0$, maka terdapat dua anggota himpunan penyelesaian sebab nilai $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ berbeda dengan nilai $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

Latihan

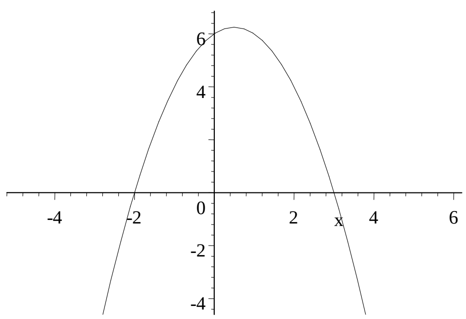
1. Coba turunkan rumus untuk menentukan himpunan penyelesaian $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
2. Bila anggota himpunan penyelesaian dari ax2 + bx + c = 0 adalah x_1 dan x_2, tunjukkan $x_1 + x_2 = -b/a$ adan $x_1 x_2 = c/a$

9.3 Pertidaksamaan Kuadrat

Titik-titik dari grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ ada yang terletak pada sumbu x, atau di atas sumbu x atau di bawah sumbu x. Titik yang terletak pada sumbu x, absisnya merupakan himpunan penyelesaian dari $f(x) = 0$ atau $ax^2 + bx + c = 0$. Sementara titik yang terletak di atas sumbu x, absisnya merupakan himpunan penyelesaian dari $f(x) > 0$ atau $ax^2 + bx + c > 0 = 0$, dan titik yang terletak di bawah sumbu x merupakan himpunan penyelesaian dari $f(x) < 0$ atau $ax^2 + bx + c < 0$. Dengan demikian untuk menyelesaikan suatu pertidaksamaan kuadrat dapat denggunakan sketsa grafik fungsi kuadrat yang bersesuaian. Titik potong grafik fungsi memiliki peran yang sangat penting dalam menentukan himpunan pertidaksamaan kuadrat.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $f(x) > 0$ bila grafik f seperti terlihat pada Gambar berikut.

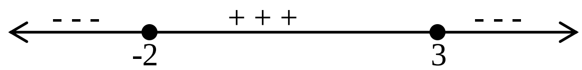


Gambar 9.15

Jawab:

Grafik fungsi f di atas memotong sumbu x di $x = -2$ dan $x = 3$. Untuk $-2 < x < 3$ grafik terletak di atas sumbu x dan grafik terletak di bawah sumbu x untuk $x < -2$ dan $x > 3$. Jadi himpunan penyelesaian $f(x) > 0$ adalah $\{x : -2 < x < 3\}$.

Selanjutnya untuk menghemat waktu ketika menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat sering hanya digambarkan sumbu x dengan batas-batas titik potong grafik dengan sumbu x, daerah dimana grafik di atas ditandai dengan + sedangkan daerah dimana grafik berada di bawah sumbu x ditandai dengan -.



Gambar 9. 16

Cara lain menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat bila bentuk kuadratnya dapat difaktorkan maka dapat menggunakan sifat bilangan real, (1) hasil perkalian dua bulangan real positif adalah bilangan real positif, (2) hasil perkalian dua bilangan real negatif adalah bilangan real positif, dan hasil perkalian bilangan real positif dan bilangan negatif adalah bilangan real negatif. Sebagai contoh, untuk menyelesaikan (x-a)(x-b) < 0, dengan a < b, dapat dipandang (x-a) dan (x-b) sebagai dua bilangan real yang hasilkalinya bilangan negatif, sehingga ada dua kemungkinan; (1) (x-a) > 0 dan (x-b) < 0 atau (2) (x – a) < 0 dan (x –b) > 0.Selanjutnya diperoleh (1) x > a dan x < b atau (2) x < a dan x > b. Karena diketahui a < b, maka pernyataan yang benar adalah x > a dan x < b atau a < x < b.

Penalaran seperti di atas, dapat digunakan pula untuk menyelesaikan pertidaksamaan pecahan seperti $\frac{(x-a)}{(x-b)} \leq 0$, b ≠ 0 dengan a < b. Pecahan tersebut akan negatif atau nol apabila (1) x – a ≥ 0 dan x – b < 0 atau (2) x – a ≤ 0 dan x – b > 0 sehingga diperoleh x ≥ a dan x < b atau x ≤ a dan b > 0. Karena a < b, maka jawaban yang mungkin adalah adalah a ≤ x < b

Latihan

Tentukan himpunan penyelesaian dari

1. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-12} \geq 0$

2. $\frac{x^2-3x+5}{x^2+2x+1} \leq 0$

3. $\frac{x^2-2}{x^2+x+1} \leq 0$

4. $\frac{x-1}{x+2} \geq \frac{3-x}{x+1}$

9.4 Fungsi Nilai Mutlak

Fungsi nilai mutlak ditulis sebagai f(x) = $|x| = \begin{cases} x \text{ untuk } x \geq 0 \\ -x \text{ untuk } x < 0 \end{cases}$

Beberapa sifat nilai mutlak

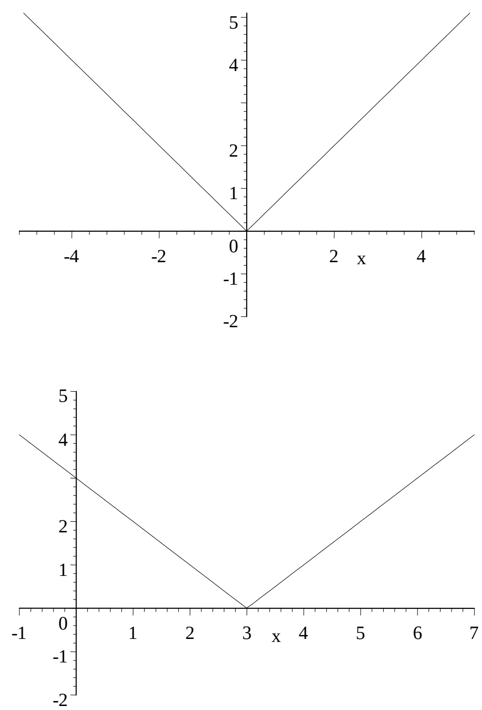
(1) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(2) Untuk a > 0, $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

(3) Untuk a > 0, $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ atau $x > a$

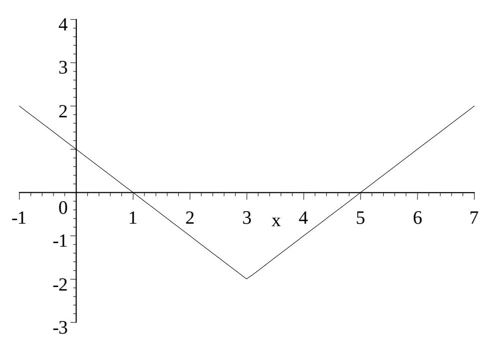
(4) $\sqrt{x^2} = |x|$

Gambar 9. 17 (i) adalah sketsa grafik f(x) = $|x|$ dan Gambar 9.17 (ii) adalah sketsa grafik g(x) = $|x - 3|$.



