BAB V
TURUNAN FUNGSI

Standar Kompetensi
Menggunakan konsep limit fungsi dan turunan fungsi dalam pemecahan masalah

Kompetensi Dasar

1. Menggunakan sifat dan aturan turunan dalam perhitungan turunan fungsi aljabar
2. Menggunakan turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi aljabar dan memecahkan masalah
3. Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi aljabar
4. Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi aljabar dan penafsirannya.

A. Turunan Fungsi
1. Pengertian Turunan Fungsi

Turunan fungsi f disembarang titik x dilambangkan dengan f ’(x) dengan definisi f ’(x) = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Proses mencari f ‘ dari f disebut penurunan; dikatakan bahwa f diturunkan untuk mendapatkan f ‘. .

Contoh 5.1:
Carilah turunan fungsi f yang dinyatakan dengan f(x) = x^2 + 5 pada x = 3

Jawab:
Turunan f pada x = 3 ialah f ‘ (3) = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2+5-(3^2+5)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2+5-9-5}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(6+h) = 6$$

Contoh 5.2:
Carilah turunan fungsi f yang ditentukan oleh f(x) = x^3 langsung dari definisi.
Jawab:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2$$

h

Contoh 3.
Diketahui f(x) = 1/x^2. Carilah f ‘(x) langsung dari definisi.
Jawab:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{h(x+h)^2x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{h(x+h)^2x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-h(2x+h)}{h(x+h)^2x^2}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x^2+2xh+h^2)x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x^4+2x^3h+x^2h^2)} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

Latihan 1

Gunakan definisi fungsi turunan f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ untuk memeriksa nilai f '(x) untuk tiap-tiap soal di bawah ini.

1. f(x) = 3x ; f '(x) = 3
2. f(x) = 5x^2 ; f '(x) = 10x
3. f(x) = 2x^3 ; f '(x) = 6x^2
4. f(x) = 2/x^2 ; f '(x) = - 4/x^3
5. f(x) = 1/x ; f '(x) = - 1/x^2

2. Turunan Beberapa Fungsi Khusus

(i). Turunan fungsi-fungsi konstan

Jika f(x) = c, dengan c konstan, maka:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0}0 = 0.$$

Turunan fungsi konstan adalah nol.

(ii). Turunan x^n (n bilangan bulat positif)

Untuk n = 1, maka f(x) = x, dan f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$ = $\lim_{h\to 0}1 = 1$.

Untuk n = 2, maka f(x) = x^2, dan f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ = = $\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}2x+h = 2x$.

Untuk n = 3, maka f(x) = x^3 dan f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ = $\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)$ = 3x^2
.

Dari uraian di atas diperoleh

f(x)	x	x^2	x^3
f '(x)	1	2x	3x^2

Bila diperhatikan dengan seksama, tampak pola turunan untuk x^4, x^5, dan seterusnya, sehingga dapat disimpulkan turunan dari f(x) = x^n adalah f '(x) = n x^{n-1}

Kesimpulan tersebut dapat dibuktikan dengan menggunakan definisi turunan sebagai berikut..

Misalkan f(x) = x^n, maka f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

$$(x+h)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n$$

$\binom{n}{k}$ adalah kombinasi k unsur dari n unsur, dengan $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Selanjutnya f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x^n + nx^{n-1}h + ... + nxh^{n-1} + h^n) - x^n}{h} =$

$\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + ... + nxh^{n-1} + h^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(nx^{n-1} + ... + nxh^{n-2} + h^{n=1})}{h} =$

$\lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n=1}$ = nx^{n-1}

Jika f(x) = x^n, maka f '(x) = n x^{n-1} , dengan n bilangan bulat positif.

(iii). Turunan ax^n (n bilangan bulat positif)

Misalkan f(x) = ax^n , a suatu konstanta , maka f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^n - ax^n}{h}$ =

$\lim_{h\to 0}\frac{a[(x+h)^n - x^n]}{h}$. Berdasarkan sifat limit diperoleh $\lim_{h\to 0}\frac{a[(x+h)^n - x^n]}{h}$=

$a \lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^n - x^n]}{h} = a \lim_{h\to 0}\frac{(x^n + nx^{n-1}h + ... + nxh^{n-1} + h^n) - x^n}{h} =$

a $\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + ... + nxh^{n-1} + h^n}{h}$ = a $\lim_{h\to 0}\frac{h(nx^{n-1} + ... + nxh^{n-2} + h^{n=1})}{h}$ =

a $\lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n=1}$ = an x^{n-1}

Jika f(x) = ax^n, maka f '(x) =an x^{n-1} , dengan n bilangan bulat positif.

(iv). Turunan pangkat negative dan rasional dari x

Untuk n = -1, maka f(x) = x^{-1} = $\frac{1}{x}$, dan f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} =$

$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x^2+xh)} = -\frac{1}{x^2}$ = x^{-2}

Untuk n = -2, maka f(x) = x^{-2} = $\frac{1}{x^2}$, dan f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ =

$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{(x^2+2xh+h^2)x^2}}{h} =$

$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2xh-h^2}{(x^2+2xh+h^2)x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h(2x+h)}{(x^4+2x^3h+x^2h^2)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-(2x+h)}{x^4+2x^3h+x^2h^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$

Dari uraian di atas diperoleh :

f(x)	1/x atau x $^{-2}$	1/ x^2 atau x^{-2}
f '(x)	- 1/x^2 atau – x^{-2}	- 2/x^3 atau – 2x^{-3}

Bila dicermati diperoleh pola bahwa turunan dari f(x) = x^{-3}, maka f '(x) = -3x^{-4}. Juga bila f(x) = x^{-4}, maka f '(x) = -4x^{-5}, dan seterusnya.
Dengan demikian bila f(x) = x^{-n}, maka f '(x) = -nx^{n-1}, berlaku bagi n bilangan bulat untuk n ≠ 0.

Jika f(x) = x^n, maka f '(x) = n x^{n-1} , dengan n bilangan bulat, n ≠ 0.

Contoh 5.4 :

Diketahui f(x) = $\frac{1}{3x^2}$. Carilah f '(x) :

Jawab:

$$f(x) = \frac{1}{3x^2} = \frac{x^{-2}}{3}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^{-2-1}}{3} = \frac{-2x^{-3}}{3} = \frac{-2}{3x^3}$$

Bagaimana bila f(x) = x^n dengan n bilangan rasional?

