

BAB 3 TRIGONOMETRI

Standar Kompetensi

Menurunkan rumus trigonometri dan penggunaannya.

Kompetensi Dasar

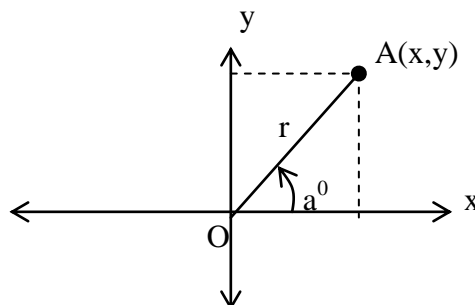
1. Menggunakan rumus sinus dan kosinus jumlah dua sudut, selisih dua sudut, dan sudut ganda untuk menghitung sinus dan kosinus sudut tertentu.
2. Menurunkan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus
3. Menggunakan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus

A. Rumus-Rumus Penjumlahan

Materi trigonometri akan dipelajari memerlukan konsep dan teorema prasyarat yang telah dipelajari di kelas X. Konsep prasyarat itu antara lain definisi dari fungsi-fungsi trigonometri dan beberapa relasinya.

Definisi : $\sin a^0$, $\cos a^0$, dan $\tan a^0$.

Misalkan pada bidang kartesius terdapat sebuah titik sebarang A (x,y) dimana OA dan sumbu x arah positif membentuk sudut yang besarnya a^0 .



Gambar 3.1

maka $OA = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dan $\sin a^0 = \frac{y}{r}$, $\cos a^0 = \frac{x}{r}$, $\tan a^0 = \frac{y}{x}$.

Dari konsep ini menurunkan nilai-nilai fungsi trigonometri untuk sudut-sudut istimewa, seperti 0^0 , 30^0 , 45^0 , 60^0 , dan 90^0 .

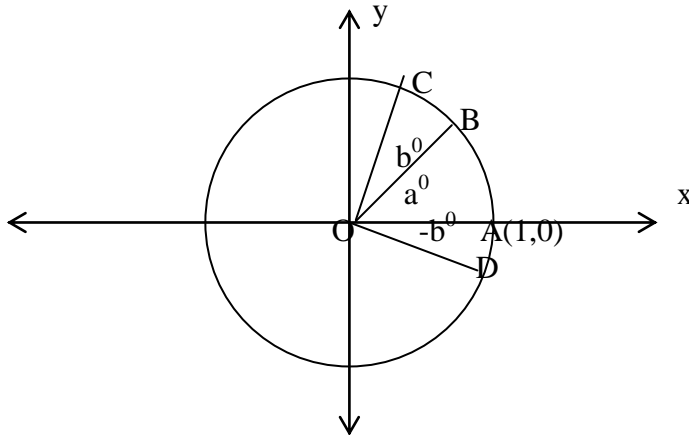
Beberapa relasi yang perlu diingat antara lain:

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1) $\tan a^0 = \frac{\sin a^0}{\cos a^0}$ | 2) $\sin^2 a^0 + \cos^2 a^0 = 1$ |
| 3) $\sin (90-a)^0 = \cos a^0$ | 4) $\cos (90-a)^0 = \sin a^0$ |
| 5) $\sin (180 -a)^0 = \sin a^0$ | 6) $\cos (180 -a)^0 = -\cos a^0$ |
| 7) $\tan (180 -a)^0 = -\tan a^0$ | 8) $\sin -a^0 = -\sin a^0$ |
| 9) $\cos -a^0 = \cos a^0$ | 10) $\tan -a^0 = -\tan a^0$ |

1. Rumus-rumus untuk $\cos (a + b)^0$ dan $\cos (a - b)^0$

Kita sudah mengetahui bahwa $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dan $\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dapat kita menentukan $\cos 75^0$ dan $\cos 15^0$ tanpa menggunakan tabel ataupun kalkulator? Tentu saja kita bisa asalkan kita memiliki rumus $\cos (a + b)^0$ dan $\cos (a - b)^0$, karena $\cos 75^0 = \cos (45+30)^0$ dan $\cos 15^0 = \cos (45 -30)^0$

Perhatikan Gambar 3.2., lingkaran yang berjari-jari 1, dan $A(1,0)$.
 Misalkan $\angle AOB = a^0$, dan $\angle BOC = b^0$ maka $\angle AOC = (a + b)^0$ dan
 $\angle BOD = (a + b)^0$



Gambar 3.2

$OA = OB = OC = OD = r = 1$ satuan, dan berdasarkan definisi maka $B(\cos a^0, \sin a^0)$?

Misalkan $B(x_1, y_1)$ dan $\angle AOB = a^0$, maka $\cos a^0 = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{OB} = \frac{x_1}{1} = x_1$, dan

$\sin a^0 = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{OB} = \frac{y_1}{1} = y_1$, sehingga $B(\cos a^0, \sin a^0)$. Dengan cara yang sama diperoleh $C(\cos (a+b)^0, \sin (a+b)^0)$ dan $D(\cos -b^0, \sin -b^0)$ atau $D(\cos b^0, -\sin b^0)$.

Ukuran sudut pusat $\angle AOC =$ ukuran sudut pusat $\angle BOD$, maka panjang tali busur $AC =$ panjang tali busur BD dan $AC^2 = BD^2$.