Gambar 9.17

Gambar 9. 18 adalah sketsa grafik f(x) = $|x - 3| - 2$



Gambar 9.18

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak $|x - 3| - 2 < 0$, dapat menggunakan grafik fungsi $f(x) = |x - 3| - 2$ pada Gambar 9.18, $|x - 3| - 2 < 0$ memiliki grafik f(x) di bawah sumbu x, yaitu untuk $1 < x < 5$. Dengan menggunakan sifat nilai mutlak diperoleh $|x - 3| - 2 < 0 \Leftrightarrow |x - 3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 3 < 2$ bila ketiga ruas ditambah dengan 3 diperoleh $1 < x < 5$.

Latihan

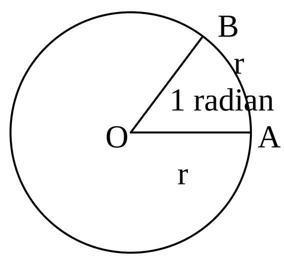
Tentukan himpunan penyelesaian dari

1. $|x - 3| < |x + 1|$
2. $|x - 2| - |x + 1| > 2$
3. $\dfrac{|2x-1|}{x+3} \le 0$
4. $\dfrac{\sqrt{4-x}}{|x+3|} \ge 0$

BAB X
TRIGONOMETRI

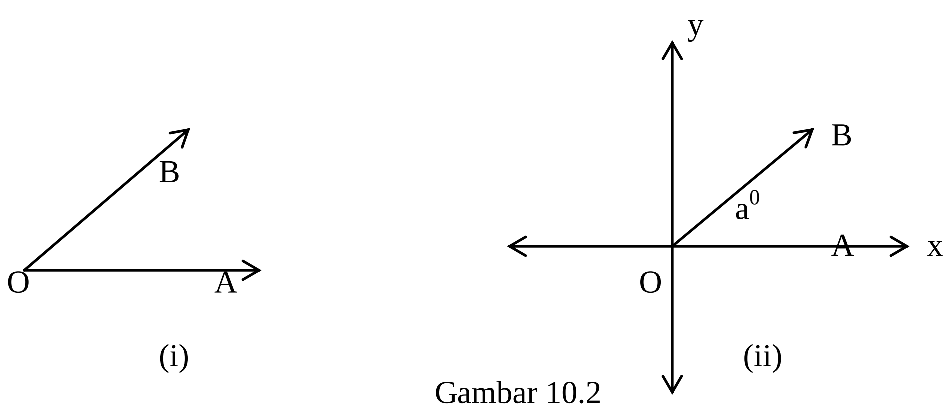
10.1 Ukuran sudut

Satuan ukuran sudut yang biasa digunakan dalam satuan derajat atau satuan radian. Satu putaran = $360^0 = 2\pi$ radian. Satu radian didefinisikan sebagai sudut pusat pada sebuah lingkaran yang menghadapi busur yang panjangnya sama dengan jari-jari lingkaran.



Gambar 10.1

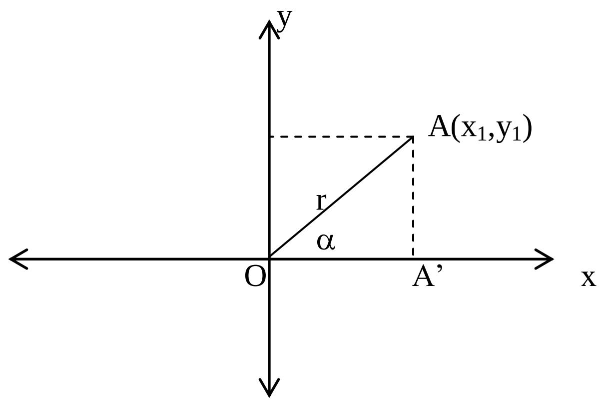
Ada perbedaan cara menetapkan ukuran sudut dalam geometri dan trigonometri. Dalam geometri dipandang sebagai jarak putar terpendek untuk memutar kaki sudut sehingga berimpit dengan kaki sudut lainnya. Ukuran $\angle$ AOB adalah jarak putar untuk memutar kaki OA sehingga berimpit dengan kaki OB atau memutar kaki OB sehingga berimpit dengan kaki OA, arah putaran searah jarum jam atau berlawanan arah tidak dipersoalkan. Sedangkan pada trigonometri ukuran sudut dikatakan positif memutarnya berlawanan arah jarum jam, dan ukuran negatif bila searah jarum jam. Ukuran sudut AOB pada Gambar 10. 2 (ii) memutar sumbu x positif berlawanan arah jarum jam hingga berimpit dengan OB, misalkan a^0. Ukuran $\angle$ AOB bisa dianggap boleh dipandang berukuran – $(360\text{-a})^0$, juga boleh dipandang berukuran $(360 + a)^0$, atau secara umum (360k + a)0 untuk k bilangan bulat.



Gambar 10.2

10.2 Fungsi Trigonometri

Ada enam jenis fungsi dasar dari fungsi trigonometri yaitu sinus (sin x), kosinus (cos x), tangen (tan x), kotangen (cot x), secan (sec x), dan kosecan (csc c x). Notasi sin x berarti ukuran sudutnya dalam satuan radian, sedangkan bila ukuran sudutnya dalam derajat di lambangkan dengan sin x^0.