Misalkan f(x) = √x = $x^{\frac{1}{2}}$, maka f '(x) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} =$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\right) =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\right) = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Jika f(x) = x^n dengan n bilangan rasional, maka f '(x) = n x^{n-1}.

Contoh 5.5

Diketahui f(x) = $x^{\frac{5}{3}}$. Carilah f '(x) :

Jawab:

Bila f(x) = $x^{\frac{5}{3}}$, maka f '(x) = $\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$:

Latihan 2.
Carilah turunan dari :

1. $x^{½}$ 2. $x^{4/3}$ 3. $x^{5/2}$ 4. $x^{½}$ 5. $x^{1/3}$

6. x^{-1} 7. x^{-2} 8. x^{-6} 9. $2x^{-3}$ 10. ½ x^{-4}

3. Sifat-sifat Turunan Fungsi

Bila g(x) dan h(x) fungsi-fungsi yang memiliki turunan dan k konstanta, berlaku:
(i) Jika f(x) = k g(x) maka f '(x) = k g'(x)
(ii) Jika f(x) = u(x) + v(x) maka f ' (x) = u'(x) + v'(x)
(iii) Jika f(x) = u(x) - v(x) maka f ' (x) = u'(x) - v'(x)
(iv) Jika f(x) = u(x).v(x) maka f ' (x) = u'(x)v(x) + u(x)v(x)
(v) Jika f(x) = $\frac{u(x)}{v(x)}$ *maka f ' (x) =* $\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

Bukti (i).
Jika f(x) = k g(x) maka f '(x) = $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{kg(x+h)-kg(x)}{h} =$
$\lim\limits_{h\to 0} k\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ = k $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ = k g'(x)

Bukti (ii)
Jika f(x) = u(x)+v(x) maka f '(x) = $\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(x+h)+v(x+h)-(u(x)+v(x))}{h} =$
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{(u(x+h)-u(x))+(v(x+h)-v(x))}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} =$
u'(x) + v'(x).

Bukti (iii) serupa dengan bukti (ii).

Bukti (iv)
Jika f(x) = u(x)+v(x) maka f '(x) = $\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(x+h).v(x+h)-u(x).v(x)}{h} =$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h).v(x+h))-u(x+h).v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h).[v(x+h))-.v(x)]+[u(x+h)-u(x)]v(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h).[v(x+h))-.v(x)]+[u(x+h)-u(x)]v(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h).[v(x+h))-.v(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{.[u(x+h))-.u(x)]v(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}u(x+h)\frac{[v(x+h))-.v(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{.[u(x+h))-.u(x)]}{h}v(x) =$$

$$\lim_{h\to 0}u(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{[v(x+h))-.v(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{.[u(x+h))-.u(x)]}{h}\lim_{h\to 0}v(x) =$$

u(x)v'(x) + u'(x)v(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).

Bukti (v) serupa dengan bukti (iv)

Contoh 5.6.
Carilah turunan dari f(x) = $3x^2$ + 5x – 10
Jawab:
f(x) = $3x^2$ + 5x – 10
Misalkan u(x) = $3x^2$, v(x) = 5x dan w(x) = 10, maka u'(x) = 6x, v'(x) = 5 dan w'(x) = 0
Selanjutnya f(x) = u(x) + v(x) – w(x) dan f '(x) = u'(x) + v'(x) – w'(x) = 6x + 5.

Contoh 5.7
Carilah turunan f(x) = $(3x^2 -1)(x^4 + 2x)$
Jawab:
Dengan menggunakan sifat (iv)
Misalkan u(x) = $3x^2$ -1 dan v(x) = x^4 +2x, maka u'(x) = 6x dan v'(x) = $4x^3 + 2$
Jika f(x) = u(x).v(x) maka f '(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) sehingga tururnan dari
f(x) = $(3x^2 -1)(x^4 +2x)$ adalah f '(x) = $6x(x^4+2x)+ (3x^2-1)(4x^3+2) = 18x^5+18x^2-4x^3-2$
Hasilnya sama dengan cara mengalikan dahulu u(x).v(x) yaitu f(x) = $(3x^2 -1)(x^4 +2x)$ = $3x^6+6x^3-x^4-2x$, dan f ' (x) = $18x^5+18x^2-4x^3-2$.

Contoh 8
Carilah turunan f(x) = $\frac{2x^4 - x}{x^2+1}$
Jawab:
Dengan menggunakan sifat (iv)
Misalkan u(x) = $2x^4 – x$ dan v(x) = x^2 +1 maka u'(x) = $8x^3$ - 1dan v'(x) = 2x.
Jika f(x) = $\frac{u(x)}{v(x)}$ maka f ' (x) = $\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$.
Selanjutnya turunan dari f(x) = $\frac{2x^4 - x}{x^2+1}$ adalah

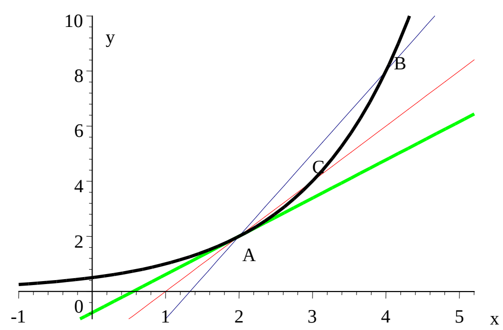
$$f'(x) = \frac{(8x^3-1)(x^2+1)-(2x^4-x)(2x)}{[x^2+1]^2} = \frac{4x^5+8x^3+x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

Latihan 3
Carilah turunan dari fungsi-fungsi berikut.
1. $x^2 + 2x + 3$
2. $x^3 – 7x^2 + 2$
1. $4x^4 – x^2 + 9$
2. $(x^3 + 3x^2)(2x – 1)$
3. $(5x^2 -7)(3x^2 -2x +1)$
4. $\frac{2}{5x^2-1}$
5. $\frac{2x^2-1}{3x+5}$
6. $\frac{5x^2+2x-6}{2x-1}$
7. Jika f(0) = 4, f '(0) = -1, g(0) = -3 dan g'(0) = 5
   Carilah (f-g)'(0); (f.g)'(0); dan (f/g)'(0)
8. Jika f(3) = 7, f '(3) = 2, g(3) = 6 dan g'(3) = -10
   Carilah (f+g)'(3); (f.g)'(3); dan (f/g)'(3)

