BAB 3

FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

Standar Kompetensi:

Menentukan komposisi dua fungsi dan invers suatu fungsi

Kompetensi Dasar:

1. Menentukan komposisi fungsi dari dua fungsi
2. Menentukan invers suatu fungsi

Dalam matematika, konsep fungsi berikut operasinya merupakan konsep yang sangat penting. Konsep fungsi bersama-sama turunan fungsi sangat aplikatif dalam memecahkan masalah-masalah ekonomi. Untuk memecahkan masalah ekonomi, biasanya dibuat pemodelan matematika fungsi aljabar.

Soal Apersepsi

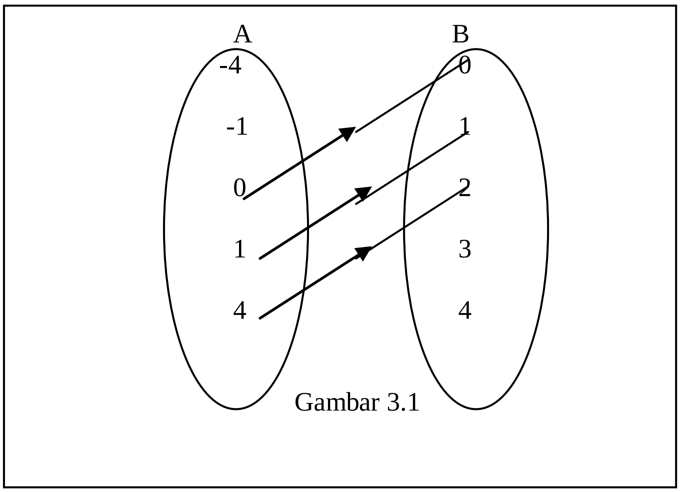
1. Jika A = { 1, 2, 3, 4, 5} dan B = {0, 1, 4, 9, 16}
   Tuliskan sebuah contoh relasi dan sebuah sebuah contoh pemetaan (fungsi) dari A ke B untuk membedakan relasi dan fungsi.
2. Ada berapa cara menyatakan suatu relasi atau fungsi? Sebutkan!
3. Melalui contoh, jelaskan arti dari domain, kodomain, dan range (daerah hasil).
4. Jika f(x) = 3x-5, tentukan f(3) dan f(2a).

A. Fungsi dan Macam-macam Fungsi

1. Relasi , Fungsi, Korespondensi Satu-satu

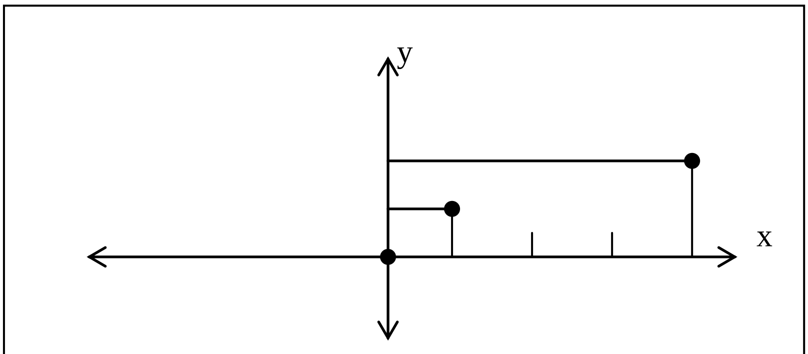
Relasi

Misalkan A dan B dua himpunan yang tidak kosong, maka A memiliki *hubungan (relasi)* dengan B, apabila ada anggota A yang *berkorespondensi* (*dikawankan/dipasangkan)* dengan anggota B. Relasi dua himpunan A dan B ini dapat disajikan melalui diagram panah, grafik, himpunan pasangan berurutan atau aturan pemasangan melalui kata-kata (deskripsi) atau ekspresi matematika. Sebagai contoh, misalkan A = {-4, -1, 0 ,1, 4,} dan B= {0, 1, 2, 3, 4} dengan perkawanan anggota-anggota A ke B seperti dilustrasikan melalui diagram panah pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1

Himpunan A berelasi dengan himpunan B, karena ada anggota A yang berkorespondensi dengan anggota B, $0 \in A$ *berkorespondensi (dikawankan)* dengan $0 \in B$, $1 \in A$ *berkorespondensi* dengan $1 \in B$, dan $4 \in A$ *berkorespondensi* dengan $2 \in B$. Aturan relasi dari A ke B tersebut adalah *akar pangkat dua dari*, atau $y = \sqrt{x}$. Relasi tersebut dapat dinyatakan himpunan pasangan berurutan ditulis $\{(x,y): \ y = \sqrt{x},\ x \in A,\ y \in B\} = \{(0,0), (1,1), (4,2)\}$.. Relasi tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk grafik seperti Gambar 3.2.

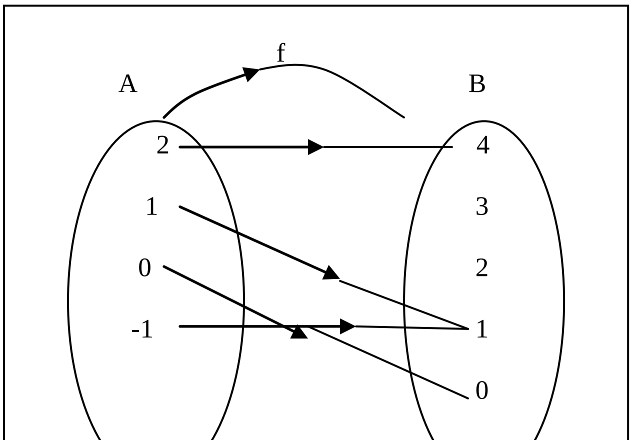


Gambar 3.2

Fungsi

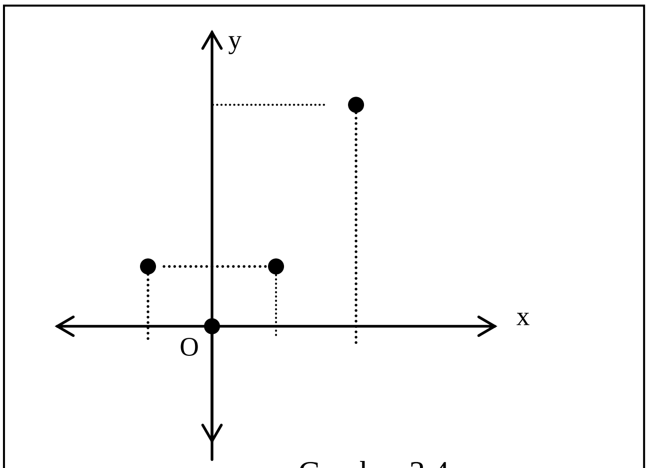
Fungsi dari himpunan A ke himpunan B merupakan relasi khusus dari A ke B. Fungsi dari A ke B disebut pula pemetaan dari A ke B. Himpunan A pada pemetaan A ke B disebut domain, sedangkan B disebut kodomain. Himpunan unsur dari B yang menjadi kawan unsur-unsur A disebut daerah hasil atau range.

