BAB 7
LIMIT FUNGSI

Standar Kompetensi

Menggunakan konsep limit fungsi dan turunan fungsi dalam pemecahan masalah

Kompetensi Dasar

1. Menjelaskan secara intuitif arti limit fungsi di suatu titik dan di takhingga
2. Menggunakan sifat limit untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar dan trigonometri

A. Pengertian Limit Fungsi

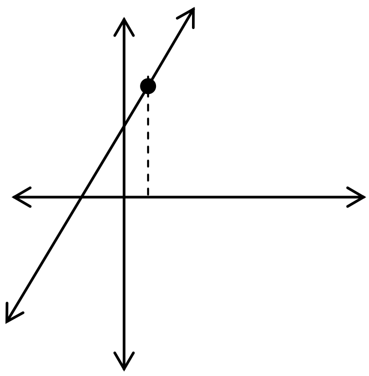
1. Limit f(x) untuk x $\rightarrow$ c

Tinjau sebuah fungsi f(x) = $\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$, apakah fungsi f tersebut sama dengan fungsi g(x) = x -2 ? Daerah asal dari fungsi g adalah semua bilangan real, sedangkan daerah asal fungsi f adalah bilangan real tetapi x $\neq$ 1. Dengan demikian g(x) $\neq$ f(x) sebab daerah asal dan daerah hasilnya tidak sama. Nilai fungsi g untuk x = 1 adalah g(1) = 1 -2 = -1, sedangkan nilai f untuk x = 1 tidak terdefinisi sebab f(1) = $\dfrac{1^2+1-2}{1-1}$ = $\dfrac{0}{0}$ merupakan bentuk tak tentu.

Pertanyaan selanjutnya, apakah untuk x sekitar 1 nilai f itu ada? Dengan menggunakan kalkulator, coba kita cari nilai-nilai f untuk nilai-nilai x yang dekat dengan 1, seperti 0,9, 0,95, 0,99 juga 1,1, 1,05, dan 1,01 seperti terlihat dalam tabel 7.1.

Tabel 7.1

x	$\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$
0,9	2,9
0,95	2,95
0,99	2,99
1	Tidak terdefinisi
1,01	3,01
1,05	3,05
1,1	3,1



Gambar 7.1

Ternyata nilai f untuk sekitar x = 1 mendekati 3 baik untuk didekati dari kiri (bilangan kurang dari 1) maupun dari kanan (bilangan lebih dari 1).
Nilai f (x) untuk x sekitar 1 disebut nilai limit f(x) untuk x menuju 1 ditulis

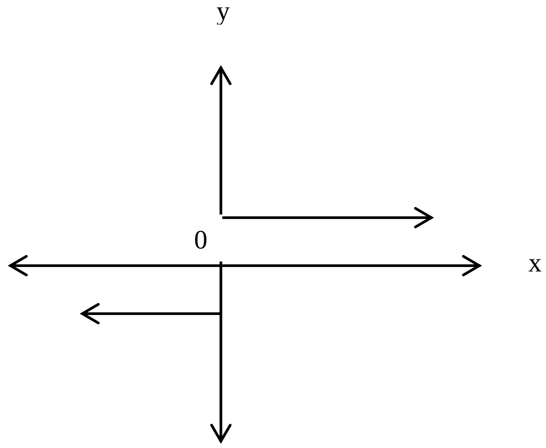
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 3$$

Nilai atau bilangan real x sekitar 1 maksudnya bilangan-bilangan x yang selisihnya dengan 1 sangat kecil (mendekati 0).

Sekarang perhatikan g(x) = $\frac{|x|}{x}$ untuk x = 0 jelas nilai g tak terdefinisi. Sekarang kita cari nilai-nilai g untuk x sekitar 0 baik dari sebelah kiri 0 atau sebelah kanan 0.

Tabel 7.2

x	$\frac{\lvert x\rvert}{x}$
-0,1	-1
-0,01	-1
-0,001	-1
1	Tidak terdefinisi
0,00	1
0,01	1
0,1	1



Gambar 7..2.