Masih ingat rumus jarak? Jika $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$, maka $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$
 selanjutnya $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2$

Perhatikan $A(1,0)$ dan $C(\cos (a+b)^0, \sin (a+b)^0)$,
 maka $AC^2 = (\cos (a+b)^0 - 1)^2 + (\sin (a+b)^0 - 0)^2 = (\cos (a+b)^0 - 1)^2 + (\sin (a+b)^0)^2$
 $= \cos^2 (a+b)^0 - 2 \cos (a+b)^0 + 1 + \sin^2 (a+b)^0$
 $= [\cos^2 (a+b)^0 + \sin^2 (a+b)^0] - 2 \cos (a+b)^0 + 1$
 $= 1 - 2 \cos (a+b)^0 + 1$
 $= 2 - 2 \cos (a+b)^0$.

Perhatikan $B(\cos a^0, \sin a^0)$ dan $D(\cos b^0, -\sin b^0)$,
 maka $BD^2 = (\cos b^0 - \cos a^0)^2 + (-\sin b^0 - \sin a^0)^2$
 $= (\cos^2 b^0 - 2 \cos a^0 \cos b^0 + \cos^2 a^0) + (\sin^2 b^0 + 2 \sin a^0 \sin b^0 + \sin^2 a^0)$
 $= (\sin^2 b^0 + \cos^2 b^0) + (\sin^2 a^0 + \cos^2 a^0) - 2(\cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0)$
 $= 1 + 1 - 2(\cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0)$
 $= 2 - 2(\cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0)$

$$AC^2 = BD^2 \Rightarrow 2 - 2 \cos (a+b)^0 = 2 - 2(\cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0)$$

$$\Rightarrow -2 \cos (a+b)^0 = -2(\cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0)$$

$$\Rightarrow \cos (a+b)^0 = \cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0$$

$\cos (a+b)^0 = \cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0$

Contoh 3.1

Tentukan nilai $\cos 75^0$ tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri.

Jawab:

Substitusikan $a = 45$ dan $b = 30$ ke dalam rumus $\cos (a+b)^0 = \cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0$,
 sehingga $\cos 75^0 = \cos (45 + 30)^0 = \cos 45^0 \cos 30^0 - \sin 45^0 \sin 30^0$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Bagaimana untuk menentukan nilai $\cos 15^\circ$? Kita perlu rumus $\cos (a - b)^\circ$, dan diturunkan seperti berikut.

$$\cos (a - b)^\circ = \cos (a + (-b))^\circ = \cos a^\circ \cos -b^\circ - \sin a^\circ \sin -b^\circ$$

Menurut relasi pada pendahuluan $\cos -b^\circ = \cos b^\circ$ dan $\sin -b^\circ = -\sin b^\circ$, sehingga

$$\cos (a - b)^\circ = \cos (a + (-b))^\circ = \cos a^\circ \cos b^\circ - \sin a^\circ (-\sin b^\circ)$$

$$\cos (a - b)^\circ = \cos a^\circ \cos b^\circ + \sin a^\circ \sin b^\circ$$

$$\cos (a - b)^\circ = \cos a^\circ \cos b^\circ + \sin a^\circ \sin b^\circ$$

Contoh 3.2

Tentukan nilai $\cos 15^\circ$ tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri.

Jawab:

Substitusikan $a = 45$ dan $b = 30$ ke dalam rumus $\cos (a-b)^\circ = \cos a^\circ \cos b^\circ + \sin a^\circ \sin b^\circ$, sehingga $\cos 15^\circ = \cos (45 - 30)^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

Latihan 1

- Tulislah rumus untuk $\cos (x - y)$, $\cos (A - B)$, $\cos (p + q)$ dan $\cos (X + Y)$
- Cocokkanlah apakah berlaku rumus untuk :
 - $\cos (a - b)$ jika $a = b = 1/4\pi$
 - $\cos (a + b)$ jika $a = b = 0$
- Dengan mengembangkan ruas kiri, buktikanlah bahwa:
 - $\cos (90 - a)^\circ = \sin a^\circ$
 - $\cos (90 + a)^\circ = -\sin a^\circ$
 - $\cos (180 - a)^\circ = -\cos a^\circ$
- Buktikanlah :
 - $\cos (a + b) + \cos (a - b) = 2 \cos a \cos b$
 - $\cos (a - b) - \cos (a + b) = 2 \sin a \sin b$
- Pakailah rumus penjumlahan untuk menyederhanakan:
 - $\cos M \cos N + \sin M \sin N$
 - $\cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a$
 - $\cos 100^\circ \cos 10^\circ + \sin 100^\circ \sin 10^\circ$
 - $\cos 40^\circ \cos 5^\circ - \sin 40^\circ \sin 5^\circ$
- Diketahui $\sin A = 2/5$ dan $\sin B = 7/25$. Sudut-sudut A dan B lancip. Buktikanlah bahwa $\cos (A + B) = 3/5$
- Diketahui $\tan x = 12/5$ dan $\tan y = 4/3$. Hitunglah nilai $\cos (x - y)$ dan $\cos (x + y)$ dengan menganggap x dan y sudut lancip.
- Buktikanlah : $\cos (270 + a)^\circ = \sin a^\circ$
- Buktikan : $\cos A + \cos (A + 2/3 \pi) + \cos (A + 4/3 \pi) = 0$
- Buktikanlah: $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 2[1 + \cos(x + y)]$

2. Rumus-rumus untuk $\sin(a + b)$ dan $\sin(a - b)$

Bagaimana untuk menentukan nilai $\sin 75^\circ$? Kita perlu rumus $\sin(a + b)$, dan diturunkan seperti berikut.