4. Arti Geometris Turunan
a. Gardien Garis singgung Kurva

Perhatikan grafik fungsi f pada gambar berikut.
Titik A, B, dan C terletak pada grafik f, bila absisnya berturut-turut x_1, x_2, dan x_3, maka koordinat titik A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), dan C(x_3, f(x_3)). Garis AB memotong grafik f memiliki gradien $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Garis AC memotong grafik f memiliki

gradien $\dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$. Misalkan selisih absis titik C dan absis titik C sama dengan h, maka $x_3 = x_1 + h$, sehingga gradien garis AC sama dengan $\dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{(x_1 + h) - x_1} = \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$



Gambar 5.1

Jika titik C pada grafik terus digeser mendekati titik A, maka x_3 mendekati x_1 atau sehingga selisihnya yaitu h mendekati 0, ditulis $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$ dilambangkan dengan f ’(x_1) yang memiliki makna gradien garis singgung kurva f di titik A(x_1, f(x_1)).

Contoh 5. 9 :
Tentukan gradien garis singgung kurva f(x) = x^2 -1 di titik x = 2
Jawab:
f(x) = x^2 -1, maka f’(x) = 2x
Gradien garis singgung di x = 2 adalah f ’(2) = 2.2. = 4

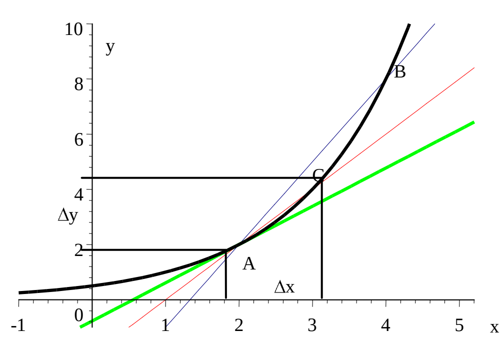
b. NotasiLeibniz

Fungsi f: x $\rightarrow$ x^2 +1 biasa ditulis f(x) = x^2 +1, tetapi sering juga ditulis sebagai y = x^2 +1 . Jika f(x) = x^2 +1 maka f ’(x) = 2x, dan bila y = x^2 +1 sering ditulis y’ = 2x.

Dari definisi fungsi turunan dari f (x) adalah f ‘(x) = $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, h melambangkan perubahan nilai x. Dalam berbagai penerapan kalkulus perlu sekali lambang h sering ditulis sebagai Δx, sedang perubahan nilai f atau y yang sesuai disebut dilambangkan dengan Δf atau Δy.

Jika y = f (x), maka Δy = f(x + Δx) – f(x) dan y’ = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Oleh Leibniz $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ditulis sebagai $\dfrac{dy}{dx}$.



Gambar 5.2

Contoh 5.10

Jika C (x) = 100 + 3x – x^2 , tentukan $\frac{dC}{dx}$

Jawab:

$\frac{dC}{dx}$ = C'(x) = 3 -2x

Tugas 4

1. Tentukan gradien garis singgung f(x) = x^2, di titik (1,1).
2. Tentukanlah koordinat titik pada kurva y = x^2 + 4x + 6 sehingga garissinggung kurva di titik itu mempunyai gradien 12
3. Tentukan persamaan garis singgung dari kurva y = x^2 + x yang melalui (-1,0).
4. Tentukanlah persamaan garisinggung kurva y = x – 1/x^2 di titik potong kurva dengan sumbu X

5. Aturan Rantai

Jika f(x) = (uov)(x) = u(v(x)), maka f '(x) = u'(v(x)).v'(x)

Contoh 11:
Carilah f '(x) bila f(x) = $(2x + 1)^3$
Jawab:
Cara pertama
f(x) = $(2x + 1)^3$ = $8x^3+12x^2+6x+1$, maka f ' (x) = $24x^2 + 24x^2 + 6x = 6(8x^2+2x +1)$ =
= $6(2x+1)^2$.
Cara kedua
Menggunakan sifat (vi) jika f(x) = (uov)(x) = u(v(x)), maka f '(x) = u'(v(x)).v'(x).
Untuk f(x) = $(2x + 1)^3$, misalkan dengan u(x) = x^3 dan v(x) = 2x+1, sehingga
f(x) = (uov)(x) = u(v(x)).
Bila u(x) = x^3 maka u'(x) = $3x^2$ dan bila v(x) = 2x + 1 maka v'(x) = 2
f '(x) = $3(2x + 1)^2$. 2 = $6(2x + 1)^2$.

Contoh 12:
Carilah f '(x) bila f(x) = $\sqrt{x^{10} + 2x^5 - 10}$
Jawab:

f(x) = $\sqrt{x^{10} + 2x^5 - 10}$ = $(x^{10} + 2x^5 - 10)^{\frac{1}{2}}$

f(x) = (uov)(x) dengan u(x) = $x^{\frac{1}{2}}$ dan v(x) = $x^{10} + 2x^5 - 10$, maka u'(x) = $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ dan

v'(x) = $10x^9 + 10x^4$

f '(x) = $\frac{1}{2}(x^{10} + 2x^5 - 10)^{-\frac{1}{2}}(10x^9 + 10x^4) = \frac{10x^9 + 10x^4}{2\sqrt{x^{10} + 2x^5 - 10}}$

Dengan menggunakan notasi Leibniz, Teorema Aturan Rantai dapat dinyatakan sebagai berikut: Jika y = f(u) dan u = g(x), maka y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

Contoh 13
Carilah y ‘ bila y = $(2x + 1)^3$
Jawab:
Misalkan v = 2x + 1 maka y = $(2x + 1)^3 = v^3$

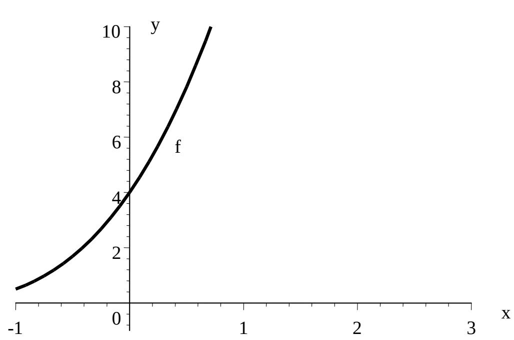
$$\frac{dy}{dv} = 3v^2 \text{ dan } \frac{dv}{dx} = 2 \text{ sehingga } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} = 3v^2.2 = 6v^2 = 6(2x+1)^2$$