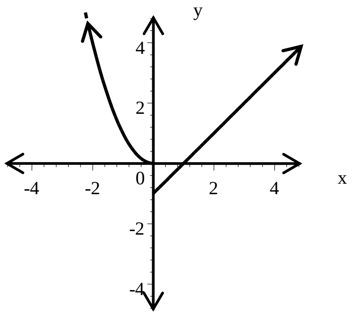
Dari sebelah kiri 0 nilai g adalah -1, sedangkan untuk nilai sebelah kanan 0 adalah 1. Nilai g untuk x sekitar 0 berbeda, bila demikian $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ tidak ada

Tugas 1

Apabila ada, carilah nilai limit berikut ini.

1. $\lim_{x\to -1} 3$
2. $\lim_{x\to -2} 2x$
3. $\lim_{x\to 2} 4x-6$
4. $\lim_{x\to 2} x^2$
5. $\lim_{x\to 3} x^3$
6. $\lim_{x\to 5} \sqrt{x-4}$
7.. $\lim_{x\to -1} |x|$
8. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$
9. Periksa apakah $\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ ada!

10. Perhatikan grafik fungsi f berikut ini, dengan f(x) = $\begin{cases} x^2, x < 0 \\ x - 1, x \geq 0 \end{cases}$

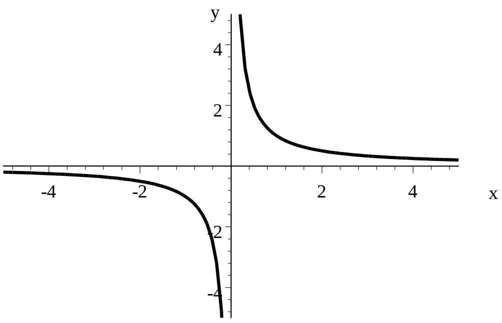


Gambar 7. 3

Apakah $\lim_{x \to 0} f(x)$ ada? Berikan alasan!

2. Limit Fungsi di Takhingga dan Limit Fungsi Bernilai Takhingga

Perhatikan fungsi f(x) = $\frac{1}{x}$, x $\neq$ 0



Gambar 7.4

Untuk nilai-nilai x > 0, ternyata nilai f makin kecil mendekati 0, tetapi tidak menyentuh 0

Tabel 6.3

x	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
$x \to 0$	?	$x \to 0$	?
…			
…			
0,0001	10000	-0,0001	
0,001	1000	-0,001	
0,01	100	-0,01	-100
0,1	10	-0,1	-10
0,5	2	-0,5	-2
1	1	-1	-1
2	0,5	-2	-0,5
4	0,25	-4	-0,25
10	0,1	-10	-0,1
20	0,05	-20	-0,05
50	0,02	-50	-0,02
100	0,01	-100	-0,01
1.000	0,001	-1.000	-0,001
10.000	0,0001	-10.000	-0,0001
…		…	
…		…	
$x \to \infty$	?	$x \to -\infty$	?

Berdasarkan Gambar 7. 4 dan Tabel 7.3, dapat disimpulkan untuk $x \to \infty$ maka nilai f(x) = $\frac{1}{x} \to 0$, demikian pula $x \to -\infty$ nilai f(x) = $\frac{1}{x} \to 0$.

Dengan demikian dapat ditetapkan

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ **(2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ **(4)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

(1) dan (2) adalah nilai limit fungsi di takhingga, sedangkan (3) dan (4) disebut limit fungsi bernilai takhingga (∞ atau $-\infty$).

Dari fakta $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ dapat diturunkan bahwa untuk k bilangan asli $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0$

Bukti:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \left(\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)\right)^k = 0^k = 0$$

Contoh 7.1

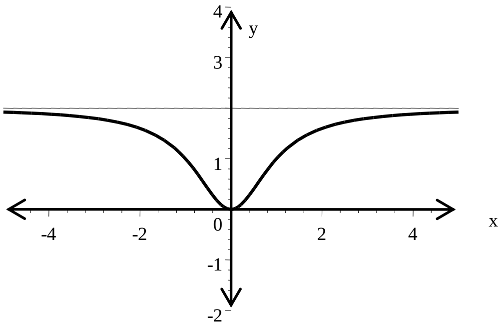
Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1}$

Jawab:

Grafik f(x) = $\frac{2x^2}{x^2+1}$ terlihat seperti pada Gambar 6.5.