Telah kita ketahui relasi pada pendahuluan bahwa $\cos(90 - a) = \sin a$, akibatnya

$$\cos(90 - (a+b)) = \sin(a+b) \Leftrightarrow \cos((90-a) - b) = \sin(a+b)$$

$$\text{atau } \sin(a+b) = \cos((90-a) - b)$$

Menurut rumus $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, maka

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \cos((90-a) - b) = \cos(90-a) \cos b + \sin(90-a) \sin b \\ &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{aligned}$$

[karena $\cos(90 - a) = \sin a$ dan $\sin(90 - a) = \cos a$]

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Contoh 3.3

Tentukan nilai $\sin 75^\circ$ tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri.

Jawab:

Substitusikan $a = 45$ dan $b = 30$ ke dalam $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

$$\sin 75^\circ = \sin(45 + 30) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

Untuk menentukan nilai $\sin 15^\circ$, kita perlu rumus $\sin(a - b)$, dan diturunkan seperti berikut.

$$\sin(a - b) = \sin(a + (-b)) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b)$$

$$= \sin a \cos b + \cos a (-\sin b)$$

$$= \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Contoh 3.4

Tentukan nilai $\sin 15^\circ$ tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri.

Jawab:

Substitusikan $a = 45$ dan $b = 30$ ke dalam $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$$\text{Nilai } \sin 15^\circ = \sin(45-30) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Latihan 2

1. Tulislah rumus untuk $\sin(x + y)$, $\sin(A + B)$, $\sin(p - q)$, dan $\sin(X - Y)$.
2. Cocokkan berlakunya rumus untuk :
 - a. $\sin(a + b)$ jika $a = \frac{1}{2}\pi$ dan $b = \frac{1}{4}\pi$

- b. $\sin(a - b)$ jika $a = 1/3 \pi$ dan $b = 1/6 \pi$
3. Dengan mengembangkan ruas kiri, buktikanlah bahwa :
 - c. $\sin(90 - a)^\circ = \cos a^\circ$
 - d. $\sin(90 + a)^\circ = \cos a^\circ$
 - e. $\sin(180 + a)^\circ = -\sin a^\circ$
 4. Buktikanlah :
 - a. $\sin(a + b)^\circ + \sin(a - b)^\circ = 2 \sin a^\circ \cos b^\circ$
 - b. $\sin(a + b)^\circ - \sin(a - b)^\circ = 2 \cos a^\circ \sin b^\circ$
 5. Pakailah rumus penjumlahan untuk menyederhanakan :
 - a. $\sin M \cos N + \cos M \sin N$
 - b. $\sin 2a \cos a - \cos 2a \sin a$
 - c. $\sin 100^\circ \cos 10^\circ - \cos 100^\circ \sin 10^\circ$
 - d. $\sin 123^\circ \cos 57^\circ + \cos 123^\circ \sin 57^\circ$
 6. Diketahui $\sin A = 5/13$ dan $\cos B = 3/5$. Sudut-sudut A dan B lancip. Buktikan bahwa $\sin(A + B) = 63/65$
 7. Diketahui $\operatorname{tg} P = 3/4$ dan $\operatorname{tg} Q = 7/24$. Hitunglah nilai $\sin(P + Q)$ dan $\sin(P - Q)$ dengan menganggap bahwa P dan Q sudut-sudut lancip.
 8. Buktikan: $\sin A + \sin(A + 2/3 \pi) + \sin(A + 4/3 \pi) = 0$
 9. Diketahui $2 \cos(30 + t)^\circ = \cos(30 - t)^\circ$. Buktikanlah bahwa $\tan t = 1/\sqrt{3}$ dan kemudian tentukanlah t untuk $0^\circ < x < 360^\circ$
 10. Dari $\sin(x + 45)^\circ + 2 \cos(x + 45)^\circ = 0$, tentukanlah persamaan dalam $\tan x$. Kemudian tentukanlah x untuk $0^\circ < x < 360^\circ$.

3. Rumus-rumus untuk $\tan(a + b)^\circ$ dan $\tan(a - b)^\circ$

$$\tan(a + b)^\circ = \frac{\sin(a + b)^\circ}{\cos(a + b)^\circ} = \frac{\sin a^\circ \cos b^\circ + \cos a^\circ \sin b^\circ}{\cos a^\circ \cos b^\circ - \sin a^\circ \sin b^\circ} = \frac{\frac{\sin a^\circ \cos b^\circ + \cos a^\circ \sin b^\circ}{\cos a^\circ \cos b^\circ}}{\frac{\cos a^\circ \cos b^\circ - \sin a^\circ \sin b^\circ}{\cos a^\circ \cos b^\circ}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin a^\circ}{\cos a^\circ} + \frac{\sin b^\circ}{\cos b^\circ}}{1 - \frac{\sin a^\circ \sin b^\circ}{\cos a^\circ \cos b^\circ}} = \frac{\tan a^\circ + \tan b^\circ}{1 - \tan a^\circ \tan b^\circ}$$

$$\tan(a + b)^\circ = \frac{\tan a^\circ + \tan b^\circ}{1 - \tan a^\circ \tan b^\circ}$$