Tugas 5
Carilah turunan dari fungsi-fungsi berikut.
1. f(x) = $(3 - 2x)^5$
2. y = $(x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^{11}$
3. f(x) = $(x^2 - x + 1)^{-7}$
4. y = $\dfrac{1}{(x^2+3)^9}$

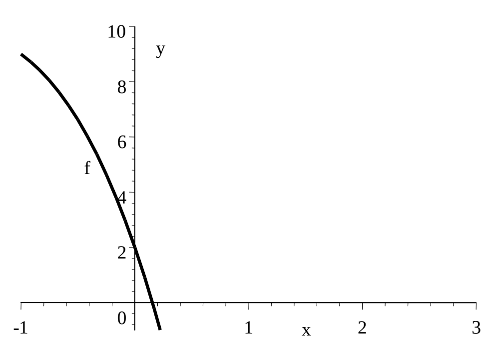
B. Karakteristik Grafik Fungsi

1. Kurva Naik dan Kurva Turun

Bila suatu kurva dari grafik fungsi digambarkan pada koordinat kartesius, kurva dikatakan naik, bila makin ke kanan kurva makin tinggi, seperti terlihat pada Gambar 5.3. Suatu kurva dikatakan turun bila makin ke kanan kurva makin rendah, seperti pada Gambar 5. 4.

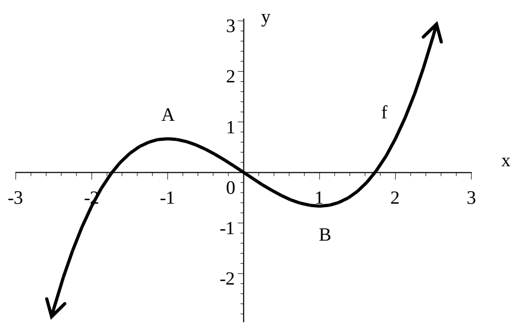


Gambar 5.3



Gambar 5.4

Perhatikan Gambar 5.5., pada interval $-\infty < x < -1$ kurva naik, pada interval $-1 < x < 1$ kurva turun, dan pada interval $1 < x < \infty$ kurva naik. Sedangkan pada x = -1 dan x = 1 kurva tidak naik maupun turun, dikatakan kurva mencapai *stasioner*. Titik A dan B disebut titik stasioner kurva.

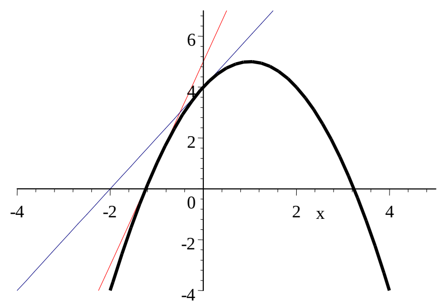


Gambar 5.5

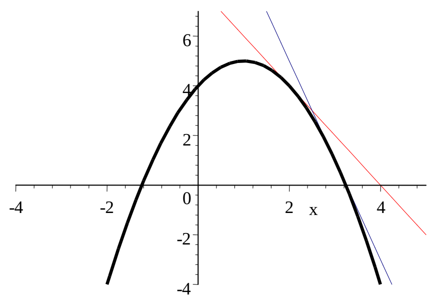
Hubungan Turunan Fungsi dengan Grafik Fungsi

Perhatikan Gambar 5.6., pada interval $-\infty < x < 1$ grafik naik dan garis-garis singgungnya membentuk sudut lancip dengan sumbu x positif, artinya gradien-gradien garis singgung grafik f pada saat kurva f itu naik adalah positif. Dengan kata lain, grafik fungsi f naik bila $f'(x) > 0$.

Perhatikan Gambar 5.7., pada interval $1 < x < \infty$ grafik turun dan garis-garis singgungnya membentuk sudut tumpul dengan sumbu x positif, artinya gradien-gradien garis singgung grafik f pada saat kurva f turun adalah negatif. Dengan kata lain, grafik fungsi f turun bila $f'(x) < 0$.



Gambar 5.6



Gambar 5.7

Contoh 14

Bila $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, tentukan dimana grafik f naik dan grafik f turun.

Jawab:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ maka $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

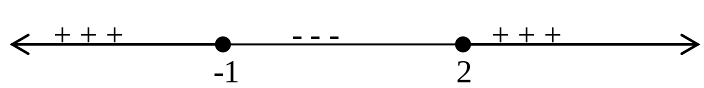
Grafik f naik bila $f'(x) > 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 > 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) > 0$

Batas-batas interval adalah $(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2$ dan $x = -1$

Untuk daerah pada garis bilangan sebelah kiri -1 itu daerah positif (+) atau negatif (-) subsitusikan sembarang bilangan sebelah kiri -1, misalnya -2 diperoleh $(-2-2)(-2+1) = (-4)(-1) = 4$ positif (+).

Untuk daerah pada garis bilangan antara -1 dan 2 itu daerah positif (+) atau negatif (-) subsitusikan sembarang bilangan sebelah kiri di antara kedua bilangan, misalnya 0 diperoleh $(0-2)(0+1) = (-2)(1) = -2$ negatif (-).

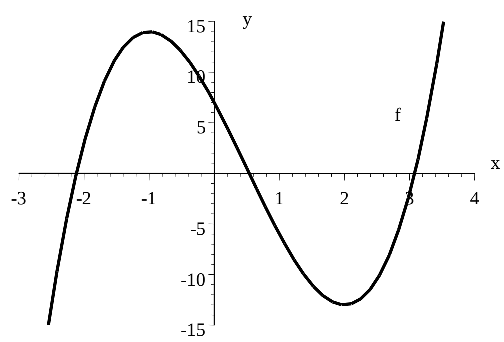
Begitu juga untuk memeriksa daerah garis bilangan sebelah kanan 2, ambil bilangan 3, kemudian subsitusikan ke $(x-2)(x+1) = (3-2)(3+1) = 1.4 = 4$ positif (+)



Grafik f naik pada interval garis bilangan yang bertanda positif (+) yaitu, $-\infty < x < -1$ dan $2 < x < \infty$.