Untuk menghitung nilai limit tersebut, bagilah pembilang dan penyebut oleh x^2,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1+0} = 2$$



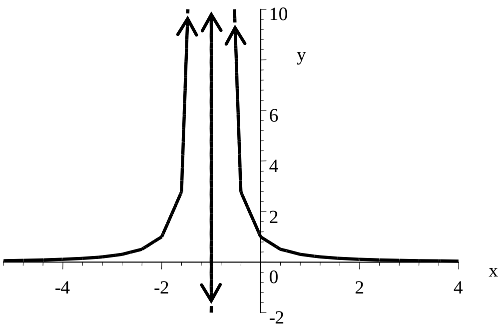
Gambar 6.5

Contoh 7.2

Periksa apakah nilai $\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}$ ada ?

Jawab:

Grafik dari f(x) = $\frac{1}{(x+1)^2}$ terlihat seperti pada Gambar 6.6



Gambar 6.6

Bila $x \to -1^-$, maka $(x + 1)^2 \to 0^+$, dan $\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{(x+1)^2} = \infty$,

Bila $x \to -1^+$, maka $(x + 1)^2 \to 0^+$, dan $\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{(x+1)^2} = \infty$.

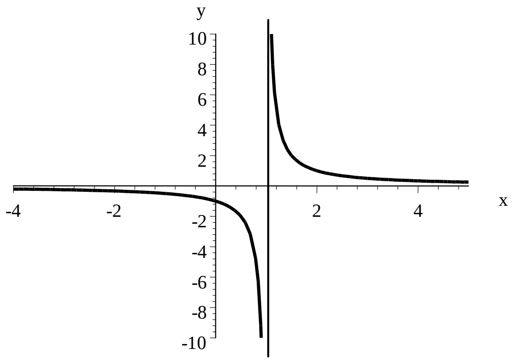
Karena nilai limit kiri sama dengan nilai limit kanan maka $\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2} = \infty$ (ada)

Contoh 7.3

Periksa apakah nilai $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ ada ?

Jawab:

Grafik dari f(x) = $\dfrac{1}{x-1}$ terlihat seperti pada Gambar 6.7



Gambar 6.7

Bila x $\to$ 1^-, maka (x - 1) $\to$ 0^-, dan $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1}$ = - ∞,

Bila x $\to$ 1^+, maka (x - 1) $\to$ 0^+, dan $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1}$ = ∞.

Karena nilai limit kiri tidak sama dengan nilai limit kanan, maka $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ tidak ada.

Latihan 2

Periksa apakah nilai limit berikut ada ?

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+3}{1-2x}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{x^2+2}$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+3x+2}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2}{(x-1)^3}$
5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

B. Sifat-sifat Limit Fungsi

Bila n bilangan asli, k suatu konstanta, serta f dan g fungsi yang memiliki limit di x = c, maka

(1) $\boldsymbol{\lim_{x \to c} k = k}$

(2) $\boldsymbol{\lim_{x \to c} x = c}$

(3) $\boldsymbol{\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)}$

(4) $\boldsymbol{\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)}$

(5) $\boldsymbol{\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)}$

(6) $\boldsymbol{\lim_{x \to c} f(x).g(x)] = \lim_{x \to c} f(x).\lim_{x \to c} g(x)}$

(7) $\boldsymbol{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}, \lim_{x \to c} g(x) \neq 0}$

(8) $\boldsymbol{\lim_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n}$

(9) $\boldsymbol{\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}}$

Contoh 7.4

Tentukan $\lim_{x \to 3} 4x^2$

Jawab:

$$\lim_{x \to 3} 4x^2 \underset{\overset{\uparrow}{(3)}}{=} 4 \lim_{x \to 3} x^2 \underset{\overset{\uparrow}{(8)}}{=} 4 \, [\lim_{x \to 3} x]^2 \underset{\overset{\uparrow}{(2)}}{=} 4 \, [3]^2 = 36$$