Gambar 10.3

Misalkan titik A (x_1,y_1) dan OA = r, dan sudut yang dibentuk oleh sumbu x + dan OA berukuran α^0, maka

1. $\sin \alpha^0 = \frac{y_1}{r}$
2. $\cos \alpha^0 = \frac{x_1}{r}$
3. $\tan \alpha^0 = \frac{y_1}{x_1}$
4. $\cot \alpha^0 = \frac{x_1}{y_1}$
5. $\sec \alpha^0 = \frac{r}{x_1}$
6. $\csc \alpha^0 = \frac{r}{y_1}$

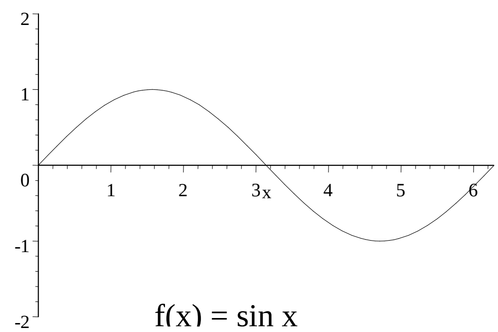
Bilangan r selalu positif bila titik A tidak berimpit dengan titik asal O, fungsi sin α^0 dan cos α^0 terdefinisi untuk α bilangan real manapun sehingga domain dari fungsi tersebut adalah bilangan real. Untuk fungsi tan α^0 fungsi tak terdefinisi bila $x_1 = 0$ sehingga domain fungsi tersebut bila menggunakan satuan derajat bilangan real kecuali untuk $\alpha = (2k-1)90$ dengan k bilangan bulat.

Latihan

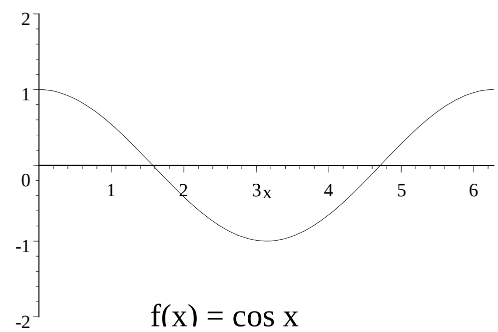
1. Tentukan kuadran dimana nilai fungsi sinus negatif
2. Tentukan kuadran dimana nilai fungsi kosinus positif
3. Tentukan kuadran dimana nilai fungsi tangen positif
4. Tentukan kuadran dimana nilai fungsi kotangen negative
5. Tunjukkan nilai sin $90^0 = 1$ dan nilai cos $90^0 = 0$
6. Tunjukkan nilai sin $45^0 = ½ \sqrt{2}$
7. Tunjukkan nilai cos $60^0 = ½$
8. Tunjukkan $\sin^2 \alpha^0 + \cos^2 \alpha^0 = 1$
9. Tunjukkan $\tan^2 \alpha^0 + 1 = \sec^2 \alpha^0$
10. Tunjukkan $\sin \alpha^0 = \cos (90 - \alpha)^0$
11. Tunjukkan $\sin \alpha^0 = \sin (180 - \alpha)^0$
12. Tunjukkan $\cos \alpha^0 = - \cos (180 - \alpha)^0$

10.3 Grafik Fungsi Trigonometri

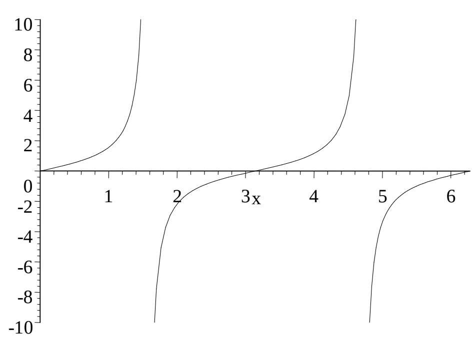
Dengan menggunakan radian sebagai satuan sudut dengan $0 \leq x \leq 2\pi$ diperoleh grafik fungsi trigonometri sebagai berikut