Sebagai contoh, perhatikan relasi dari A ke B, dengan A = {-1, 0, 1, 2}, dan B = {0, 1, 2, 3, 4} dengan aturan perkawanan f: $x \rightarrow x^2$ atau dinyatakan sebagai $f(x) = x^2$. Relasi ini dapat digambarkan sebagai diagram panah pada Gambar 3.3. Relasi ini merupakan sebuah fungsi. Himpunan A disebut *daerah asal (domain),* B disebut *daerah kawan (kodomain*), dan $\{0, 1, 4\} \subset B$ merupakan *daerah hasil (range)* dari fungsi f.



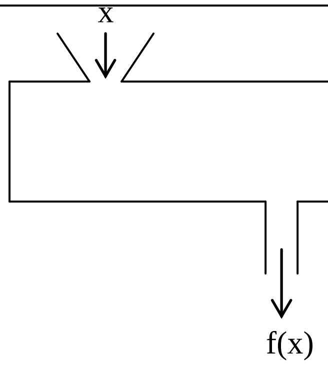
Gambar 3.3.

Fungsi f tersebut dapat disajikan dalam bentuk grafik Kartesius seperti pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4

Sebuah fungsi dapat dapat dianggap sebagai suatu mesin, yang memiliki masukan dan keluaran. Masukannya merupakan anggota domain, dan himpunan semua keluaran merupakan daerah hasil (range). Dengan demikian f yang memetakan x ke f(x) memiliki masukan x dan keluaran f(x), seperti diilustrasikan pada Gambar 3.5.

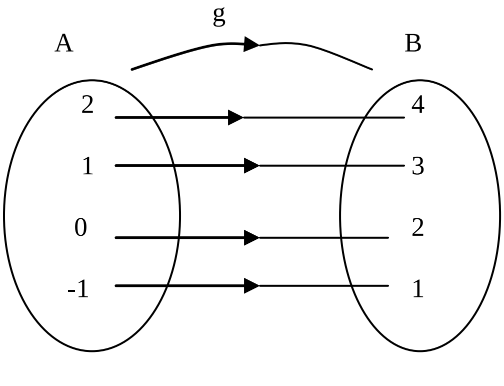


Gambar 3.5

Misalkan fungsi f dengan aturan $f(x) = x^2 + 1$, jika masukannya x = 3 maka keluarannya $f(3) = 3^2 + 1 = 10$, jika masukannya x = -2, maka keluarannya adalah $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$, dan seterusnya.

Korespondensi satu-satu

Misalkan A={-1, 0, 1, 2} dan B = { 1, 2, 3, 4}, g merupakan pemasangan dari A ke B dengan aturan g(x) = x + 2. Relasi dari A ke B dapat diilustrasikan melalui diagram panah pada Gambar 6.6. Relasi tersebut merupakan suatu pemetaaan atau fungsi, juga sebaliknya relasi dari B ke A juga merupakan sebuah pemetaan. Korespondensi antara A dan B yang demikian disebut *korespondensi satu-satu.*



Gambar 3.6.

Misalkan A dan B dua himpunan yang kedua-duanya tidak kosong. Perhatikan Tabel 1.1 di bawah ini. Agar terjadi relasi dari A ke B hanya diperlukan syarat nomor 1 saja. Sedangkan agar terjadi fungsi dari A ke B harus memnuhi syarat nomor 2, dan nomor 3. Akan tetapi jika nomor 2 dipenuhi, maka dengan sendirinya nomor 1 dipenuhi pula. Sedangkan untuk terjadinya korespondensi satu-satu antara A dan B perlu dipenuhi empat syarat yaitu nomor 2, 3, 4, dan 5.

Tabel 1.1
Kaitan antara Relasi, Fungsi dan Korespondensi Satu-satu
Dari Himpunan A ke Himpunan B

No.	Syarat-syarat	Relasi dari A ke B	Fungsi dari A ke B	Korespondensi satu satu antara A dan B
1.	Paling sedikit ada satu anggota A yang berpasangan dengan anggota B	√	√	√
2.	Setiap anggota A memiliki pasangan di B		√	√
3.	Tiap anggota A hanya memiliki satu pasangan di B		√	√
4.	Setiap anggota B memiliki pasangan di A			√
5.	Tiap anggota B hanya memiliki satu pasangan di A			√

Berdasarkan syarat-syarat tersebut dapat disimpulkan:

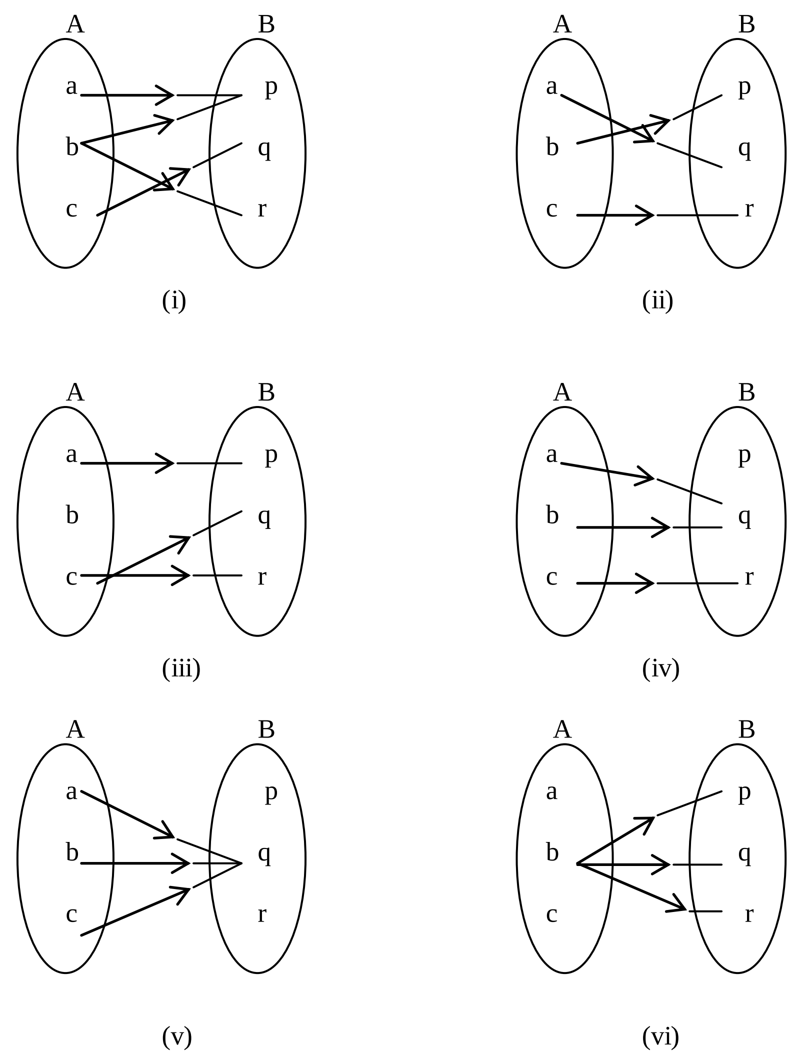
(i) Suatu fungsi merupakan suatu relasi

(ii) Suatu korespondensi satu-satu adalah suatu relasi

(iii) Suatu korespondensi satu-satu adalah suatu fungsi

Latihan 1.