Contoh 7.5

Tentukan $\lim_{x \to 2} (2x^3 - 4x)$

Jawab:

$$\lim_{x \to 2} (2x^3 - 4x) \underset{\overset{\uparrow}{(5)}}{=} \lim_{x \to 2} 2x^3 - \lim_{x \to 2} 4x \underset{\overset{\uparrow}{(3)}}{=} 2 \lim_{x \to 2} x^3 - 4 \lim_{x \to 2} x \underset{\overset{\uparrow}{(8)}}{=} 2(\lim_{x \to 2} x)^3 - 4 \lim_{x \to 2} x$$

$$\underset{\overset{\uparrow}{(2)}}{=} 2.(2)^3 - 4.2 = 8$$

Contoh 7.6

Tentukan $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{10 - x^2}}{2x}$

Jawab:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{10 - x^2}}{2x} \underset{(7)}{=} \frac{\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{10 - x^2}}{\lim\limits_{x \to 1} 2x} \overset{(9)}{\underset{(3)}{=}} \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 1} 10 - x^2}}{2 \lim\limits_{x \to 1} x} \overset{(5)}{\underset{(2)}{=}} \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 1} 10 - \lim\limits_{x \to 1} x^2}}{2.1}$$

$$\overset{(1)}{\underset{(8)}{=}} \frac{1}{2} \sqrt{10 - (\lim_{x \to 1} x)^2} \underset{(2)}{=} \frac{1}{2} \sqrt{10 - 1} = 4,5$$

Teorema Subsitusi

Ingat kembali fungsi sukubanyak f yang memiliki bentuk

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Juga fungsi rasional dengan pembilang dan penyebutnya berupa fungsi sukubanyak dengan bentuk

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Jika f suatu fungsi sukubanyak atau fungsi rasional, maka $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)}$

Untuk f fungsi rasional syaratnya adalah nilai fungsi penyebut tidak nol untuk x = c.

Contoh 7.7

Hitunglah $\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 - 3)$

Jawab:

Karena f(x) = $2x^3 - 3$ adalah suatu fungsi sukubanyak, maka

$\lim\limits_{x \to 2} 2x^2 - 3$ = f(2) = 2.2^2 -3 = 5

Contoh 7.8

Carilah $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{7x^3 + x^2 - 5x - 40}{3x^2 + x - 10}$

Jawab:

$$\lim_{x \to 2} \frac{7x^3 + x^2 - 5x - 40}{3x^2 + x - 10} = f(2) = \frac{7(2)^3 + (2)^2 - 5.2 - 40}{3.2^2 + 2 - 10} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$$

Contoh 7.9

Carilah $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Karena untuk x = 2 nilai fungsi pembilang dan penyebut sama dengan 0, maka Teorema Subsitusi tidak berlaku. Bentuk 0/0 disebut bentuk tak tentu, dan untuk mencari nilai limitnya dilakukan penyederhanaan aljabar dengan faktorisasi seperti berikut.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x+1) = 3$$

Pembilang dan penyebut dapat dibagi (x-2) sebab untuk $x \to 2$, $x - 2 \neq 0$

Contoh 7.10

Carilah $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 3x - 10}{x^2 - 5x + 2}$

Jawab:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3x - 10}{x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}$$ pembilang dan penyebut dibagi x^2.

Berdasarkan teorema utama limit diperoleh

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + 3\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} - 10\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 - 5\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + 2\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

Contoh 7.11

Carilah $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \frac{2+0}{\sqrt{1}} = 2$$

Pembilang dan penyebut dibagi x dan ingat di dalam tanda akar harus dibagi x^2, karena x = $\sqrt{x^2}$

Contoh 7.12

Carilah $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{2x^2+3x} - \sqrt{2x^2-5})$

Jawab:

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{2x^2+3x} - \sqrt{2x^2-5}) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{2x^2+3x} - \sqrt{2x^2-5}) \times \frac{\sqrt{2x^2+3x} + \sqrt{2x^2-5}}{\sqrt{2x^2+3x} + \sqrt{2x^2-5}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\frac{(2x^2+3x)-(2x^2-5)}{\sqrt{2x^2+3x} + \sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x\to-\infty} (\frac{3x+5}{\sqrt{2x^2+3x} + \sqrt{2x^2-5}}) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\frac{3+\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{3}{x}} + \sqrt{2-\frac{5}{x^2}}}) = \frac{3+0}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2+0}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Latihan 3

Carilah nilai limit berikut ini.