$$\tan(a - b)^\circ = \frac{\sin(a - b)^\circ}{\cos(a - b)^\circ} = \frac{\sin a^\circ \cos b^\circ - \cos a^\circ \sin b^\circ}{\cos a^\circ \cos b^\circ + \sin a^\circ \sin b^\circ} = \frac{\frac{\sin a^\circ \cos b^\circ - \cos a^\circ \sin b^\circ}{\cos a^\circ \cos b^\circ}}{\frac{\cos a^\circ \cos b^\circ + \sin a^\circ \sin b^\circ}{\cos a^\circ \cos b^\circ}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin a^\circ}{\cos a^\circ} - \frac{\sin b^\circ}{\cos b^\circ}}{1 + \frac{\sin a^\circ \sin b^\circ}{\cos a^\circ \cos b^\circ}} = \frac{\tan a^\circ - \tan b^\circ}{1 + \tan a^\circ \tan b^\circ}$$

$$\tan(a - b)^\circ = \frac{\tan a^\circ - \tan b^\circ}{1 + \tan a^\circ \tan b^\circ}$$

Catatan:

Untuk sudut-sudut yang di ukur dengan derajat terdapat rumus-rumus yang bentuknya sama.

Contoh 3.5:

Tunjukkanlah bahwa: $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$

Jawab:

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ &= \tan (45 - 30)^\circ = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \\ &= \frac{(3 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

Latihan 3

1. Kembangkanlah $\tan (x + y)$, $\tan (A + B)$, $\tan (p - q)$, dan $\tan (M - N)$
2. Cocokkanlah berlakunya rumus untuk :
 - a. $\tan (a + b)$ jika $a = b = 1/3 \pi$
 - b. $\tan (a - b)$ jika $a = b = 1/4 \pi$
3. Kembangkanlah $\tan (x + 2y)$, $\tan(3a + 2b)$, $\text{tg} (2x - y)$, $\tan(3p - 2q)$, dan $\tan(1/4 \pi - x)$
4. Jika $\tan a = 1/2$ dan $\tan b = 1/3$ buktikanlah bahwa $\tan (a + b) = 1$. Hitunglah nilai $\text{tg} (a - b)$.
5. Diketahui: $\sin A = 3/5$ dan $\cos B = 12/13$. Buktikanlah bahwa $\tan (A - B) = 16/63$, (A dan B sudut-sudut lancip)
6. Diketahui: $\cos P = 5/13$ dan $\sin Q = 4/5$. Tentukanlah nilai $\tan (P + Q)$ jika P dan Q sudut-sudut lancip.
7. Diketahui: $\sin a = 3/5$, $\tan y = 1/7$. sudut-sudut x dan y lancip. Buktikanlah tanpa daftar $x + y = 1/4 \pi$
8. Buktikan: $\tan (1/4 \pi + a) = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$
9. Pakailah rumus $\tan (a + b)$ untuk membuktikan jika $a + b = 1/4 \pi$, maka $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$
10. Jika $2x + y = 1/4 \pi$ buktikan $\tan 2x = \frac{1 - \tan y}{1 + \tan y}$

4. Rumus-rumus untuk Sudut 2a dan Pemakaiannya

(i). $\sin 2a = \sin(a + a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2 \sin a \cos a$.
Jadi: **$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$**

(ii). $\cos 2a = \cos (a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$
 $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2 \cos^2 a - 1$
 $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a$

Jadi : **$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$**

Perhatikanlah bahwa pada rumus-rumus kosinus maka kosinusnya terdapat lebih dahulu:

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2 \cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(iii). } \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 &\Rightarrow \cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos 2a) \\ \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a &\Rightarrow \sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos 2a)\end{aligned}$$

$$\text{(iv). } \tan 2a = \tan(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \cdot \tan a} = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\text{Jadi: } \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Catatan:

Untuk sudut-sudut yang diukur dengan derajat terdapat rumus-rumus yang bentuknya sama dengan rumus-rumus tersebut.

Contoh 3.6

Bila $\cos x^0 = 4/5$ untuk $0 \leq x \leq 90$, hitung $\cos 2x^0$
 $\cos 2x^0 = 2 \cos^2 x - 1 = 2(4/5)^2 - 1 = 32/25 - 1 = 7/25$

Latihan 4.

- Tulislah rumus-rumus untuk $\sin 2A$, $\cos 2A$, dan $\tan 2A$.
- Tulislah rumus-rumus untuk $\sin B$, $\cos B$, dan $\tan B$ dinyatakan dengan $\frac{1}{2} B$
- Nyatakanlah $\cos 4p$ dengan :
 - $\cos 2p$
 - $\sin 2p$
- Tulislah rumus-rumus untuk :
 - $\sin 8A$ dinyatakan dengan $4A$
 - $\cos 6B$ dinyatakan dengan $3B$
 - $\tan C$ dinyatakan dengan $\frac{1}{2} C$
- Diketahui $\sin A = 3/5$ dengan $0 < A < \frac{1}{2} \pi$. Hitunglah $\sin 2A$, $\cos 2A$, dan $\tan 2A$
- Diketahui: $\tan B = \frac{1}{2}$ dengan $0 < B < \frac{1}{2} \pi$. Hitunglah $\tan 2B$, $\cos 2B$, dan $\sin 2B$
- Nyatakanlah berikut ini dalam sinus, kosinus, atau tangen yang tunggal:

a. $2 \sin p \cos p$	e. $1 - 2 \sin^2 p$
b. $2 \cos^2 n - 1$	f. $\cos^2 5^\circ - \sin^2 5^\circ$
c. $1 - 2 \cos^2 x$	g. $\frac{2 \tan k}{1 - \tan^2 k}$
d. $\frac{2 \tan 50^0}{1 - \tan^2 50^0}$	h. $2 \sin 35 \cos 35$
- Sederhanakanlah dulu dengan rumus, kemudian hitunglah nilainya:
 - $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$
 - $2 \cos^2 30^\circ - 1$
 - $\cos \frac{1}{6} \pi - \sin 2 \frac{1}{6} \pi$
 - $\sin \frac{1}{4} \pi \cos \frac{1}{4} \pi$
- Manakah yang benar atau salah:

- a. $\cos 2x = \cos^2 x + \sin^2 x$
- b. $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x$
- c. $\operatorname{tg} 4x = \frac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x}$
- d. $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- e. $\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- f. $\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

10. Jika $\tan x = \frac{1}{2}$ dan $\tan y = \frac{1}{3}$ hitunglah:
- a. $\tan 2x$
 - b. $\tan 2y$
 - c. $\tan (2x + y)$
 - d. $\tan (x + 2y)$

B. Perkalian dan Penjumlahan Kosinus dan Sinus

Sebelumnya kita telah menurunkan dan menggunakan rumus jumlah berikut ini.

$$\begin{aligned} \cos (\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \dots\dots\dots (1) \\ \cos (\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \dots\dots\dots (2) \\ \sin (\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \dots\dots\dots (3) \\ \sin (\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

1. Perkalian Kosinus dan Perkalian Sinus

Dari rumus (1) dan (2), dengan jalan menjumlahkan, kita dapatkan

$$\begin{aligned} \cos (\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos (\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} +$$

atau $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$

Dalam rumus itu bentuk perkalian kita nyatakan dalam bentuk jumlah dari kosinus.

Contoh 3.7. $2 \cos 43^\circ \cos 35^\circ = \cos (43 + 35)^\circ + \cos (43 - 35)^\circ$
 $= \cos 78^\circ + \cos 8^\circ$

Contoh 3.8. $2 \cos 65^\circ \cos 25^\circ = \cos (65 + 25)^\circ + \cos (65 - 25)^\circ$
 $= \cos 90^\circ + \cos 40^\circ$
 $= 0 + \cos 40^\circ$
 $= \cos 40^\circ$

Contoh 3.9 $\cos 2\theta \cos \theta = \frac{1}{2} (\cos 3\theta + \cos \theta)$

Bila rumus (2) dikurangi rumus (1) diperoleh

$$\begin{aligned} \cos (\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \cos (\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) &= 2 \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} -$$

atau $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)$

Contoh 3.10. $2 \sin 47^\circ \sin 14^\circ = \cos (27 - 14)^\circ - \cos (27 + 14)^\circ$
 $= \cos 13^\circ - \cos 41^\circ$

$$\begin{aligned} \text{Contoh 3.11. } 2 \sin \frac{1}{3} \pi \sin \frac{1}{6} \pi &= \cos \frac{1}{6} \pi - \cos \frac{1}{2} \pi \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} - 0 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \end{aligned}$$

Latihan 5

Nyatakan bentuk –bentuk di bawah ini sebagai jumlah kosinus:

1. $2 \cos A \cos B$
2. $2 \cos x \cos y$
3. $2 \cos 50^\circ \cos 30^\circ$
4. $2 \cos 35^\circ \cos 15^\circ$
5. $2 \cos 53^\circ \cos 13^\circ$

Nyatakan bentuk berikut ini sebagai selisih kosinus:

6. $2 \sin A \sin B$
7. $2 \sin p \sin q$
8. $2 \sin 60^\circ \sin 20^\circ$
9. $2 \sin 25^\circ \sin 10^\circ$
10. $2 \sin 35^\circ \sin 15^\circ$

Nyatakan sebagai bentuk jumlah atau selisih kosinus, dan sederhanakan jika mungkin

11. $2 \cos (x + y) \cos (x - y)$
12. $2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$
13. $2 \sin (2x + y) \sin (2x - y)$
14. $2 \cos (\theta + \pi) \cos \frac{1}{2} (\theta - \pi)$
15. $2 \sin (A + B - C) \sin (A - B + C)$
16. $2 \sin (\theta + \frac{1}{4} \pi) \sin (\theta - \frac{1}{4} \pi)$
17. $2 \cos 200 \cos 20$
18. $2 \sin 75 \sin 15$
19. $2 \cos \frac{3}{4} \pi \cos \frac{1}{4} \pi$
20. Buktikan bahwa $2 \sin (\frac{1}{4} \pi + \alpha) = \sin (\frac{1}{4} \pi + \alpha) = \cos 2 \alpha$

2. Perkalian Kosinus dan Sinus

Bila rumus (3) dan (4) dijumlahkan, diperoleh

$$\begin{aligned} \sin (\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin (\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \hline \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta \end{aligned} +$$

atau $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$

Bila rumus (3) dikurangi (4), diperoleh

$$\begin{aligned} \sin (\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin (\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \hline \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \sin \beta \end{aligned} -$$

atau $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)$

Contoh 3.12:

Nyatakan $2 \sin 41^\circ \cos 47^\circ$ sebagai jumlah atau selisih sinus.