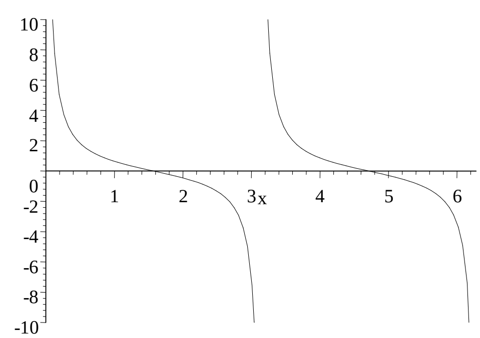
f(x) = sin x



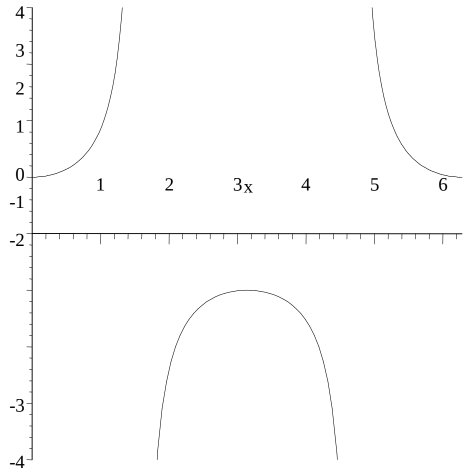
f(x) = cos x



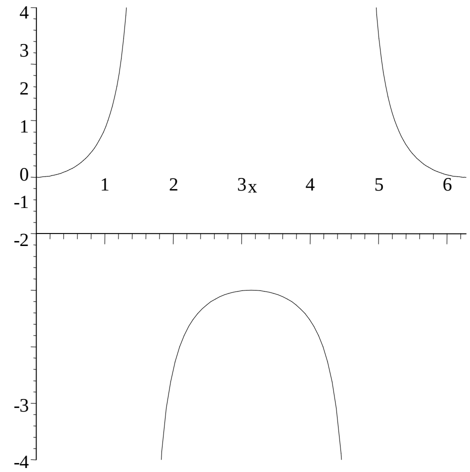
f(x) = tan x



f(x) = cot x



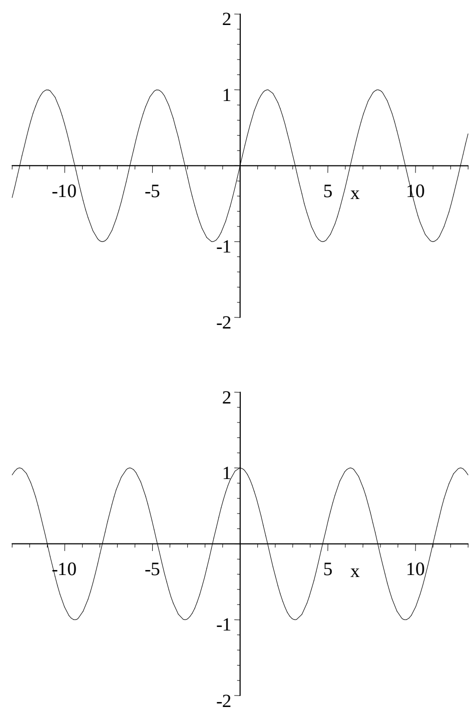
f(x) = sec x



f(x) = csc x

Gambar 10.4

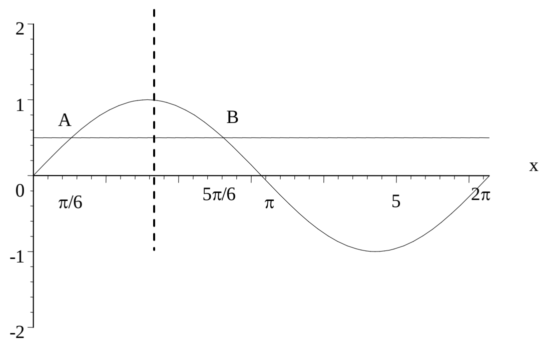
Grafik fungsi trigonometri bila domainnya tidak dibatasi berupa fungsi periodik. Fungsi $f : R \rightarrow R$ disebut fungsi periodik apabila ada p sehingga f(x) = f(x + p) untuk setiap x anggota domain f, p disebut periode fungsi f. Sebagai contoh, fungsi f(x) = sin x adalah fungsi periodik sebab f(x) = f(x + 2π) = sin x untuk setiap x anggota domain x, fungsi f(x) = sin x memiliki periode 2π. Demikian pula fungsi g(x) = cos x.



Gambar 10.5

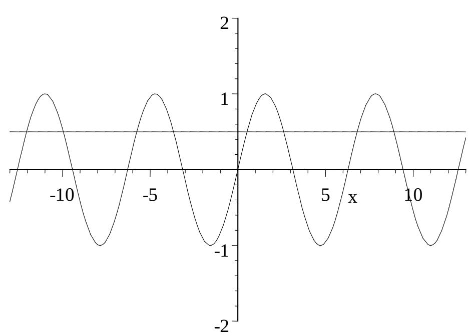
Persamaan Trigonometri

Fungsi trigonometri bukanlah fungsi satu-satu sehingga nilai x yang memenuhi $f(x) = \sin x = ½$ tidak hanya sebuah anggota domain. Sekarang perhatikan Gambar 10.6, fungsi $f(x) = \sin x$ untuk $0 \le x \le 2\pi$ dan $g(x) = ½$. Titik potong grafik f(x) dan g(x) untuk satu periode ada dua yaitu di titik A dan B. Absis titik A adalah $\pi/6$ dan absis titik B adalah $5\pi/6$, atau $\pi/6$ dan $(\pi - \pi/6)$.



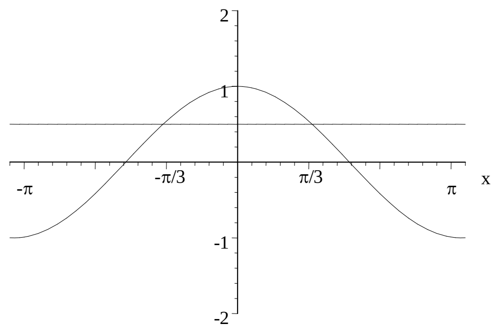
Gambar 10. 6

Bila domain $f(x) = \sin x$ tidak dibatasi dan g(x) fungsi konstan positif kurang dari 1 misalnya ½ terlihat pada Gambar 10.7. Absis titik potong f(x) dan g(x) menjadi banyak yang terbagi dalam dua kelompok (i) $x = \pi/6 + 2k\pi$ dan (2) $x = (\pi-\pi/6) + 2k\pi$ untuk k bilangan bulat. Hal ini menunjukkan bahwa bila $\sin x = t$ dengan $-1 \le x \le 1$, dan $\sin \alpha = t$, maka $x = \alpha + 2k\pi$ atau $x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$.



Gambar 10.7

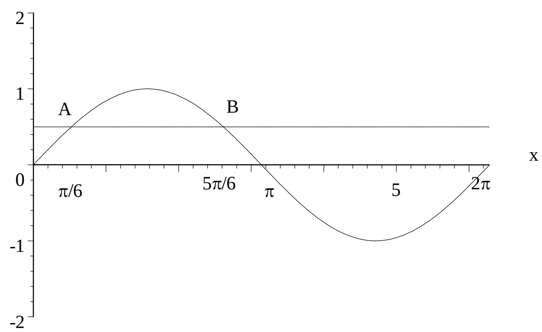
Dengan mengunakan grafik fungsi $f(x) = \cos x$ dan $g(x) = ½$ dapat ditunjukkan ada dua titik potong dalam satu periode dengan absis $\pi/3$ dan $-\pi/3$. Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa bila $\cos x = t$ dengan $-1 \le x \le 1$, dan $\cos \alpha = t$, maka $x = \alpha + 2k\pi$ atau $x = - \alpha + 2k\pi$.



Gambar 10.8

Pertidaksamaan Trigonometri

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan trigonometri, dapat menggunakan grafik fungsi trigonometri yang bersesuaian. Sebagai contoh, untuk menentukan himpunan penyelesaian sin x < ½ untuk $0 \le x \le 2\pi$ dapat menggunakan grafik f(x) = sin x dan g(x) = ½ sperti Gambar 10.9 berikut.



Gambar 10.9

Grafik f yang terletak di bawah ½ sebelah kiri titik A dan sebelah kanan titik B, memiliki absis $0 < x < \pi/6$ atau $5\pi/6 < x < 2\pi$.

Latihan.

Menggunakan komputer atau kalkulator grafik, buatlah sketsa grafik

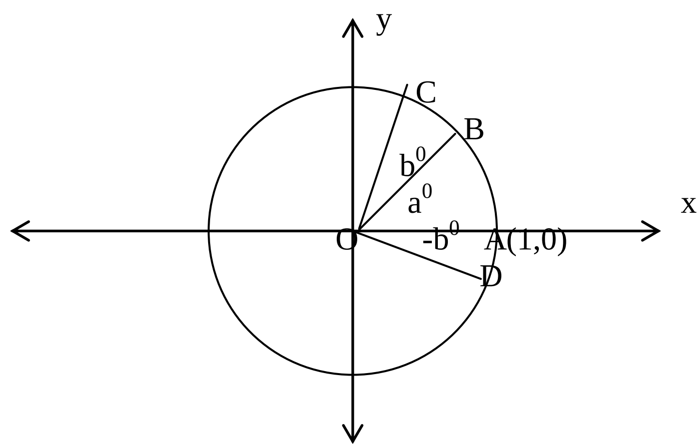
1. sin 2x, sin ½ x, 2 sin x, sin (x - ¼ π)
2. cos 2x, cos ½ x, 2 cos x, cos (x - ¼ π)
3. Turunkan rumus untuk menyelesaikan persamaan tan x = tan α
4. Gunakan grafik untuk menyelesaiakan $1 + 2 \sin 2x \le 0$ untuk $0 \le x \le 2\pi$