1. Perhatikan relasi-relasi dari himpunan A = {a, b, c} ke himpunan B = {p, q, r } digambarkan pada Gambar 3.7.



Gambar 3.7.

a. Relasi (i) bukan fungsi sebab ……………………………………………

b. Relasi (ii) fungsi, sebab …………………………………………………..

c. Relasi (iii) yang mana merupakan pemetaan(fungsi)? Berikan alasan!

d. Manakah yang menunjukkan korespondensi satu-satu antara himpunan A dan B ? Berikan alasan !

2. Manakah pernyataan di bawah ini yang benar !

   a. Jika A ke B suatu pemetaan, maka daerah hasilnya sama dengan B.

   b. Jika A ke B suatu pemetaan, maka daerah hasilnya merupakan himpunan bagian dari B.

c. Jika A dan B berkorespondensi satu-satu, maka relasi dari B ke A juga merupakan suatu fungsi.

d. Jika A dan B berkorespondensi satu-satu, daerah hasil pemetaan dari A ke B adalah B.

3. Diketahui S = { -2,-1, 0, 1, 2}. Tuliskan relasi-relasi pada S sebagai pasangan berurutan dan grafik dari

   a. lebih dari   b. kurang dari

4. Diketahui $A = \{ x \mid -4 \leq x \leq 4, x \in \Re \}$ dan $f : A \rightarrow \Re$ ditentukan oleh $f(x) = x^2 - 9$. Gambarlah grafik f dan tentukan daerah hasil fungsi.

5. Diketahui $A = \{ x \mid -3 \leq x \leq 3, x \in \Re \}$ dan $f : A \rightarrow \Re$ ditentukan oleh $f(x) = x\,(x+2)(x-3)$.

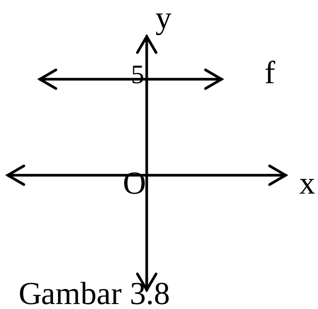
   a. Carilah pembuat nol dari f

   b. Hitunglah f (1), f(-1), f(3), f(-3)

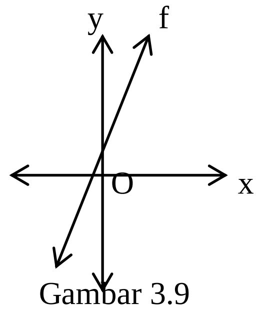
   c. Gambarlah grafik f dan tentukan daerah hasil f

2. Macam-macam Fungsi

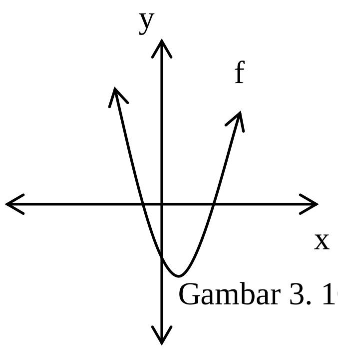
Kalian telah mengenal beberapa macam fungsi aljabar seperti, fungsi konstan, fungsi linear, fungsi kuadrat. Sebagai contoh, $f(x) = 5$ adalah fungsi konstan, $f(x) = 2x + 1$ adalah fungsi linear, dan $f(x) = x^2 - x - 2$ adalah fungsi kuadrat. Grafik dari masing-masing fungsi di atas adalah seperti berikut.



Gambar 3.8



Gambar 3.9



Gambar 3. 10

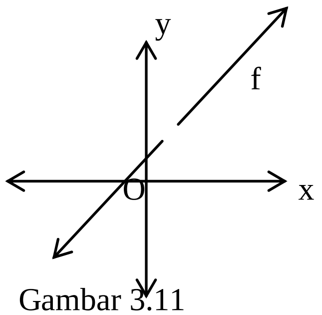
Ada macam-macam fungsi lain misalnya,

f(x) = $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ disebut fungsi rasional,

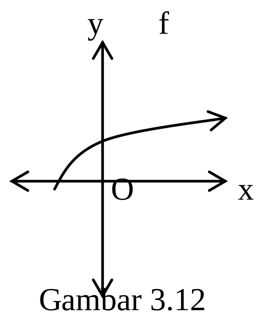
f(x) = $\sqrt{x+2}$ disebut fungsi akar,

f(x) = $|x|$ disebut fungsi nilai mutlak.

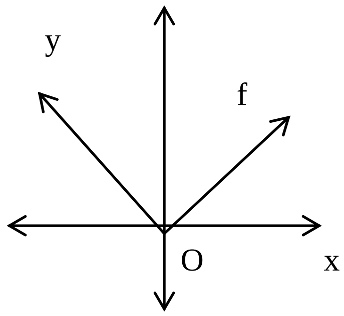
Grafik masing-masing fungsi tersebut adalah sebagai berikut.



Gambar 3.11



Gambar 3.12

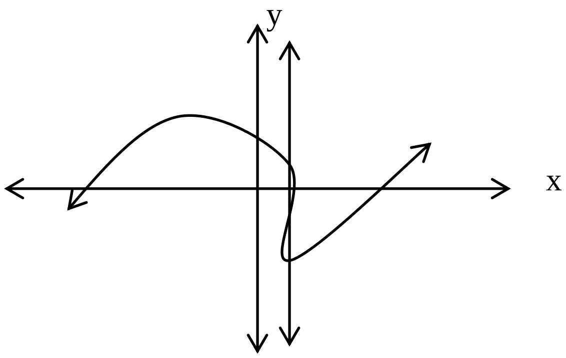


Gambar 3.13

Untuk memeriksa suatu kurva itu merupakan grafik fungsi, buatlah garis-garis yang sejajar dengan sumbu y, dan bila ada sebuah garis itu memotong kurva di dua titik atau lebih maka kurva itu bukan grafik fungsi. Sedangkan untuk memeriksa suatu kurva itu merupakan korespondensi satu-satu, buatlah garis-garis yang sejajar dengan sumbu y dan garis-garis sejajar sumbu x, selanjutnya bila ada sebuah garis itu memotong kurva di dua titik atau lebih maka kurva itu bukan korespondensi satu-satu.

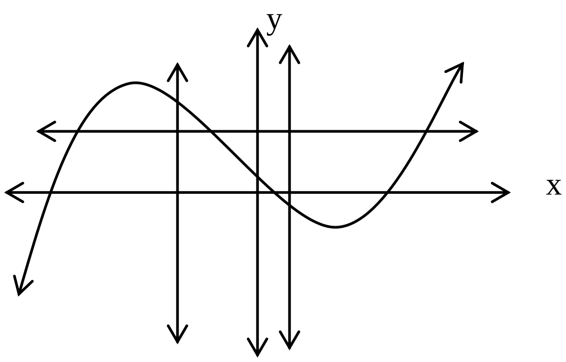
Contoh 3.1

Kurva pada Gambar 3.14, bukan grafik fungsi, sebab ada garis yang sejajar sumbu x memotong kurva di dua titik.