Dengan menggunakan garis bilangan yang sama, sekaligus diperoleh interval dimana grafik f turun, yaitu pada interval garis bilangan yang bertanda negatif (-). Grafik f turun pada interval $-1 < x < 2$.

Ini sesuai dengan grafik $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ pada Gambar 8.



Gambar 5.8.

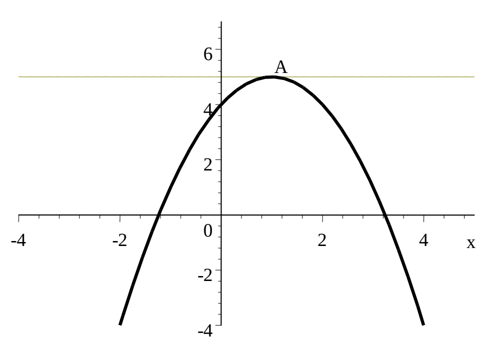
Tugas 6

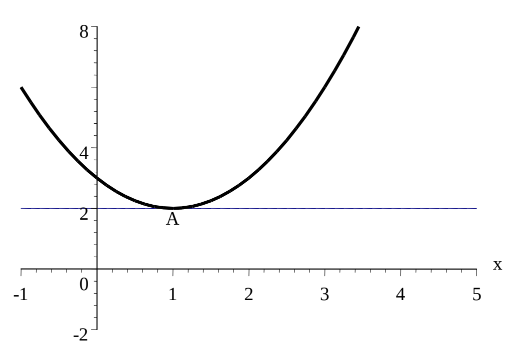
Untuk setiap fungsi di bawah ini, tentukanlah interval-interval dimana fungsi itu naik dan dimana fungsi itu turun

1. $f(x) = x^2 – 8x + 10$
2. $f(x) = 2x - x^2$
3. $f(x) = 3x – x^3$
4. $f(x) = 2x^3 – 9x^2 + 12$
5. $f(x) = 1/3\ x^3 – x^2 – 3x + 3$
6 $f(x) = x(x – 2)^2$
7. $f(x) = 1 + x – x^2 – x^3$
8. Tunjukkanlah grafik fungsi $f(x) = x^3 – 3x^2 + 3x – 10$ tidak pernah turun.

2. Titik Stasioner

Pada Gambar 5.9., sebelah kiri titik A kurva naik, dan sebelah kanan titik A kurva turun, sedangkan di titik A kurva tidak naik maupun turun, oleh karena itu A disebut titik *stasioner*. Titik stasioner *A* pada Gambar 9. ini disebut *titik balik maksimum*. Sedangkan pada dan Gambar 5.10., sebelah kiri titik A kurva turun dan sebelah kanan titik A kurva naik. Titik stasioner *A* pada Gambar 10. disebut *titik balik minimum*.
Baik pada Gambar 5.9., maupun Gambar 5.10., garis singgung di titik stasioner A sejajar dengan sumbu x, artinya gradien garis singgung grafik fungsi f di A adalah 0. Dengan kata lain, grafik f mencapai stasioner bila f ’(x) = 0.





Gambar 9

Gambar 10

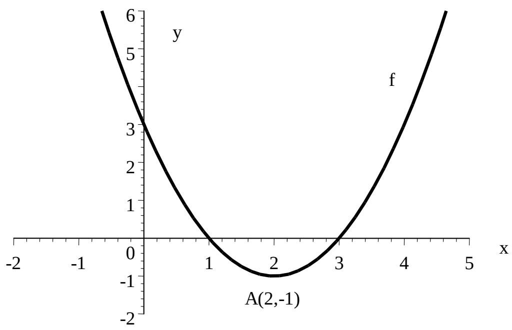
Contoh 15
Tentukan titik stasioner dan jenisnya dari grafik $f(x) = x^2-4x+3$
Jawab:

Grafik f mencapai stasioner bila f ’ (x) = 0
f(x) = x^2 – 4x + 3, maka f ’(x) = 2x -4
f ’(x) = 0, artinya 2x – 4 = 0 atau x = 2
Nilai stasionernya f(2) = 2^2 - 4.2 + 3 = -1
Jadi titik stasionernya (2,-1)
Gunakan garis bilangan berikut untuk memeriksa jenis stasioner .

- - -   + + +

2

x = 2 adalah absis titik stasioner, batas kurva naik atau turun. Daerah pada garis bilangan sebelah kiri 2 adalah negatif (-) sebab f ’(0) = 2.0 – 4 = -4 negatif (-), sedangkan sebelah kanan 2 adalah positif (+), sebab f ’(3) = 2.3 – 4 = 2 positif (+).
Sebelah kiri x = 2 kurva turun dan sebelah kanan x = 2 kurva naik, disimpulkan jenis titik stasioner (2,-1) adalah titik minimum.
Jawaban di atas sesuai dengan grafik f(x) = x^2 – 4x + 3 pada Gambar 5.11.



Gambar 5.11.

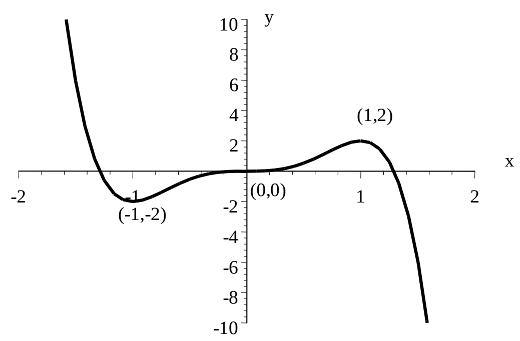
Contoh 16
Tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya dari grafik f(x) = $5x^3 – 3x^5$
Jawab:
Fungsi turunan dari f(x) = $5x^3 – 3x^5$ adalah f ’(x) = $15x^2 – 15x^4$.
Grafik f mencapai stasioner bila f ’(x) = 0 $\Rightarrow$ $15x^2 – 15x^4 = 0$ $\Rightarrow$ $15x^2(1 – x)(1 + x) = 0$,
$\Rightarrow$ $15x^2 = 0$ atau 1 – x = 0 atau 1 + x = 0, sehingga diperoleh absis titik-titik stasioner x = 0, x = 1, dan x = -1. Masing - masing ordinat titik stasionernya adalah, f(0) = 5.0^3 – 3.0^5 = 0, f(1) = $5.1^3 – 3.1^5$ = 2, dan f(1) = $5.(-1)^3 – 3.(-1)^5$ = -2, sehingga diperoleh titik-titik stasioner (0,0), (1,2) dan (-1,-2).
Untuk memeriksa jenis titik stasioner itu, digunakan garis bilangan sebagai berikut.