10.4 Rumus-Rumus Penjumlahan

a. Rumus-rumus untuk cos (a + b)^0 dan cos (a – b)^0

Kita sudah mengetahui bahwa sin 30^0 = ½ , sin 45^0 = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, cos 30^0 = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dan cos 45^0 = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dapat kita menentukan cos 750 dan cos 150 tanpa menggunakan tabel ataupun kalkulator? Tentu saja kita bisa asalkan kita memiliki rumus cos (a + b)^0 dan cos (a – b)^0, karena cos 75^0 = cos (45+30)^0 dan cos 15^0 = cos (45 -30)^0

Perhatikan Gambar 10.10., lingkaran yang berjari-jari 1, dan A(1,0).
Misalkan $\angle$ AOB = a^0, dan $\angle$ BOC = b^0 maka $\angle$ AOC = (a + b)^0 dan $\angle$ BOD = (a + b)^0



Gambar 10.10

OA = OB = OC = OD = r = 1 satuan, dan berdasarkan definisi maka B(cos a^0, sin a^0) ?

Misalkan B(x_1,y_1) dan $\angle$ AOB = a^0, maka cos a^0 = $\frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{OB} = \frac{x_1}{1} = x_1$, dan

sin a^0 = $\frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{OB} = \frac{y_1}{1} = y_1$, sehingga B(cos a^0, sin a^0). Dengan cara yang sama diperoleh C(cos (a+b)^0, sin (a+b)^0) dan D(cos -b^0, sin -b^0) atau D(cos b^0, -sinb^0).
Ukuran sudut pusat $\angle$ AOC = ukuran sudut pusat $\angle$ BOD, maka panjang tali busur AC = panjang tali busur BD dan AC^2 = BD^2.
Masih ingat rumus jarak? Jika P(x_1,y_1) dan Q(x_2,y_2), maka PQ = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$ selanjutnya PQ^2 = $(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2$
Perhatikan A(1,0) dan C(cos (a+b)^0, sin (a+b)^0),
maka AC^2 = (cos (a+b)^0 – 1)^2 + (sin (a+b)^0 – 0)^2 = (cos (a+b)^0 – 1)^2 + (sin (a+b)^0)^2
= cos^2 (a+b)^0 – 2 cos (a+b)^0 +1 + sin ^{2} (a+b)^0 .
= [cos^2 (a+b)^0 + sin ^{2} (a+b)^0].– 2 cos (a+b)^0 +1

$= 1 - 2\cos(a+b)^0 + 1$
$= 2 - 2\cos(a+b)^0$.

Perhatikan $B(\cos a^0, \sin a^0)$ dan $D(\cos b^0, -\sin b^0)$, maka

$BD^2 = (\cos b^0 - \cos a^0)^2 + (-\sin b^0 - \sin a^0)^2$
$= (\cos^2 b^0 - 2\cos a^0 \cos b^0 + \cos^2 a^0) + (\sin^2 b^0 + 2\sin a^0 \sin b^0 + \sin^2 a^0)$
$= (\sin^2 b^0 + \cos^2 b^0) + (\sin^2 a^0 + + \cos^2 a^0) - 2(\cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0)$
$= 1 + 1 - 2(\cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0)$
$= 2 - 2(\cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0)$

$AC^2 = BD^2 \Rightarrow 2 - 2\cos(a+b)^0 = 2 - 2(\cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0)$
$\Rightarrow -2\cos(a+b)^0 = -2(\cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0)$
$\Rightarrow \cos(a+b)^0 = \cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0$

$\mathbf{\cos(a+b)^0 = \cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0}$

Dengan mengganti b dengan –b diperoleh

$\mathbf{\cos(a-b)^0 = \cos a^0 \cos b^0 + \sin a^0 \sin b^0}$

Latihan

1. Diketahui sin A = 2/5 dan sin B = 7/25 . Sudut-sudut A dan B lancip. Buktikanlah bahwa cos (A + B) = 3/5
2. Diketahui tan x = 12/5 dan tan y = 4/3 . Hitunglah nilai cos (x – y) dan cos (x + y) dengan menganggap x dan y sudut lancip.
3. Buktikanlah : $\cos(270 + a)^\circ = \sin a^\circ$
4. Buktikan : $\cos A + \cos(A + 2/3\,\pi) + \cos(A + 4/3\,\pi) = 0$
5. Buktikanlah: $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 2[1 + \cos(x + y)]$

2. Rumus-rumus untuk $\sin(a + b)^0$ dan $\sin(a - b)^0$

Bagaimana untuk menentukan nilai $\sin 75^0$? Kita perlu rumus $\sin(a + b)^0$, dan diturunkan seperti berikut.

Telah kita ketahui relasi pada pendahuluan bahwa $\cos(90 - a)^0 = \sin a^0$, akibatnya

$\cos(90 - (a+b))^0 = \sin(a + b)^0 \Leftrightarrow \cos((90 - a) - b)^0 = \sin(a + b)^0$

atau $\sin(a + b)^0 = \cos((90 - a) - b)^0$

Menurut rumus $\cos(a - b)^0 = \cos a^0 \cos b^0 + \sin a^0 \sin b^0$, maka

$\sin(a + b)^0 = \cos((90 - a) - b)^0 = \cos(90-a)^0 \cos b^0 + \sin(90-a)^0 \sin b^0$
$= \sin a^0 \cos b^0 + \cos a^0 \sin b^0$

[karena $\cos(90 - a)^0 = \sin a^0$ dan $\sin(90 - a)^0 = \cos a$]

$\mathbf{\sin(a + b)^0 = \sin a^0 \cos b^0 + \cos a^0 \sin b^0}$
dan $\mathbf{\sin(a - b)^0 = \sin a^0 \cos b^0 - \cos a^0 \sin b^0}$

Latihan

1. Diketahui tg P = ¾ dan tg Q = 7/24. Hitunglah nilai sin (P + Q) dan sin (P – Q) dengan menganggap bahwa P dan Q sudut-sudut lancip.
2. Buktikan: sin A + sin (A + 2/3 π) + sin (A + 4/3 π) = 0
3. Diketahui 2 cos (30 + t) ° = cos (30 – t) °. Buktikanlah bahwa tan t = 1/ √ 3 dan kemudian tentukanlah t untuk 0° < x < 360°
4. Dari sin (x + 45) ° + 2 cos (x + 45) ° = 0, tentukanlah persamaan dalam tan x. Kemudian tentukanlah x untuk 0° < x < 360°.