Gambar 3.14

Kurva pada Gambar 3.15, merupakan grafik fungsi, sebab tidak ada garis yang sejajar sumbu x yang memotong kurva di dua titik atau lebih, tetapi ada garis yang sejajar sumbu y memotong kurva di dua titik atau lebih.



Gambar 3.15

Latihan 2

1. Diberikan himpunan pasangan berurutan di bawah ini.

   A = { (-1,-5), (0,-3}, (-1,-1), (1,2), (3,3), (4,5)}

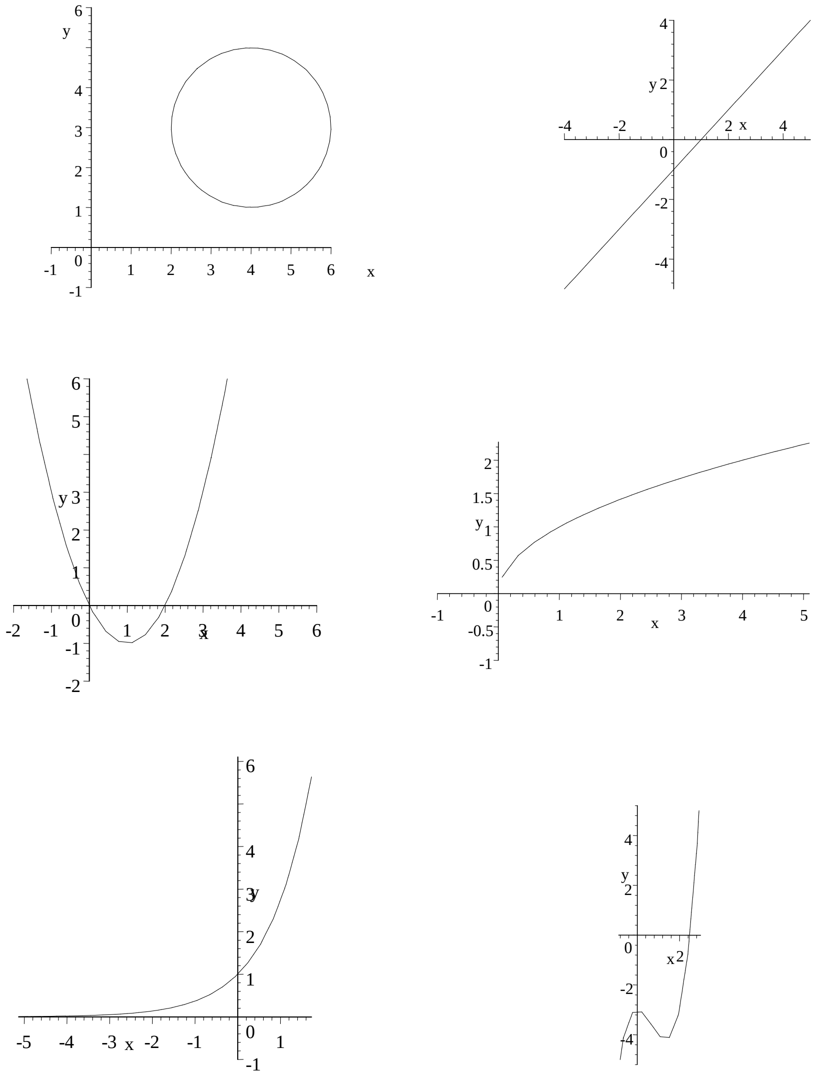
   B = { (-1,-5), (0,-3}, (1,-1), (2,1), (3,3), (4,5)}

   C = { (-5,-1), (-3,0}, (-1,1), (0,2), (1,1), (2,0)}

   D= {(0,0), (1,0), (2,0), (0,1),(1,1), (2,1), (0,2) }

   a. Himpunan manakah yang merupakan fungsi?
   b. Himpunan manakah yang merupakan korespondensi satu-satu ?

2. Perhatikan grafik-grafik pada Gambar 6.16 di bawah ini.



Gambar 3.16

a. Manakah yang merupakan grafik fungsi?

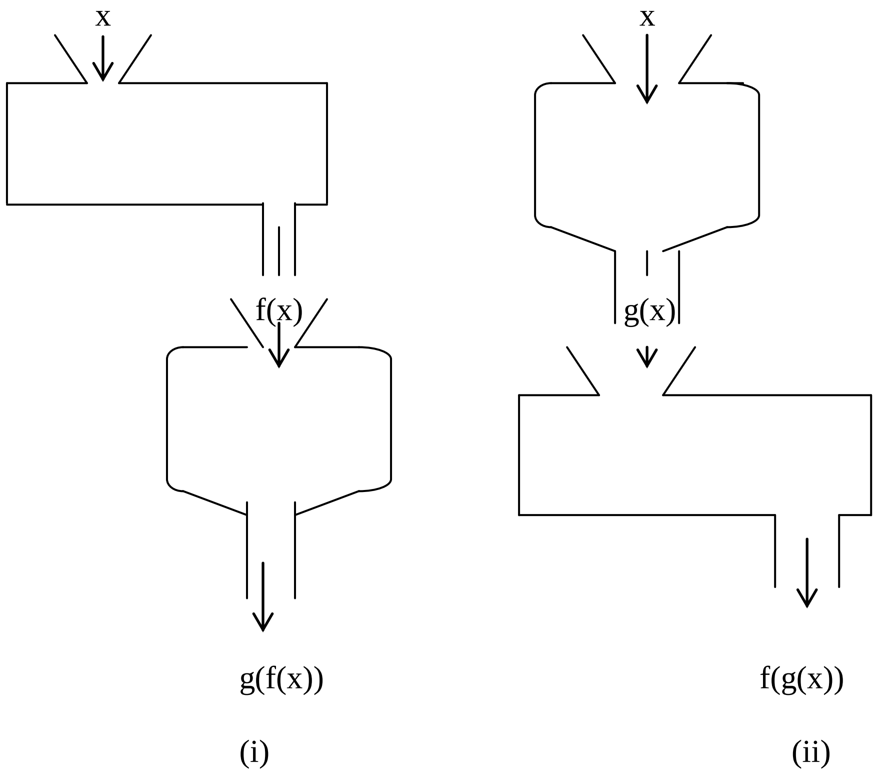
b. Manakah yang merupakan korespondensi satu-satu?

B. Fungsi Komposisi

1. Komposisi Fungsi

Tinjau fungsi-fungsi dengan domain dan kodomainnya berupa himpunan bagian dari bilangan real. Ada beberapa nama fungsi seperti fungsi konstan linear, kuadrat atau fungsi polinom, fungsi nilai mutlak, fungsi trigonometri, fungsi logaritma, fungsi eksponen dan lain sebagainya. Bila kita memiliki sebuah himpunan fungsi, maka kita dapat melakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada fungsi-fungsi itu. Misalnya f(x) = x^2 dan g(x) = 2, maka f(x) + g(x) = (f+g)(x) = x^2 + 2, f(x) - g(x) = (f-g)(x) = x^2 - 2, f(x).g(x) = (f.g)(x) = x^2.2 = $2x^2$ dan $\frac{f(x)}{g(x)} = (\frac{f}{g})(x) = \frac{x^2}{2}$.