- - -   + + +   + + +   - - -

-1   0   1

Daerah pada garis bilangan sebelah kiri -1 adalah negatif (-) sebab bila disubsitusi oleh sebarang bilangan kurang dari -1 misalnya -1, f ’(-2) = $15(-2)^2(1 –(-2))(1 + (-2))$ = -180 adalah bilangan negatif. 2.0 – 4 = -4 negatif (-). Daerah antara -1 dan 0 adalah positif (+), sebab f ’(- ½) = 15(- ½ $)^2$(1 –(- ½))(1 + (- ½)) = $\frac{45}{16}$ adalah bilangan positif.
Daerah antara 0 dan 1 adalah positif (+), sebab f ’(½) = 15(½ $)^2$(1 – ½)(1 + ½) = $\frac{45}{16}$ adalah bilangan positif. Daerah sebelah kanan 1 negatif (-), sebab f ’(2) = $15(2)^2(1 – 2))(1 + 2)$ = -180 adalah bilangan negatif.
Titik (-1,-2) adalah titik balik minimum, karena grafik sebelah kiri titik ini turun dan sebelah kanan titik itu naik. Nilai f(-1) = -2 disebut *nilai balik minimum.*

Titik (1,2) adalah titik balik maksimum, karena grafik sebelah kiri titik ini naik dan sebelah kanan titik itu turun. Nilai f(1) = 2 disebut *nilai balik maksimim..*
Titik (0,0) bukan titik balik minimum maupun minimum, karena grafik sebelah kiri titik ini naik dan sebelah kanan titik itu naik pula. Titik (0,0) pada kurva ini disebut *titik belok.*



Gambar 5. 12.

Dari contoh di atas, secara umum, misalnya x = a memenuhi f ’(a) = 0, maka titik (a, f(a)) adalah titik balik maksimum atau titik balik maksimum atau titik belok. Jika f ’(x) ada untuk setiap titik disekitar x = a (yaitu interval kecil pada sumbu x yang memuat a) maka di sekitar x = a terdapat 4 kemungkinan untuk grafik f.

Titik (a,f(a)) merupakan titik balik maksimum dari f, bila

x	Sedikit sebelah kiri a (a^-)	a	Sedikit sebelah kanan a (a^+)
f ’(x)	Positif (+)	0	Negatif (-)

Titik (a,f(a)) merupakan titik balik minimum dari f, bila

x	Sedikit sebelah kiri a (a^-)	a	Sedikit sebelah kanan a (a^+)
f ’(x)	Negatif (-)	0	Positif (+)

Titik (a,f(a)) merupakan titik belok dari f, bila

x	Sedikit sebelah kiri a (a^-)	a	Sedikit sebelah kanan a (a^+)
f ’(x)	Positif (+)	0	Positif (+)

atau

x	Sedikit sebelah kiri a (a^-)	a	Sedikit sebelah kanan a (a^+)
f ’(x)	Negatif (-)	0	Negatif (-)

Tugas 7.
Tentukanlah nilai-nilai stasioner fungsi yang didefinisikan berikut ini dan tentukanlah jenis masing-masing nilai stasioner itu

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2 – 2x$
3. $f(x) = 4 – x^2$
4. $f(x) = x + 1/x$
5. $f(x) = x^3 – 3x$

3. Menggambar Kurva

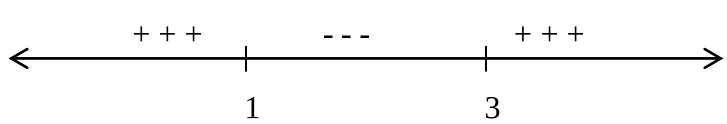
Sebelumnya telah kita belajar menggambar berbagai grafik fungsi tertentu seperti, fungsi linear, kuadrat, dan lain sebagainya. Sekarang akan belajar menggambar berbagai grafik fungsi dengan memperhatikan titik-titik stasioner, titik-titik balik maksimum, minimum, kecekungan, dan lain-lain. Kemampuan menggambar kurva merupakan hal yang sangat penting dalam pengertian dan penggunaan Kalkulus. Dalam menggambar grafik fungsi yang dapat didefinisikan, beberapa atau semua hal berikut ini sangat membantu:

(i). Titik-titik potong kurva dengan sumbu x dan sumbu y (jika mudah diterapkan).
(ii). Titik-titik stasioner dan jenisnya
(iii) Nilai-nilai f(x) untuk $x \to \infty$ atau $x \to -\infty$.

Contoh 17
Gambarlah grafik kurva $f(x) = x(x – 3)^2$
Jawab:
(i). Titik-titik potong dengan sumbu-sumbu:
Titik potong dengan sumbu y diperoleh jika x = 0 maka $f(0) = 0(0\text{-}3)^2 = 0$
Titik potong dengan sumbu y adalah (0,0).
Titik potong dengan sumbu x diperoleh jika f(x) = 0, maka $x(x\ \text{-}3)^2= 0$ diperoleh
Titik potong dengan sumbu x adalah (0,0) dan (3,0).