3. Rumus-rumus untuk tan $(a + b)^0$ dan tan $(a – b)^0$

$$\tan (a+b)^0 = \frac{\sin(a+b)^0}{\cos(a+b)^0} = \frac{\sin a^0 \cos b^0 + \cos a^0 \sin b^0}{\cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0} = \frac{\dfrac{\sin a^0 \cos b^0 + \cos a^0 \sin b^0}{\cos a^0 \cos b^0}}{\dfrac{\cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0}{\cos a^0 \cos b^0}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin a^0}{\cos a^0} + \dfrac{\sin b^0}{\cos b^0}}{1 - \dfrac{\sin a^0 \sin b^0}{\cos a^0 \cos b^0}} = \frac{\tan a^0 + \tan b^0}{1 - \tan a^0 \tan b^0}$$

$$\tan (a + b)^0 = \frac{\tan a^0 + \tan b^0}{1 - \tan a^0 \tan b^0}$$

$$\tan (a-b)^0 = \frac{\sin(a-b)^0}{\cos(a-b)^0} = \frac{\sin a^0 \cos b^0 - \cos a^0 \sin b^0}{\cos a^0 \cos b^0 + \sin a^0 \sin b^0} = \frac{\dfrac{\sin a^0 \cos b^0 - \cos a^0 \sin b^0}{\cos a^0 \cos b^0}}{\dfrac{\cos a^0 \cos b^0 + \sin a^0 \sin b^0}{\cos a^0 \cos b^0}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin a^0}{\cos a^0} - \dfrac{\sin b^0}{\cos b^0}}{1 + \dfrac{\sin a^0 \sin b^0}{\cos a^0 \cos b^0}} = \frac{\tan a^0 - \tan b^0}{1 + \tan a^0 \tan b^0}$$

$\tan (a - b)^0 = \dfrac{\tan a^0 - \tan b^0}{1 + \tan a^0 \tan b^0}$

Catatan:

Untuk sudut-sudut yang di ukur dengan derajat terdapat rumus-rumus yang bentuknya sama.

Contoh 3.5:
Tunjukkanlah bahwa: tan $15^0 = 2 - \sqrt{3}$

Jawab:

$$\tan 15° = \tan (45 - 30)° = \frac{\tan 45^0 - \tan 30^0}{1 + \tan 45^0 \tan 30^0} = \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + 1.\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(3 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

Latihan

1. Diketahui: cos P = 5/13 dan sin Q = 4/5. Tentukanlah nilai tan (P + Q) jika P dan Q sudut-sudut lancip.
2. Diketahui: sin a = 3/5, tan y = 1/7. sudut-sudut x dan y lancip. Buktikanlah tanpa daftar x + y = ¼ π
3. Buktikan: $\tan (1/4\, \pi + a) = \dfrac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$
4. Pakailah rumus tan (a + b) untuk membuktikan jika a + b = ¼ π, maka (1 + tan a)(1 + tan b) = 2
5. Jika 2x + y = ¼ π buktikan $\tan 2x = \dfrac{1 - \tan y}{1 + \tan y}$

4. Rumus-rumus untuk Sudut 2a dan Pemakaiannya

(i). sin 2a = sin(a + a) = sin a cos a + cos a sin a = 2 sin a cos a.
Jadi: **sin 2a = 2sin a cos a**

(ii). $\cos 2a = \cos (a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2 \cos^2 a - 1$
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$

Jadi **:cos 2a = cos^{2}a – sin^{2}a = 2cos^{2}a – 1 = 1 – 2sin^{2}a**

Perhatikanlah bahwa pada rumus-rumus kosinus maka kosinusnya terdapat lebih dahulu:

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$= 2 \cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2 \sin^2 a$$

(iii). $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos 2a)$

$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a \quad \Rightarrow \quad \sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos 2a)$

(iv). $\tan 2a = \tan (a + a) \quad = \dfrac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a . \tan a} = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Jadi: **tan 2a =** $\dfrac{2\,\mathbf{tan}\, a}{1 - \mathbf{tan}^2\, a}$

Catatan:

Untuk sudut-sudut yang diukur dengan derajat terdapat rumus-rumus yang bentuknya sama dengan rumus-rumus tersebut.

Contoh 3.6
Bila $\cos x^0 = 4/5$ untuk $0 \le x \le 90$, hitung $\cos 2x^0$
$\cos 2x^0 = 2 \cos^2 x - 1 = 2(4/5)^2 - 1 = 32/25 - 1 = 7/25$

Latihan

1. Diketahui sin A = 3/5 dengan $0 < A < \frac{1}{2}\pi$. Hitunglah sin 2A, cos 2A, dan tg 2A
2. Diketahui: tg B = ½ dengan $0 < B < \frac{1}{2}\pi$. Hitunglah tg 2B, cos 2B, dan sin 2B
3. Nyatakanlah berikut ini dalam sinus, kosinus, atau tangen yang tunggal:
   a. $2 \sin p \cos p$
   b. $2 \cos^2 n - 1$
   c. $1 - 2 \cos^2 x$
   d. $\dfrac{2 \tan 50^0}{1 - \tan^2 50^0}$
   e. $1 - 2 \sin^2 p$
   f. $\cos^2 5° - \sin^2 5°$
   g. $\dfrac{2 \tan k}{1 - \tan^2 k}$
   h. $2 \sin 35 \ \cos 35$

4. Sederhanakanlah dulu dengan rumus, kemudian hitunglah nilainya:
   a. $2 \sin 15° \cos 15°$
   b. $2 \cos^2 30° – 1$
   c. $\cos 1/6\ \pi - \sin 2\ 1/6\ \pi$
   d. $\sin ¼\ \pi \cos ¼\ \pi$

5. Manakah yang benar atau salah:
   a. $\cos 2x = \cos^2 x + \sin^2 x$
   b. $\sin x = 2 \sin ½ x° \cos ½ x$
   c. $\operatorname{tg} 4x = \dfrac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x}$
   d. $\cos (x + y) = \cos x + \cos y$
   e. $\sin (x – y) = \sin x – \sin y$
   f. $\tan (x + y) = \tan x + \tan y$

B. Perkalian dan Penjumlahan Kosinus dan Sinus

Sebelumnya kita telah menurunkan dan menggunakan rumus jumlah berikut ini.