Sekarang perhatikan apabila kita memiliki dua mesin fungsi f dan g bekerja secara berurutan, f dilanjutkan dengan g atau g dilanjutkan dengan f, seperti terlihat pada Gambar 3. 17.



Gambar 3.17

Misalkan f dan g berturut-turut memiliki aturan f(x) = x^2, g(x) = x-1. Berdasarkan Gambar 3.17(i), lengkapilah Tabel 2. Juga berdasarkan Gambar 3.17(ii), lengkapilah Tabel 3.2.

Tabel 3.2

x	f(x)	g(f(x))
-1		
0		
1		
2		
a		
c		
x		

Tabel 3.3

x	g(x)	f(g(x))
-1		
0		
1		
2		
a		
c		
x		

Perhatikan Tabel 3.2. dengan hanya memperhatikan kolom pertama dan ketiga saja (kolom kedua diabaikan) serta menganggap sebagai suatu mesin fungsi h, maka masukan fungsi h adalah x dan keluarannya adalah h(x) = g(f(x)). Selanjutnya h dikatakan sebagai *komposisi* f dan g, ditulis g o f. Sedangkan pada Tabel 3, h(x) = f(g(x)) merupakan komposisi g dan f ditulis f o g.

Definisi: (g o f)(x) = g(f(x)) dan (f o g)(x) = g(f(x)).

Contoh 3. 3
Tentukan gof dan fog bila f(x) = 2x -1 dan g(x) = x^2 -2
Jawab:
(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = $(2x-1)^2$ -2 = $4x^2$ -4x +1 -2 = $4x^2$ -4x -1
(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 -2) = 2(x^2-2) -1 = $2x^2$ - 4 - 1 = $2x^2$ - 5

Contoh 3. 4
Bila f(x) = 2x -1 dan g(x) = x^2 -2 , carilah (gof)(2)
Jawab:

Cara pertama adalah menentukan (gof)(2) adalah dengan menentukan terlebih dahuli (gof)(x). Pada contoh 3.1 telah diperoleh (gof)(x) = $4x^2 -4x -1$, kemudian mengganti x dengan 3 sehingga diperoleh (gof)(2) = $4(2)^2 – 4(2) -1 = 4.4 – 4.2 -1 = 16 – 8 -1 = 7$.

Cara kedua, karena (gof)(x) = g(f(x)), maka (gof)(2) = g(f(2)), maka pertama cari f(2) = 2.2 -1 = 3. Selanjutnya (gof)(2) = g(f(2)) = g(3) = $3^2 – 2 = 9 – 2 = 7$.

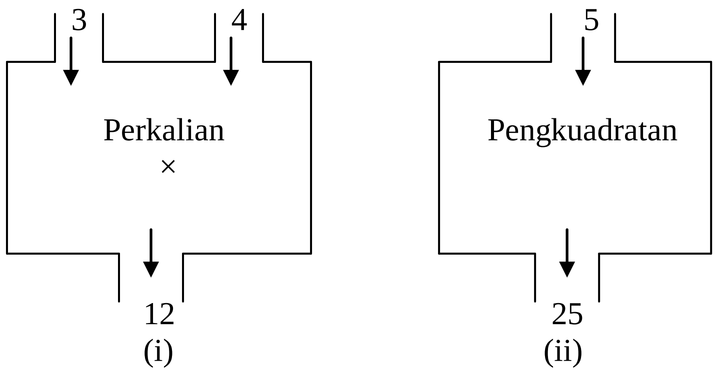
Latihan 3

1. Misalkan f dan g pemetaan dari $\Re$ ke $\Re$, dengan f(x) = x + 1 dan g(x) = x^3. Tentukan (a) (g of)(1), (g o f)(-3), (g o f)(x); (b) (f og)(1), (f o g)(-3), (f o g)(x). Apakah fog = gof
2. Misalkan g dan h pemetaan dari $\Re$ ke $\Re$, dengan g(x) = 2x dan h(x) = $x^2 + 4$. Tentukan (h o g)(x), (g o h)(x), (gog)(x), dan (h o h)(x). Apakah goh = hog ?
3. Berikut ini pemetaan dari dari $\Re$ ke $\Re$. Carilah rumus gof dan fog untuk setiap hal.
   a. f(x) = x + 3 dan g(x) = 2x + 1
   b. f(x) = x – 1 dan g(x) = $x^2 + x + 1$
   c. f(x) = x^2 dan g(x) = sin x
4. Diketahui g(x) = 1-3x dan h(x) = $x^2 -1$
   a. Carilah (hog)(3)
   b. Jika (hog)(x) = 3, carilah x

2. Sifat-sifat Komposisi Fungsi

Apa yang dimaksud *operasi hitung* pada himpunan bilangan ? Penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, pengkuadratan, penarikan akar pangkat dua merupakan contoh-contoh operasi hitung. Penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian termasuk pada *operasi biner*. Sedangkan pengkuadratan dan penarikan akar pangkat dua termasuk pada *operasi uner*. Jika operasi itu dipandang sebagai mesin produksi, operasi biner merupakan mesin yang memiliki dua masukan (input) dan sebuah keluaran (output). Sedangkan operasi uner suatu mesin yang memiliki sebuah input dan sebuah output. Gambar

3.18(i) mengilustrasikan operasi biner (penjumlahan), dan Gambar 3.18(ii) mengilustrasikan operasi uner (pengkuadratan).



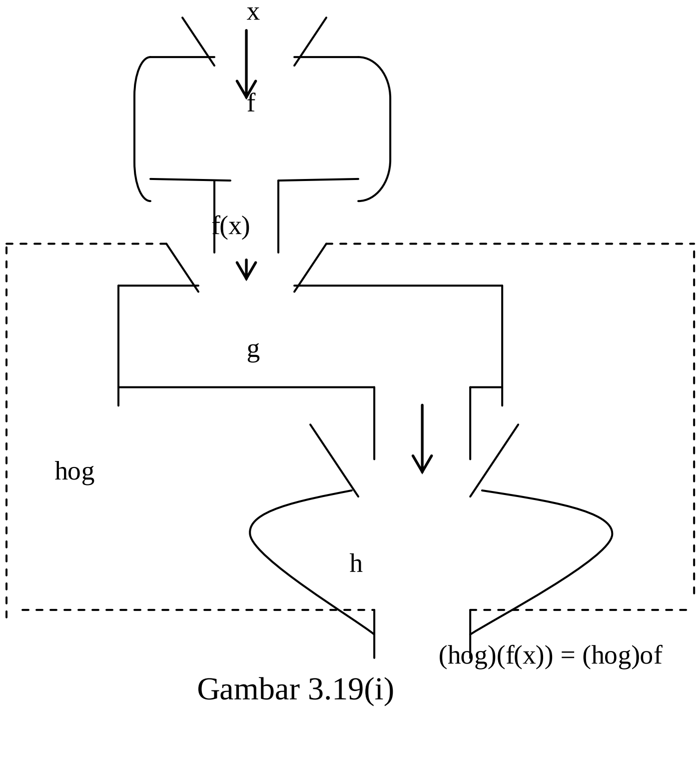
Gambar 3.18

Komposisi fungsi dapat dipandang sebagai operasi biner, dengan memiliki input dua buah fungsi dan ouputnya sebuah fungsi. Komposisi fungsi memiliki sifat-sifat sebagai berikut.