Dengan rumus $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$ diperoleh

$$2 \sin 41^\circ \cos 47^\circ = \sin 88^\circ + \sin (-6^\circ) = \sin 88^\circ - \sin 6^\circ$$

Dengan rumus $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)$ diperoleh
 $2 \sin 41^\circ \cos 47^\circ = 2 \cos 47^\circ \sin 41^\circ = \sin 88^\circ - \sin 6^\circ = \sin 88^\circ - \sin 6^\circ$

Latihan 6

Nyatakan bentuk di bawah ini sebagai jumlah sinus :

1. $2 \sin A \cos B$
2. $2 \sin 50 \cos 30$
3. $2 \sin 35 \cos 15$

Nyatakan masing-masing dalam bentuk selisih sinus :

4. $2 \cos p \sin q$
5. $2 \cos 75 \sin 5$
6. $2 \cos 25 \sin 75$

Nyatakan dalam bentuk jumlah atau selisih sinus, dan sederhakan jika mungkin :

7. $2 \sin (\theta + \frac{1}{2}\pi) \cos (\theta - \frac{1}{2}\pi)$
8. $2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$
9. $2 \cos (\frac{1}{4}\pi + \alpha) \sin (\frac{1}{4}\pi - \alpha)$
10. Buktikan bahwa $4 \sin 18 \cos 36 \sin 54 = 1 + 2 \sin 18 - \cos 36$

Tampaklah sekarang pentingnya mengingat-ingat keempat rumus tadi, yaitu :

$$\begin{aligned} 2 \cos \alpha \cos \beta &= \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) \\ 2 \sin \alpha \sin \beta &= \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) \\ 2 \sin \alpha \cos \beta &= \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) \\ 2 \cos \alpha \sin \beta &= \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) \end{aligned}$$

3. Jumlah dan Selisih

Dari bagian A telah diketahui:

$$\begin{aligned} \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta \\ \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta \\ \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta \\ \cos (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Misal $\alpha + \beta = C$ maka $\alpha = \frac{1}{2} (C + D)$, dan misal $\alpha - \beta = D$ maka $\beta = \frac{1}{2} (C - D)$. Dengan mensubstitusi α dan β diperoleh :

$$\begin{aligned} \cos C + \cos D &= 2 \cos \frac{1}{2} (C + D) \cos \frac{1}{2} (C - D) \\ \cos C - \cos D &= -2 \sin \frac{1}{2} (C + D) \sin \frac{1}{2} (C - D) \\ \sin C + \sin D &= 2 \sin \frac{1}{2} (C + D) \cos \frac{1}{2} (C - D) \\ \sin C - \sin D &= 2 \cos \frac{1}{2} (C + D) \sin \frac{1}{2} (C - D) \end{aligned}$$

Contoh 3.13

Sederhanakan $\sin 32^\circ + \sin 28^\circ$

Jawab:

$$\sin 32^\circ + \sin 28^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 2^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 2^\circ = \cos 2^\circ$$

Latihan 7

Nyatakan bentuk-bentuk di bawah ini sebagai bentuk perkalian dan sesederhana mungkin :

1. $\cos A + \cos B$
2. $\cos 3x + \cos x$
3. $\cos 40 + \cos 10$
4. $\cos 80 + \cos 40$
5. $\cos A - \cos B$
6. $\cos 4x - \cos 2x$
7. $\cos 50 - \cos 20$
8. $\cos P - \cos Q$
9. $\cos Y - \cos 3Y$
10. $\cos 40 - \cos 20$
11. $\sin P + \sin Q$
12. $\sin 5X + \sin X$
13. $\sin 25 + \sin 15$
14. $\sin Y + \sin 3Y$
15. $\sin 170 + \sin 10$
16. $\sin A - \sin B$
17. $\sin 3X - \sin X$
18. $\sin 44 - \sin 22$
19. $\sin 2Y - \sin 4Y$
20. $\sin 100 - \sin 80$
21. $\sin (2\alpha + \beta) + \sin (2\alpha - \beta)$
22. $\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)$
23. $\sin (x + h) - \sin x$
24. $\cos (x + h) - \cos x$
25. $\sin (\frac{1}{2} \pi - \theta) + \sin (\frac{1}{2} \pi + \theta)$

C. Identitas dan Persamaan Trigonometri

1. Identitas

Contoh 3.14:

Buktikan identitas:

$$(i) \quad 2 \cos a (\cos \frac{1}{2} a + \sin \frac{1}{2} a)^2 = 2 \cos a + \sin 2a$$
$$(ii) \quad \frac{1 - \cos 2a}{\sin 2a} = \tan a$$

Bukti:

$$(i). \text{ Ruas kiri} = 2 \cos a (\cos^2 \frac{1}{2} a + 2 \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} a + \sin^2 \frac{1}{2} a)$$
$$= 2 \cos a (1 + \sin a)$$
$$= 2 \cos a + 2 \cos a \sin a$$
$$= 2 \cos a + \sin 2 a$$
$$= \text{ruas kanan}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii). Ruas kiri} &= 1 - (1 - 2 \sin^2 a) \\
&= \frac{2 \sin^2 a}{2 \sin a \cdot \cos a} \\
&= \frac{\sin a}{\cos a} \\
&= \tan a \\
&= \text{ruas kanan}
\end{aligned}$$

Latihan 8

Buktikanlah identitas berikut ini:

1. $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + \sin 2a$
2. $(\cos a - \sin a)^2 = 1 - \sin 2a$
3. $(\cos a + \sin a)(\cos a - \sin a) = \cos 2a$
4. $\cos^4 b - \sin^4 b = \cos 2b$
5. $(2 \cos b - 1)(2 \cos b + 1) = 2 \cos 2b + 1$
6. $(\cos \frac{1}{2} b - \sin \frac{1}{2} b)^2 = 1 - \sin b$
7. $\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} = \tan a$
8. $\frac{1 - 2 \cos 2a}{1 + \cos 2a} = \tan^2 a$
9. $\frac{2 \tan b}{1 + \tan^2 b} = \sin 2b$
10. $\frac{1 - \tan^2 b}{1 + \tan^2 b} = \cos 2b$
11. Dengan memakai $\cos 4a = 2 \cos^2 2a - 1$ dan $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$, buktikanlah $\cos 4a = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1$
12. Dengan cara seperti soal no. 11, nyatakanlah $\cos 4a$ dalam perpangkatan dari $\sin a$
13. a. Dengan memakai $\sin^2 A = \frac{1}{2} (1 - \cos 2A)$ buktikanlah bahwa $\cos^4 a = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2a + \frac{1}{4} \cos^2 2a$
b. Kemudian tunjukkanlah bahwa : $\cos^4 b = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos^2 b + \frac{1}{8} \cos^4 b$
14. a. Dengan memakai $\sin^2 A = \frac{1}{2} (1 - \cos 2A)$ nyatakanlah $\sin 4 A$ dalam bentuk $a + b \cos^2 A + c \cos^2 2A$
b. Kemudian nyatakanlah $\sin^4 p$ dalam bentuk $d + e \cos^2 p + f \cos^4 p$
15. Nyatakanlah $\sin^2 p \cos^2 p$ dalam bentuk $a + b \cos^4 p$
16. Dengan menyatakan $3A$ sebagai $2A + A$ buktikan :
a. $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$
b. $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$
17. Buktikan bahwa :
a. $\frac{\sin 4\theta + \sin 2\theta}{\cos 4\theta + \cos 2\theta} = \tan 3\theta$ b. $\frac{\cos 3\theta - \cos 5\theta}{\sin 3\theta - \sin \theta} = 2 \sin 2\theta$
18. Jika $x = \sin 3\theta + \sin \theta$ dan $y = \cos 3\theta + \cos \theta$, buktikan :
a. $x + y = 2 \cos \theta (\sin 2\theta + \cos 2\theta)$
b. $x/y = \tan 2\theta$
c. $x^2 + y^2 = 2 + 2 \cos 2\theta$
19. a. Buktikan $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sin 2x \sin 3x} = \frac{1}{\cos x}$ $x \neq 0, 60, 90, 120, 180, \dots$
b. Carilah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan :

$$\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sin 3x \sin 3x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ untuk } 0 < x < 60$$

20. Jika $\sin \alpha + \sin \beta = k$ dan $\cos \alpha + \cos \beta = m$, buktikan:

- $k + m = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) [\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)]$
- $k = m \tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$
- $k^2 + m^2 = 2 [1 + \cos(\alpha - \beta)] = 4 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

2. Persamaan Trigonometri

Contoh 3.15:

Selesaikanlah persamaan $\cos 2x^\circ + \sin x^\circ = 0$, jika $x \in \mathbb{R}$ dan $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

Jawab:

$$\cos x^\circ + \sin x^\circ = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x^\circ + \sin x^\circ = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x^\circ - \sin x^\circ - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x^\circ - 1)(2 \sin x^\circ + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x^\circ = 1 \text{ atau } -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 90^\circ ; 210^\circ ; \text{ atau } 330^\circ$$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{ 90^\circ, 210^\circ, 330^\circ \}$

Latihan 9

Selesaikanlah persamaan berikut untuk $0 \leq x \leq 360$ dan $x \in \mathbb{R}$

- $\sin 2x^\circ + \sin x^\circ = 0$
- $\sin 2x^\circ - \cos x^\circ = 0$
- $\cos 2x^\circ - \cos x^\circ = 0$
- $\cos 2x^\circ - \sin x^\circ = 0$
- $\cos 2x^\circ - 3 \cos x^\circ + 2 = 0$
- $\cos 2x^\circ - 3 \sin x^\circ - 1 = 0$
- $\cos 2x^\circ - 4 \sin x^\circ + 5 = 0$
- $\cos 2x^\circ - \sin x^\circ - 1 = 0$
- $\cos 2x^\circ + 5 \cos x^\circ - 2 = 0$
- $\cos 2x^\circ + 3 \cos x^\circ + 2 = 0$
- $\cos 2x^\circ + \cos x^\circ = 0$
- $5 \cos 2x^\circ - \cos x^\circ = 0$
- $3 \sin 2x^\circ + 5 \cos x^\circ = 0$
- $6 \cos 2x^\circ - 5 \cos x^\circ + 4 = 0$
- $4 \cos 2x^\circ - 2 \sin x^\circ = 0$
- $5 \cos 2x^\circ + 7 \sin x^\circ + 7 = 0$

Selesaikanlah persamaan berikut untuk $0 \leq a \leq 2\pi$ dan $a \in \mathbb{R}$

- $\sin 2a - \sin a = 0$

18. $\sin 2a + \cos a = 0$
19. $\cos 2a + \cos a = 0$
20. $\cos 2a + \sin a = 0$

Latihan (PR)