$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ………………. (1)

$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ ………………... (2)

$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ ……………….. (3)

$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ ………………... (4)

1. Perkalian Kosinus dan Perkalian Sinus

Dari rumus (1) dan (2), dengan jalan menjumlahkan, kita dapatkan

$$\begin{array}{l} \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \end{array} +$$

atau **$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$**

Dalam rumus itu bentuk perkalian kita nyatakan dalam bentuk jumlah dari kosinus.

Contoh 3.7. $2 \cos 43^0 \cos 35^0 = \cos (43 + 35)^0 + \cos (43 – 35)^0$
$= \cos 78^0 + \cos 8^0$

Contoh 3.8**.** $2 \cos 65^0 \cos 25^0 = \cos (65 + 25)^0 + \cos (65 – 25)^0$
$= \cos 90^0 + \cos 40^0$
$= 0 + \cos 40^0$

$= \cos 40^0$

Contoh 3.9 $\cos 2\theta \cos \theta = ½ (\cos 3\theta + \cos \theta)$

Bila rumus (2) dikurangi rumus (1) diperoleh

$$\begin{array}{ll} \cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta & \\ \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \\ \hline \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta & - \end{array}$$

atau **$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) – \cos (\alpha + \beta)$**

Contoh 3.10. $2 \sin 47 \sin 14 = \cos (27 – 14) – \cos (27 + 14)$
$= \cos 13 – \cos 41$

Contoh 3.11. $2 \sin 1/3 \ \pi \sin 1/6 \ \pi = \cos 1/6 \ \pi - \cos ½ \ \pi$
$= ½ \sqrt{3} – 0$
$= ½ \sqrt{3}$

Latihan

2. Perkalian Kosinus dan Sinus

Bila rumus (3) dan (4) dijumlahkan, diperoleh

$$\begin{array}{ll} \sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \\ \sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta & \\ \hline \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta & + \end{array}$$

atau **$2 \text{ sins } \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$**

Bila rumus (3) dikurangi (4), diperoleh

$$\begin{array}{ll} \sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \\ \sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta & \\ \hline \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta & – \end{array}$$

atau **$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)$**

Contoh 3.12:
Nyatakan $2 \sin 41^0 \cos 47^0$ sebagai jumlah atau selisih sinus.

Dengan rumus 2 sins α cos β = sin ($\alpha + \beta$) + sin ($\alpha - \beta$) diperoleh
$2 \sin 41^0 \cos 47^0 = \sin 88^0 + \sin (-6)^0 = \sin 88^0 - \sin 6^0$

Dengan rumus 2 cos α sin β = sin ($\alpha + \beta$) - sin ($\alpha - \beta$) diperoleh
$2 \sin 41^0 \cos 47^0 = 2 \cos 47^0 \sin 41^0 = \sin 88^0 - \sin 6^0 = \sin 88^0 - \sin 6^0$

Latihan

1. Buktikan bahwa $2 \sin (1/4\ \pi + \alpha) = \sin (1/4\ \pi + \alpha) = \cos 2\alpha$
2. Buktikan bahwa $4 \sin 18 \cos 36 \sin 54 = 1 + 2 \sin 18 - \cos 36$

Tampaklah sekarang pentingnya mengingat-ingat keempat rumus tadi, yaitu :

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$$
$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha - \beta)$$
$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$$
$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)$$

3. Jumlah dan Selisih

Dari bagian A telah diketahui:

$$\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$
$$\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$
$$\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$
$$\cos (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

Misal $\alpha + \beta = C$ maka $\alpha = ½ (C + D)$, dan misal $\alpha - \beta = D$ maka $\beta = ½ (C - D)$. Dengan mensubsitusi α dan β diperoleh :

$$\mathbf{\cos C + \cos D = 2 \cos ½ (C + D) \cos ½ (C - D)}$$
$$\mathbf{\cos C - \cos D = -2\ sinn\ ½ (C + D) \sin ½ (C - D)}$$
$$\mathbf{\sin C + \sin D = 2 \sin ½ (C + D) \cos ½ (C - D)}$$
$$\mathbf{\sin C - \sin D = 2 \cos ½ (C + D) \sin ½ (C - D)}$$

C. Identitas dan Persamaan Trigonometri

1. Identitas

Contoh 3.14:

Buktikan identitas:

(i) $2 \cos a (\cos \tfrac{1}{2} a + \sin \tfrac{1}{2} a)^2 = 2 \cos a + \sin 2a$

(ii) $\dfrac{1-\cos 2a}{\sin 2a} = \tan a$

Bukti:

(i). Ruas kiri $= 2 \cos a (\cos^2 \tfrac{1}{2} a + 2 \cos \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} a + \sin^2 \tfrac{1}{2} a)$
$= 2 \cos a (1 + \sin a)$
$= 2 \cos a + 2 \cos a \sin a$
$= 2 \cos a + \sin 2 a$
= ruas kanan

(ii). Ruas kiri $= 1 - (1 - 2 \sin^2 a)$
$= \dfrac{2\sin^2 a}{2\sin a.\cos a}$
$= \dfrac{\sin a}{\cos a}$
$= \tan a$
= ruas kanan

Latihan

Buktikanlah identitas berikut ini:

1. $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + \sin 2a$
2. $(\cos a - \sin a)^2 = 1 - \sin 2a$
3. $(\cos a + \sin a)(\cos a - \sin a) = \cos 2a$
4. $\cos^4 b - \sin^4 b = \cos 2b$
5. $(2 \cos b - 1)(2 \cos b + 1) = 2 \cos 2b + 1$
6. $(\cos \tfrac{1}{2} b - \sin \tfrac{1}{2} b)^2 = 1 - \sin b$
7. $\dfrac{\sin 2a}{1+\cos 2a} = \tan a$
8. $\dfrac{1-2\cos 2a}{1+\cos 2a} = \tan^2 a$
9. $\dfrac{2\tan b}{1+\tan^2 b} = \sin 2b$
10. $\dfrac{1-\tan^2 b}{1+\tan^2 b} = \cos 2b$
11. Dengan memakai $\cos 4a = 2 \cos^2 2a - 1$ dan $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$, buktikanlah $\cos 4a = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1$

12. Dengan cara seperti soal no. 11, nyatakanlah cos 4a dalam perpangkatan dari sin a
13. a. Dengan memakai $\sin^2 A = ½ (1 – \cos 2a)$ buktikanlah bahwa
    $\cos^4 a = ¼ + ½ \cos 2a + ¼ \cos^2 2a$
    b. Kemudian tunjukkanlah bahwa : $\cos^4 b = 3/8 + ½ \cos {}^2 b + 1/8 \cos {}^4 b$