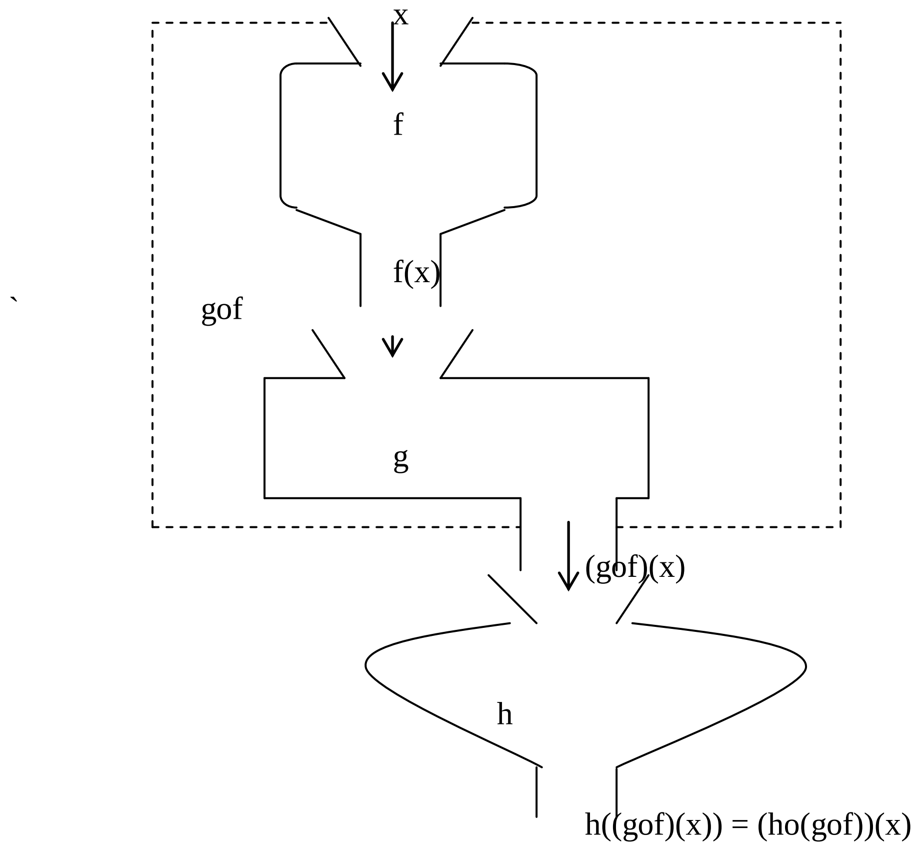
(1) Dari penyelesaian latihan 3, pada umumnya **gof ≠ fog,** ini menyimpulkan bahwa komposisi fungsi tidak memenuhi sifat **komutatif.**

(2) A**sosiatif**, yaitu bila f, g dan h fungsi maka (fog)oh = fo(goh)..

Misalkan f , g, dan h fungsi, Gambar 6.17 (i) dan (ii) berturut-turut mengilustrasikan bahwa komposisi fungsi bersifat sifat asosiatif yaitu, fo(goh) = (fog)oh.



Gambar 3.19(i)



Gambar 3. 19 (ii)

Contoh 3. 5.

Misalkan $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2$ dan $h(x) = 2 - x$

Carilah fo(goh) dan (fog)oh

Jawab

$(goh)(x) = g(h(x)) = g(2 - x) = (2-x)^2 = 4 - 4x + x^2$.

$fo(goh) = (fo(goh))(x) = f((goh))(x) = f(4 - 4x + x^2) = 2(4 - 4x + x^2) + 3$

$= 8 - 8x + 2x^2 + 3 = 11 - 8x + 2x^2 = 2x^2 - 8x + 11$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2(x^2) + 3 = 2x^2 + 3$

$((fog)oh) = ((fog)oh))(x) = (fog)((2-x) = 2(2-x)^2 + 3 = 2(4 - 4x + x^2) + 3$

$= 8 - 8x + 2x^2 + 3 = 11 - 8x + 2x^2. = 2x^2 - 8x + 11.$

(3) Memiliki **unsur identitas**, yaitu I(x) = x, sehingga untuk setiap fungsi f berlaku foI = Iof = f. Sebagai contoh, bila $f(x) = x^2 - 3x$, maka $(foI)(x) = f(I(x)) = f(x) = x^2 - 3x$, juga $(Iof)(x) = I(f(x)) = x^2 - 3x = f(x)$

(4) Bila f korespondensi satu-satu, maka ada **fungsi invers** dengan lambang f^{-1} sehingga $fof^{-1} = f^{-1}of = I$. Sebagai contoh, bila f(x) = x -3 maka $f^{-1}(x) = x + 3$ sebab $(fof^{-1})(x) = (x+3) - 3 = x = I(x)$ dan $(f^{-1}of)(x) = (x-3) + 3 = x = I(x)$

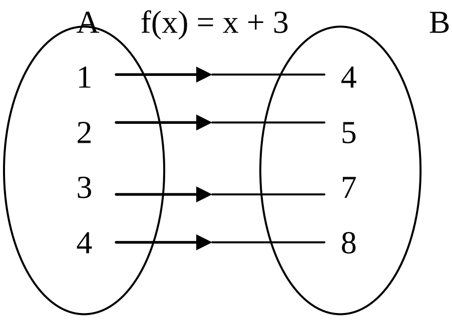
Latihan 4.

1. Diketahui f(x) = x –2, $g(x) = x^3$ dan h(x) = 4x
   a. Tentukan goh dan kemudian fo(goh)
   b. Tentukan fog dan kemudian (fog)oh
   c. Apakah fo(goh) = (fog)oh?
2. Diketahui f(x) = 2x, g(x) = x + 1, dan $h(x) = x^2$
   a. Carilah rumus (hogof)(x) dan (fogoh)(x).
   b. Tentukan nilai-nilai (hogof)(2) dan (fogoh)(2).
3. Misalkan I(x) = x, u(x) = 2x -3, $v(x) = x^2 - x + 5$
   a. Carilah Iou, uoI, Iov, dan voI
   b. Jika f suatu fungsi, tunjukkan Iof = foI = f.
      I (x) = x disebut fungsi identitas
4. Tentukan daerah asal dan daerah hasil masing-masing fungsi f, g, fog dan gof bila . $f(x) = \sqrt{x-1}$ dan $g(x) = x^2$.
5. Jika f(2x –1) = 6x –7, tentukan nilai f(7).

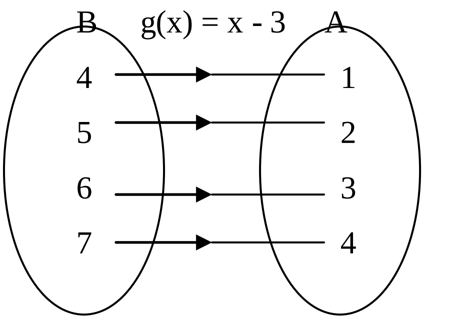
C. Fungsi Invers dan Sifat-sifatnya

1. Fungsi Invers

Misalkan A = {1, 2, 3, 4} dan B = {4, 5, 6, 7} dan fungsi f dari A ke B dengan f(x) = x + 3. Melalui diagram panah dapat ditunjukkan A dan B dalam korespondensi satu-satu oleh pemetaan f (Gambar 3.20). Jika diagram panah tersebut di balik dari B ke A, relasi tersebut berupa fungsi, misalkan g dengan g(x) x –3 (Gambar 3.21). Fungsi g tersebut disebut fungsi invers dari f.