1. Carilah nilai maksimum dan minimum dari :
 a. $\sin x$ b. $\cos x$ c. $2 \sin x$ d. $3 \cos x$ e. $\sin 2x$
2. Nyatakan $2 \cos (x + 45) \cos (x - 45)$ sebagai jumlah atau selisih, dan kemudian carilah nilai maksimum dan minimum dari perkalian itu.
3. Ulangi soal no. 2 untuk :
 a. $2 \cos (x + 30) \cos (x - 30)$ b. $2 \sin (\theta + \frac{3}{4} \pi) \sin (\theta - \frac{3}{4} \pi)$
4. Sederhanakan: $2 \cos 50 \cos 40 - 2 \sin 95 \sin 85$
5. Buktikan: $2 \sin 3\alpha \sin 4\alpha + 2 \cos 5\alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha = \cos \alpha$
6. Buktikan: $(2 \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{3}{2} \theta) + (2 \sin \frac{5}{2} \theta + \sin \frac{3}{2} \theta) - (2 \sin \frac{3}{2} \theta \cos \frac{7}{2} \theta) = \sin 4 \theta + \sin 5 \theta$
7. Buktikan: $\sin 3\beta + (\cos\beta + \sin\beta) (1 - 2 \sin 2\beta) = \cos 3\beta$
8. Dengan tidak menggunakan table, buktikan:
 $\sin 52 \sin 68 - \sin 47 \cos 77 - \cos 65 \cos 81 = \frac{1}{2}$
9. Nyatakan $\sin \alpha \sin 3\alpha$ dalam bentuk selisih kosinus. Kemudian carilah jumlah 6 suku pertama dari deret:
 $\sin \alpha \sin 3\alpha + \sin 2\alpha \sin 6\alpha + \sin 4\alpha \sin 12\alpha + \dots$
10. Carilah 6 suku pertama deret:
 $\cos 96\alpha \sin 32\alpha + \cos 48\alpha \sin 16\alpha + \cos 24\alpha \sin 8\alpha + \dots$

Prakata Bab 3

Tidak dapat dipungkiri bahwa konsep dan aturan trigonometri sangat diperlukan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan baik dalam maupun di luar matematika. Pemodelan persoalan-persoalan dalam bidang fisika dan berbagai bidang teknologi seperti permesinan, elektro, geodesi dan lain sebagainya banyak yang terkait dengan fungsi, persamaan, atau pertidaksamaan trigonometri. Hal ini disebabkan fungsi trigonometri merupakan fungsi periodik.

Untuk memahami konsep dan aturan trigonometri secara keseluruhan, perlu dipelajari secara bertahap penurunan kesamaan (identitas) fungsi trigonometri dari penjumlahan dua sudut, sudut ganda, dan kesamaan dari penjumlahan atau perkalian fungsi trigonometri. Begitu pula aplikasi kesamaan-kesamaan tersebut untuk membuktikan identitas trigonometri lainnya dan menyelesaikan persamaan trigonometri.

Apersepsi

1. Jika A (-3, 4) dan α^0 adalah ukuran sudut yang dibentuk oleh sinar OA dan sumbu x arah positif. Tentukan $\sin \alpha^0$, $\cos \alpha^0$, dan $\tan \alpha^0$.
2. Jika $0 \leq x \leq 360$ dan $\sin x^0 = \frac{1}{2} \sqrt{3}$, tentukan x. Kemudian carilah $\cos x$ dan $\tan x$.

Perdalam Konsepmu!

Apakah $\sin 2x = 2 \sin x$

Apakah $\cos^2 x = \cos x^2$

RANGKUMAN

Kesamaan fungsi trigonometri dari penjumlahan/ pengurangan dua sudut

$$\cos (a + b)^0 = \cos a^0 \cos b^0 - \sin a^0 \sin b^0$$

$$\cos (a - b)^0 = \cos a^0 \cos b^0 + \sin a^0 \sin b^0$$

$$\sin (a + b)^0 = \sin a^0 \cos b^0 + \cos a^0 \sin b^0$$

$$\sin (a - b)^0 = \sin a^0 \cos b^0 - \cos a^0 \sin b^0$$

$$\tan (a + b)^0 = \frac{\tan a^0 + \tan b^0}{1 - \tan a^0 \tan b^0}$$

$$\tan (a - b)^0 = \frac{\tan a^0 - \tan b^0}{1 + \tan a^0 \tan b^0}$$

Kesamaan fungsi trigonometri sudut ganda

$$\sin 2a^0 = 2 \sin a^0 \cos a^0$$

$$\cos 2a^0 = \cos^2 a^0 - \sin^2 a^0 = 2 \cos^2 a^0 - 1 = 1 - 2 \sin^2 a^0$$

$$\tan 2a^0 = \frac{2 \tan a^0}{1 - \tan^2 a^0}$$

Kesamaan perkalian fungsi sinus dan cosinus

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)$$

Kesamaan penjumlahan fungsi sinus dan penjumlahan cosinus

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{1}{2} (C + D) \cos \frac{1}{2} (C - D)$$

$$\cos C - \cos D = -2 \sin \frac{1}{2} (C + D) \sin \frac{1}{2} (C - D)$$

$$\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{1}{2} (C + D) \cos \frac{1}{2} (C - D)$$

$$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{1}{2} (C + D) \sin \frac{1}{2} (C - D)$$