14. a. Dengan memakai $\sin^2 A = ½ (1 – \cos 2A)$ nyatakanlah sin 4 A dalam bentuk
    $a + b \cos {}^2 A + c \cos^2 2A$
    b. Kemudian nyatakanlah $\sin^4 p$ dalam bentuk $d + e \cos {}^2 p + f \cos {}^4 p$

15. Nyatakanlah $\sin^2 p \cos^2 p$ dalam bentuk $a + b \cos {}^4 p$
16. Dengan menyatakan 3A sebagai 2A + A buktikan :
    a. $\cos 3A = 4 \cos^3 A – 3 \cos A$
    b. $\sin 3A = 3 \sin A – 4 \sin^3 A$
17. Buktikan bahwa :
    a. $\dfrac{\sin 4\theta + \sin 2\theta}{\cos 4\theta + \cos 2\theta} = \text{tg } 3\theta$ b. $\dfrac{\cos 3\theta - \cos 5\theta}{\sin 3\theta - \sin \theta} = 2 \sin 2\theta$

18. Jika $x = \sin 3\theta + \sin \theta$ dan $y = \cos 3\theta + \cos \theta$, buktikan :
    a. $x + y = 2 \cos \theta (\sin 2\theta + \cos 2\theta)$
    b. $x/y = \tan 2\theta$
    c. $x^2 + y^2 = 2 + 2 \cos 2\theta$
19. a. Buktikan $\dfrac{\cos 2x – \cos 4x}{\text{Sin } 2x \ \sin 3x} = \dfrac{1}{\cos x}$ $x \neq 0, 60, 90, 120, 180, ….$

    b. Carilah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan :
    $$\frac{\cos 2x – \cos 4x}{\sin 3x \ \sin 3x} < \frac{1}{\cos x} , \quad \text{untuk } 0 < x < 60$$

20. Jika $\sin \alpha + \sin \beta = k$ dan $\cos \alpha + \cos \beta = m$, buktikan:
    a. $k + m = 2 \cos ½ (\alpha - \beta) [\sin ½ (\alpha + \beta) + \cos ½ (\alpha + \beta)]$
    b. $k = m \tan ½ (\alpha + \beta)$
    c. $k^2 + m^2 = 2 [1 + \cos (\alpha - \beta)] = 4 \cos^2 ½ (\alpha - \beta)$

2. Persamaan Trigonometri

Contoh 3.15:

Selesaikanlah persamaan $\cos 2x° + \sin x° = 0$, jika $x \in R$ dan $0° \leq x \leq 360°$

Jawab:

$$\cos x° + \sin x° = 0$$

$\Rightarrow$ $1 - 2 \sin^2 x° + \sin x° = 0$
$\Rightarrow$ $2 \sin^2 x° - \sin x° - 1 = 0$
$\Rightarrow$ $(\sin x° - 1)(2 \sin x° + 1) = 0$
$\Rightarrow$ $\sin x° = 1$ atau $-\frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ $x = 90°$; $210°$; atau $330°$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{ 90°, 210°, 330° \}$

Latihan

Selesaikanlah persamaan berikut untuk $0 \leq x \leq 360$ dan $x \in R$

1. $\sin 2x° + \sin x° = 0$
2. $\sin 2x° - \cos x° = 0$
3. $\cos 2x° - \cos x° = 0$
4. $\cos 2x° - \sin x° = 0$
5. $\cos 2x° - 3 \cos x° + 2 = 0$
6. $\cos 2x° - 3 \sin x° - 1 = 0$
7. $\cos 2x° - 4 \sin x° + 5 = 0$
8. $\cos 2x° - \sin x° - 1 = 0$
9. $\cos 2x° + 5 \cos x° - 2 = 0$
10. $\cos 2x° + 3 \cos x° + 2 = 0$
11. $\cos 2x° + \cos x° = 0$
12. $5 \cos 2x° - \cos x° = 0$
13. $3 \sin 2x° + 5 \cos x° = 0$
14. $6 \cos 2x° - 5 \cos x° + 4 = 0$
15. $4 \cos 2x° - 2 \sin x° = 0$
16. $5 \cos 2x° + 7 \sin x° + 7 = 0$

Selesaikanlah persamaan berikut untuk $0 \leq a \leq 2\pi$ dan $a \in R$

17. $\sin 2a - \sin a = 0$
18. $\sin 2a + \cos a = 0$
19. $\cos 2a + \cos a = 0$
20. $\cos 2a + \sin a = 0$

Latihan Tambahan

1. Carilah nilai maksimum dan minimum dari :
   a. sin x b. cos x c. 2 sin x d. 3 cos x e. sin 2x

2. Nyatakan 2 cos (x + 45) cos (x – 45) sebagai jumlah atau selisih, dan kemudian carilah nilai maksimum dan minimum dari perkalian itu.
3. Ulangi soal no. 2 untuk :
   a. 2 cos (x + 30) cos (x – 30) b. $2 \sin (\theta + \frac{3}{4}\pi) \sin (\theta - \frac{3}{4}\pi)$

4. Sederhanakan: 2 cos 50 cos 40 – 2 sin 95 sin 85
5. Buktikan: $2 \sin 3\alpha \sin 4\alpha + 2 \cos 5\alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha = \cos \alpha$
6. Buktikan: $(2 \sin \frac{1}{2}\theta \cos 3/2\,\theta) + (2 \sin 5/2\,\theta + \sin 3/2\,\theta) - (2 \sin 3/2\,\theta \cos 7/2\,\theta) = \sin 4\theta + \sin 5\theta$
7. Buktikan: $\sin 3\beta + (\cos\beta + \sin\beta)(1 - 2 \sin 2\beta) = \cos 3\beta$
8. Dengan tidak menggunakan table, buktikan:
   Sin 52 sin 68 – sin 47 cos 77 – cos 65 cos 81 = ½
9. Nyatakan $\sin \alpha \sin 3\alpha$ dalam bentuk selisih kosinus. Kemudian carilah jumlah 6 suku pertama dari deret:
   $\sin \alpha \sin 3\alpha + \sin 2\alpha \sin 6\alpha + \sin 4\alpha \sin 12\alpha + \ldots$

10. Carilah 6 suku pertama deret:
    $\cos 96\alpha \sin 32\alpha + \cos 48\alpha \sin 16\alpha + \cos 24\alpha \sin 8\alpha + \ldots.$