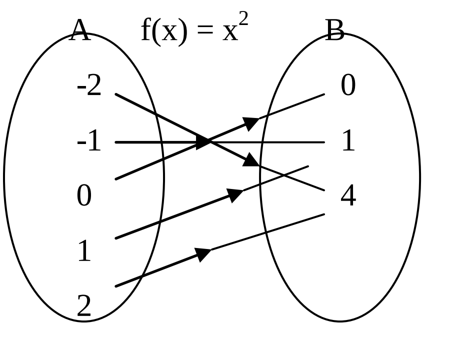


Gambar 3. 20

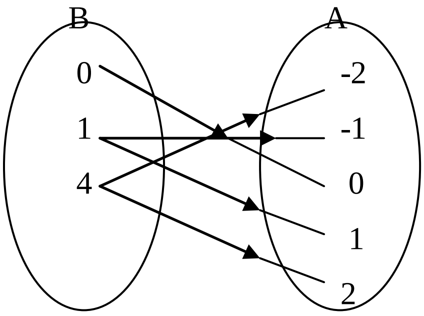


Gambar 3. 21

Jika A = {-2, -1, 0, 1, 2} , B = {0, 1, 4 } f pemetaan dari A ke B dengan $f(x) = x^2$. Melalui diagram panah dapat diketahui bahwa A dan B tidak berada dalam korespondensi satu-satu (Gambar 3.22), sehingga jika diagram panah itu dibalik dari B ke A bukanlah suatu pemetaan atau fungsi (Gambar 3.23), oleh karena itu fungsi invers dari f tidak terdefinisi.



Gambar 3.22



Gambar 3.23

Dari kedua contoh di atas suatu fungsi f : A $\rightarrow$ B memiliki fungsi invers g: B $\rightarrow$ A apabila A dan B ada dalam korespondensi satu-satu. Jika g ada, maka g dinyatakan dengan f $^{-1}$ (f invers), daerah hasil f adalah daerah asal dari f $^{-1}$, dan daerah asal f adalah daerah hasil dari f $^{-1}$.

Contoh 3.6

Tentukan fungsi invers dari f atau f $^{-1}$ jika f(x) = $\frac{2x}{3-x}$. Tentukan juga daerah asal dan daerah hasil dari f.

Jawab:

Misalkan y peta dari x atau f(x) = y

$\frac{2x}{3-x}$ = y atau y(3-x) = 2x atau 3y –xy = 2x atau 2x + xy = 3y atau x(2+y) = 3y atau x = $\frac{3y}{2+y}$ atau f $^{-1}$ (y) = $\frac{3y}{2+y}$. Jadi f $^{-1}$ (x) = $\frac{3x}{2+x}$.

Domain dari f(x) = $\frac{2x}{3-x}$ adalah A = {x | x $\neq$ 3, x$\in\Re$ }, dengan memperhatikan rumus f $^{-1}$ (x) = $\frac{3x}{2+x}$ diperoleh daerah hasil dari f sama dengan derah asal dari f $^{-}$ yaitu B = {x | x $\neq$ -2, x$\in\Re$ }.

Latihan 5.

1. Carilah rumus untuk fungsi invers f^{-1}
   a. f(x) =1- 3x
   b. f(x) = $\frac{x+1}{2x-3}$
   c. f(x) = $\frac{x}{x-4}$
   d. f(x) = x^3 - 4
   e. f(x) = $\sqrt{3-x}$
2. A = {x : x > 0, x $\in\Re$, dan f, g, dan fungsi-fungsi pada A, dengan f(x) = x + 1, g(x) = 2x, dan h (x) = x^2
   a. Carilah f^{-1}, g^{-1}, dan h^{-1}
   b. Hitunglah $f^{-1}(1)$, $g^{-1}(8)$, dan $h^{-1}(4)$
3. Diketahui f(x) = 2x dan g(x) = x + 2
   a. Tulislah rumus f^{-1} dan g^{-1}
   b. Carilah rumus untuk gof, f^{-1} o g^{-1}, dan $(gof)^{-1}$
   c. Nyatakan hubungan f^{-1} o g^{-1} dan $(gof)^{-1}$
4. a. Gambarkan sketsa grafik f(x) = x^2
   b. Apa sebabnya tidak ada invers?
   c. Tentukan daerah asal yang terbatas untuk f sehingga ada fungsi invers f^{-1}.
   d. Tulis rumus f^{-1} dan gambar grafiknya.

2. Sifat-sifat Fungsi Invers.

Sudah dikemukakan sebelumnya I(x) = x disebut fungsi identitas karena untuk setip fungsi f berlaku Iof = foI = f. Selanjutnya bagaimana kaitan antara fungsi, fungsi inversnya dan fungsi identitas ?

Misalkan f(x) = $\frac{2x}{3-x}$, $x \neq 3$, maka fungsi inversnya adalah

f^{-1} (x) = $\frac{3x}{2+x}$ (x), $x \neq -2$.

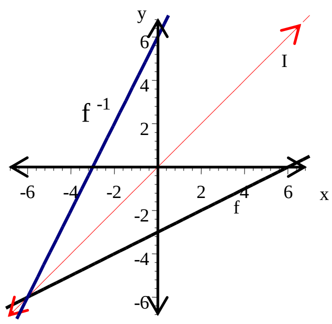
Perhatikan (fo f^{-1})(x) = $\dfrac{2(\frac{3x}{2+x})}{3-(\frac{3x}{2+x})} = \dfrac{\frac{6x}{2+3x}}{\frac{3(2+x)-3x}{2+3x}} = \dfrac{6x}{6+3x-3x} = x$ dan

($f^{-1}$of)(x) = $\dfrac{3(\frac{2x}{3-x})}{2+(\frac{2x}{3-x})} = \dfrac{\frac{6x}{3-x}}{\frac{2(3-x)+2x}{3-x}} = \dfrac{6x}{6-2x+2x} = x$

Dari contoh di atas f^{-1} fungsi invers dari f berlaku $f^{-1}$of = fo f^{-1} = I (fungsi identitas).