(ii). Titik-titik stasioner dan jenisnya;
$f(x) = x(x – 3)^2 = x(x^2 – 6x + 9) = x^3 – 6x^2 + 9x$
$f\,'(x) = 3x^2 – 12x + 9$
Titik -titik stasioner pada kurva diperoleh dari $f\,'(x) = 0$
$3x^2 – 12x + 9 = 0 \Rightarrow\ x^2 – 4x + 3 = 0 \Rightarrow\ (x\text{-}1)(x\text{-}3) = 0$
$\Rightarrow\ (x\text{-}1) = 0$ atau $(x\text{-}3) = 0 \Rightarrow\ x = 1$ atau $x = 3$
Untuk x = 1, maka $f(1) = 1(1\text{-}3)^2 = 4$, untuk x = 3 maka $f(3) = 3\ (3\text{-}3)^2 = 0$
Jadi titik-titik stasioner adalah (1, 4), dan (3, 0)

Untuk menentukan jenis stasioner, gambarlah garis bilangan

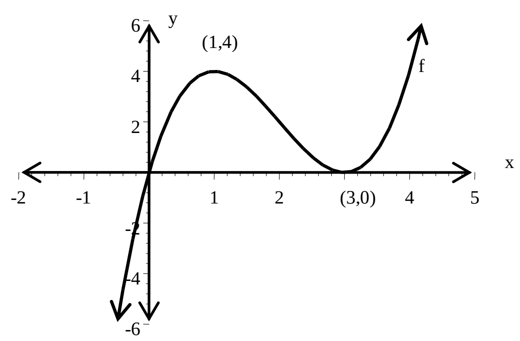


Subsitusikan nilai x sebarang sebelah kiri 1, misal x = 0 ke dalam f '(x), sehingga diproleh $f\,'(0) = 3\ (0)^2\ \text{-}12.0 + 9 = 9$ (bilangan positif), artinya daerah garis bilangan sebelah kiri 1 adalah daerah positif.
Subsitusikan nilai x sebarang sebelah kiri antara 1 dan 3, misal x = 2 ke dalam f '(x), sehingga diproleh $f\,'(2) = 3\ (2)^2\ \text{-}12.2 + 9 = 12\ \text{-}24 + 9 = \text{-}3$ (bilangan negatif), artinya daerah garis bilangan antara 1 dan 3 adalah daerah negatif.
Subsitusikan nilai x sebarang sebelah kanan 3, misal x = 4 ke dalam f '(x), sehingga diproleh $f\,'(40) = 3\ (4)^2\ \text{-}12.4 + 9 = 48\ \text{-}\ 48 + 9 = 9$ (bilangan positif), artinya daerah garis bilangan sebelah kanan 3 adalah daerah positif.

Tanda positif sebelah kiri 1 artinya grafik naik dan sebelah kanan 1 artinya grafik turun, jadi titik (1, 4) merupakan titik balik maksimum.
Tanda negatif sebelah kiri 3 artinya grafik turun dan sebelah kanqn 3 artinya grafik naik, jadi titik (3,0) merupakan titik balik minimum.

(iii) $f(x) = x(x - 3)^2$.
Untuk nilai $x \to \infty$ maka $f(x) \to \infty$ dan untuk nilai $x \to -\infty$ maka $f(x) \to -\infty$

Semua keterangan di atas memungkinkan kita menggambar kurva, seperti tampak pada Gambar 5.13.



Gambar 5.13.

Tugas 8.
Gambarlah kurva-kurva berikut ini:
1. $y = x^2 - 4$
2. $y = 8x - x^2$
3. $y = 3x - x^3$
4. $y = (5 - x)^2$
5. $y = 3x^2 - x^3$

.

C. Penerapan Turunan
1. Pemecahan masalah sehari - hari

Contoh 18
Sebidang tanah terletak sepanjang suatu tembok. Tanah itu kan dipagari untuk peternakan ayam. Pagar kawat yang tersedia panjangnya 400 m. Peternakan itu dibuat berbentuk persegi panjang . Tentukanlah ukurannya agar terdapat derah peternakan yang seluas-luasnya.
Jawab:
Pertama-tama dibuat model matematika dari soal itu, kemudian dianalisa.
Jika lebar kandang x meter maka panjangnya $(400 - 2x)$ meter. Jelaslah bahwa $x \geq 0$ dan $(400 - 2x) \geq 0$. Jadi $0 \leq x \leq 200$.
Luas kandang dalam m^2 adalah $L(x) = x(400 - 2x) = 400x - 2x^2$
$L'(x) = 400 - 4x = 4(100 - x)$ dan $L''(x) = -4$
$L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 100$, karena $L''(100) = -4 < 0$, maka L(100) nilai balik maksimum.

Jadi untuk x = 100 terdapat nilai balik maksimum L(100) = 20.000. Pada ujung-ujung interval $0 \leq x \leq 200$ terdapat L(0) = 0 dan L(200) = 0

Jadi luas maksimum yang ditanyakan adalah 20.000 m^2 yang terjadi jika lebarnya 100 m dan panjangnya 200 m.

Tugas 9.

1. Jumlah dua bilangan x dan y adalah 40, dan hasil kalinya p. Tulislah persamaan yang menyatakan hubungan antara x dan y. Kemudian nyatakan p dalam x. Tentukanlah hasil kali yang terbesar.
2. Keliling suatu persegipanjang 100 m
   a. Jika panjangnya x meter dan lebarnya y meter tulislah persamaan paling sederhana yang menyatakan hubungan antara x dan y
   b. Tulislah rumus luas L m2 untuk persegipanjang itu. Nyatakan L dalam x. Tentukanlah ukuran persegipanjang tersebut agar luasnya maksimum.
3. Sehelai karton berbentuk persegi panjang dengan lebar 5 cm dan panjang 8 cm. Pada tempat sudut karton itu dipotong bujursangkar yang sisinya x cm. Dari bangun yang didapat dibuat kotak tanpa tutup yang tingginya x cm. Tentukanlah ukuran kotak agar isinya sebanyak-banyaknya.
4. Suatu kotak alasnya berbentuk bujursangkar dengan sisi x cm dan tinggi kotak h cm, atasnya terbuka. Isi kotak 32 cm^3
   a. Tulislah persamaan yang menyatakan hubungan x dengan h.Tulislah juga rumus untuk luas permukaan kotak L cm^2 dinyatakan dengan x dan h
   b. Tunjukkan bahwa L(x) = x^2 + 128/x dan kemudian tentukanlah ukuran kotak agar bahan untuk membuat kotak itu sesedikit mungkin.

2. Pemecahan Masalah Ekonomi

Pada perusahaan yang memproduksi suatu jenis barang, laba, pendapatan, dan biaya produksi tergantung dari banyaknya barang yang diproduksi. Jika banyak barang yang diproduksi itu x unit, maka lab, pendapatan dan biaya produksi merupakan fungsi dari x. *Laba total* biasa dilambangkan dengan P(x), *pendapatan total* dilambangkan dengan R(x), dan *biaya total* dilambangkan dengan C(x). Laba merupakan selisih pendapatan dengan biaya, sehingga dapat ditulis P(x) = R(x) – C(x). Jika harga tiap unit barang itu p(x), maka pendapatan total R(x) = x p(x), sehingga diperoleh persamaan P(x) = xp(x) – C(x) atau C(x) = xp(x) – P(x).