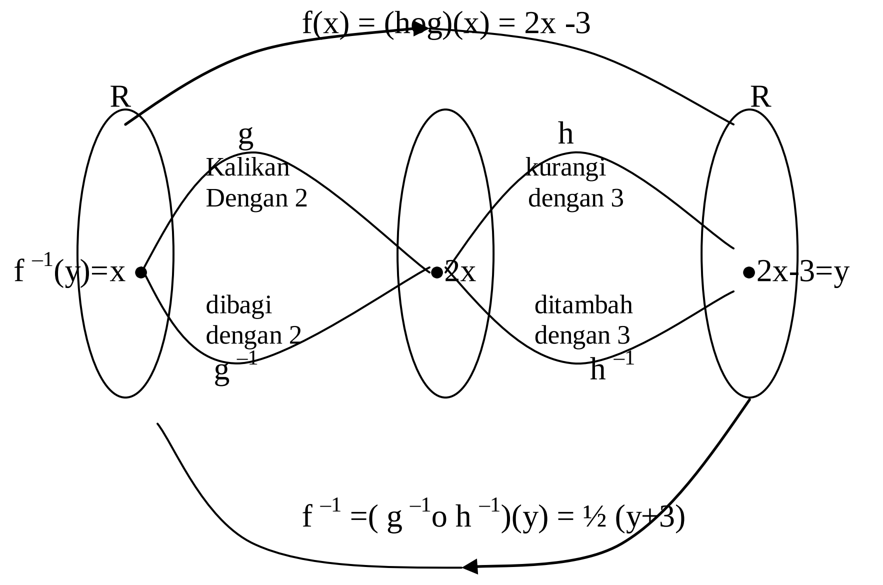
a. Bila f korespondensi satu-satu maka grafik f^{-1} merupakan hasil pencerminan grafik f terhadapgaris y = x

Sekarang perhatikan f(x) = 2x + 6 dan inversnya adalah f^{-1}(x) = ½ x -3. Bila ketiga grafik fungsi f, f^{-1} dan I digambarkan dalam satu sistem koordinat akan terlihat seperti pada Gambar 3.24 Ini menunjukkan bahwa grafik f^{-1} merupakan hasil pencerminan grafik f terhadap grafik I(x) = x.



Gambar 3.24

Bagaimana kaitan antara invers dari suatu komposisi dua fungsi dengan invers masing-masing fungsi ? Perhatikan h(x) = x –3 dan g(x) = 2x. misalkan f(x) = (hog)(x) = 2x – 3. Dari Gambar 3.25 di bawah ini menunjukkan bahwa jika f = hog maka f^{-1} = (hog) $^{-1}$ = g^{-1} o h^{-1} .



Gambar 3.25

b. Bila g dan h korespondensi satu-satu maka $(hog)^{-1} = g^{-1}oh^{-1}$

Dengan menggunakan sifat fungsi identitas dan sifat $f^{-1}of = fo\ f^{-1} = I$, maka $(hog)^{-1}\ o(hog) = I$.

$\Leftrightarrow (hog)^{-1}\ o(hog)og^{-1} = Iog^{-1}$ (kedua ruas dikomposisikan dengan g^{-1})

$\Leftrightarrow (hog)^{-1}\ oho(g\ og^{-1}) = Io\ g^{-1}$ (sifat assosiatif)

$\Leftrightarrow (hog)^{-1}\ oho\ I = g^{-1}$ (sifat fungsi invers)

$\Leftrightarrow ((hog)^{-1}\ oh = g^{-1}$ (sifat fungsi identitas)

$\Leftrightarrow (hog)^{-1}\ oh\ o\ h^{-1} = g^{-1}o\ h^{-1}$ (kedua ruas dikomposisikan dengan h^{-1})

$\Leftrightarrow (hog)^{-1}\ o(h\ o\ h^{-1}) = g^{-1}o\ h^{-1}$ (sifat assosiatif)

$\Leftrightarrow (hog)^{-1}\ o\ I = g^{-1}o\ h^{-1}$ (sifat fungsi invers)

$\Leftrightarrow (hog)^{-1} = g^{-1}o\ h^{-1}$ (sifat fungsi identitas)

Contoh 3.7

Diketahui $f(x) = 4x + 12$ dan $g(x) = 4 - 2x$

Tentukan $f^{-1}o\ g^{-1}$

Jawab:

Cara pertama, cari f^{-1} dan g^{-1}, kemudian cari $f^{-1}og^{-1}$

f(x) = 4x + 12 atau y = 4x + 12 atau 4x = y -12 atau x = ¼ y – 3,

jadi $f^{-1}(x)$ = ¼ x -3

g(x) = 4 - 2x atau y = 4 – 2x atau 2x = 4 – y atau x = 2 – ½ y, sehingga

$g^{-1}(x)$ = 2 – ½ x

$(f^{-1}o\, g^{-1})(x)$ = f^{-1}(2 – ½ x) = ¼ (2 – ½ x) -3 = ½ - 1/8 x - 3 = - (1/8 x + 2 ½)

=

Cara kedua, karena $f^{-1}og^{-1} = (gof)^{-1}$, tentukan gof, kemudian cari $f^{-1}og^{-1}$
(gof)(x) = g(4x + 12) = 4 – 2(4x + 12) = -20 -8x
Misal y = -20 - 8x atau 8x = -20 – y atau x = - 2 ½ – 1/8 y, sehingga
y = - 2 ½ – 1/8 x. Jadi $(f^{-1}o\, g^{-1})(x)$ = $(gof)^{-1}(x)$ = - 2 ½ – 1/8 x = -(1/8 x + 2½). g

Latihan 6

1. Jika domain dari f(x) = 2x –3 dan g(x) = x + 1, tentukan (a) $(fog)^{-1}$ dan $(gof)^{-1}$.
2. Diketahui g(x) = $\dfrac{x}{x-4}$ dan h(x) = $\dfrac{1}{x+1}$. Carilah $(hog)^{-1}$ dan $(goh)^{-1}$.
3. Jika f(x) = $\dfrac{1}{x+3}$ dan g(x) = x -2, tentukan (a) $(fog)^{-1}$ dan $(gof)^{-1}$.

Perdalam Konsepmu

1. Bila biaya produksi merupakan fungsi dari bahan baku dan upah, sedangkan bahan baku dan upah merupakan fungsi dari banyaknya barang yang diproduksi. Operasi fungsi yang paling tepat dari biaya produksi adalah penjumlahan, perkalian atau komposisi fungsi.

2. Mengapa jika fungsi f bukan korespondensi satu-satu tidak memiliki fungsi invers.

Rangkuman

1. Kaitan antara Relasi, Fungsi dan Korespondensi Satu-satu

No.	Syarat-syarat	Relasi dari A ke B	Fungsi dari A ke B	Korespondensi satu satu antara A dan B
1.	Paling sedikit ada satu anggota A yang berpasangan dengan anggota B	√	√	√
2.	Setiap anggota A memiliki pasangan di B		√	√
3.	Tiap anggota A hanya memiliki satu pasangan di B		√	√
4.	Setiap anggota B memiliki pasangan di A			√
5.	Tiap anggota B hanya memiliki satu pasangan di A			√

2. Komposisi fungsi f dan g didefinisikan (fog)(x) = f(g(x)) dan (gof)(x) = g(f(x))
3. Sifat-sifat komposisi fungsi
   a. Tidak komutatif
   b. Memiliki sifat asosiatif (fog)o(h) = fo(goh)
   c. Memiliki fungsi identitas I(x) = x sehingga foI = Iof = f
4. Jika f korespondensi satu-satu, maka ada fungsi invers dari f ditulis f^{-1}, sehingga $fof^{-1} = f^{-1}of = I$.
5. Sifat-sifat fungsi invers
   a. Grafik fungsi f^{-1} merupakan hasil pencerminan grafik f terhadap grafik fungsi identitas I.
   b. $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ dan $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$