Selanjutnya *biaya rata-rata* merupakan biaya total dibagi banyaknya barang, sehingga biaya rata-rata adalah $\hat{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ atau $\frac{\Delta C(x)}{\Delta x}$. Untuk $\Delta x \to 0$, maka $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$ ini mendefinisikan *biaya marjinal*. Dengan cara yang serupa dapat didefinisikan *pendapat marjinal* adalah $\frac{dR}{dx}$ dan *keuntungan marjinal* $\frac{dR}{dx}$.

Contoh 10

Total biaya memproduksi dan menjual x satuan barang tertentu tiap bulan adalah C(x) = 1100 + $\frac{x^2}{1200}$. Carilah biaya rata-rata tiap satuan dan biaya marjinal pada tingkat produksi 900 satuan tiap bulan.

Jawab:

Biaya rata-rata tiap satuan adalah $\hat{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1100 + \frac{x^2}{1200}}{x}$

Jika x = 900, maka biaya rata-rata tiap satuan adalah $\hat{C}$ (900) = $\dfrac{1100+\dfrac{900^2}{1200}}{900}$

= $\dfrac{1100\times1200+810.000}{900\times1200}$ = $\dfrac{2.130.000}{1.080.000}$ = 1,97

Biaya rata-rata tiap satuan barang bila diproduksi sebanyak 900 satuan adalah Rp. 1, 97

Biaya marjinal tiap bulan adalah $\dfrac{dC}{dx}=\dfrac{2x}{1200}$. Pada tingkat produksi 900 unit per bulan biaya marjinalnya adalah $\dfrac{2\times900}{1200}$ = 1,5 atau Rp. 1,50.

Contoh 11.

Total biaya untuk memproduksi dan menjual x satuan komoditas adalah

$$C(x) = \frac{80.000\,x-400\,x^2+x^3}{40.000}$$

Untuk nilai x berapa biaya rata-rata menjadi minimum?

Jawab:

Biaya rata-rata adalah $\hat{C}$ (x) = $\dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{80.000-400\,x+x^2}{40.000}$

Biaya rata-rata akan mencapai minimum bila $\dfrac{d\hat{C}}{dx}=0$

$\dfrac{d\hat{C}}{dx}=\dfrac{-400+2x}{40.000}=0$ atau 2x = 400 atau x = 200.

Agar biaya rata-rata menjadi minimum maka harus diproduksi 200 satuan

Latihan 10.

1. Dalam memproduksi dan menjual x komoditas, fungsi harga p dan fungsi biaya (dalam jutaan rupiah) adalah p(x) = 5 – 0,002 x dan C(x) = 3 + 1,1x.
   Tuliskan fungsi dari pendapatan marjinal, biaya marjinal, dan keuntungan marjinal.
2. Total biaya untuk memproduksi dan menjual 100x satuan barang tertentu tiap minggu adalah C(x) = 1000 + 33x -9x^2 + x^3. Cari (a) tingkat produksi yang membuat biaya marjinal minimum, dan (b) biaya marjinal minimum.

Soal apersepsi
1. Tentukan gradien persamaan garis yang melalui titik (x_1,y_1) dan (x_2,y_2).
2. Diketahui $f(x) = x^2$, tentukan $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
3. Tentukan x dari $f(x) = x^2 + 4x + 5$ agar f(x) bernilai minimum.

Perdalam Konsepmu
1. Manakah pernyataan yang benar di bawah ini.
   a. Jika h(x) =f(x) + g(x), maka h'(x) = f '(x) + g'(x)
   b. Jika h(x) =f(x) g(x), maka h'(x) = f '(x) g'(x)
   c. Jika h(x) = (fog)(x) maka h'(x) = (f 'og')(x)
2. Operasi manakah yang terkait dengan aturan rantai?
3. Apa bedanya f naik pada interval a < x < b dan f tidak turun pada interval a < x < b?
4. Jelaskan jenis-jenis titik ekstrim!

Rangkuman
1. Turunan dari fungsi f ditulis f ' dengan definisi f '(x) = $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
2. Turunan dari $f(x) = ax^n$ adalah $f'(x) = an\, x^{n-1}$ untuk n bilangan rasional.
3. Sifat-sifat turunan fungsi
   Bila g(x) dan h(x) fungsi-fungsi yang memiliki turunan dan k konstanta, berlaku:
   (1) Jika f(x) = k g(x) maka f '(x) = k g'(x)
   (2) Jika f(x) = u(x) + v(x) maka f ' (x) = u'(x) + v'(x)
   (3) Jika f(x) = u(x) - v(x) maka f ' (x) = u'(x) - v'(x)
   (4) Jika f(x) = u(x).v(x) maka f ' (x) = u'(x)v(x) + u(x)v(x)
   (5) Jika f(x) = $\frac{u(x)}{v(x)}$ *maka f ' (x) =* $\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$
4. Jika y = f(x) turunan dari f ditulis f '(x) oleh Leibniz dilambangkan dengan $\frac{dy}{dx}$
5. Aturan Rantai
   (1) Jika h(x) = (f(g(x)) maka h '(x) = f '(g(x)) g(x) atau
   (2) Jika y = f(u) dan u = g(x), maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$
6.. Turunan dan grafik fungsi
   (1) Grafik f naik pada interval yang memenuhi f '(x) >0
   (2) Grafik f turun pada interval yang memenuhi f '(x) <0
   (3) Grafik f mencapai stasioner pada x yang memenuhi f '(x) = 0

7. Jika fungsi pendapatan total R(x), biaya total C(x), dan laba total P(x), maka diperoleh P(x) = R(x) – C(x) = x p(x) – C(x) dengan p(x) harga penjualan untuk tiap satuan. Biaya marjinal adalah $\frac{dC}{dx}$, pendapatan marjinal $\frac{dR}{dx}$, keuntungan marjinal $\frac{dP}{dx}$, dan harga marjinal $\frac{dp}{dx}$.