1. $\lim\limits_{x\to3} \sqrt{3x-5}$

2. $\lim\limits_{y\to2} \left(\frac{4y^2+8y}{y+4}\right)^{1/3}$

3. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2+7x+10}{x+2}$

4. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$

5. $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2-14-51x-2}{x^2-4x-21}$

Untuk soal nomor 6 sampai dengan 8 diketahui $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 3$ dan 4. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -1$

Carilah nilai limit berikut.

6. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$

7. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{g(x)}[f(x)+3]$

8. $\lim_{x \to a} \left[|f(x)| + |3g(x)| \right]$

Untuk soal nomor 9 dan 10. carilah $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ apabila $\lim_{x \to a} f(x) = 3$

9. f(x) = $3x^2 + 2x + 1$

10. f(x) = $\frac{3}{x^2}$

Hitunglah

11. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x-5)(3-x)}$

12. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 1}}$

13. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{x^3 - 1}$

14. $\lim_{y \to -\infty} \frac{9y^3 + 1}{y^2 - 2y + 2}$

15. $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

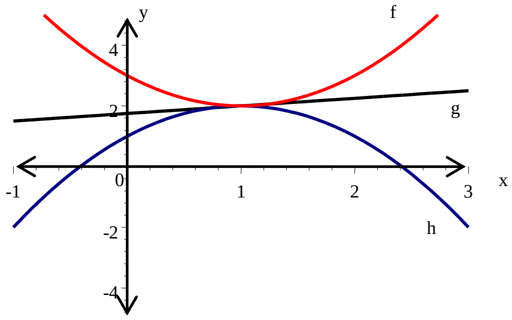
C. Limit Fungsi Trigonometri

Pada fungsi trigonometri sering digunakan dua macam satuan sudut yaitu derajat dan radian. Simbol sin x^0 berarti satuan yang digunakan adalah satuan derajat, sedangkan bila satuan radian disimbolkan sin x saja. Dalam limit trigonometri satuan yang digunakan adalah satuan radian.

Seperti telah kita ketahui bahwa 1 putaran = 360^0 = 2π radian = 2.(3,14) radian, atau 1 radian $\approx$ 57, 3^0 . Perlu diingat bahwa satuan radian tidak pernah ditulis dibelakang ukuran sudut. Jadi bila ukuran sudut tidak ada simbul derajatnya berarti satuannya adalah radian. Sebagai contoh, sin 30 tidak sama dengan sin30^0 , sin 30^0 = ½ tetapi sin 30 artinya sin 30 radian = - 0,99.

Sebelum kita membicarakan limit fungsi trigonometri, sekarang perhatikan suatu teorema yang penting mengenai limit fungsi yang dikenal dengan **Teorema Apit:**

Misalkan f, g, dan h adalah fungsi yang memenuhi f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) untuk semua x yang memuat c. Jika $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \to c} g(x) = L$



Gambar 4

Sebagai contoh, perhatikan sketsa grafik f, g, dan h pada Gambar 4., f(x) = x^2 -2x + 3,
g(x) = ¼ x + 7/4, dan h(x) = $-x^2$ + 2x +1. Untuk -1 ≤ x ≤ 3 terlihat f(x)≤ g(x) ≤ h(x). sehingga

$$\lim_{x\to 1} f(x) \le \lim_{x\to 1} g(x) \le \lim_{x\to 1} h(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1}(x^2 - 2x + 3) \le \lim_{x\to 1} g(x) \le \lim_{x\to 1}(-x^2 + 2x + 1)$$

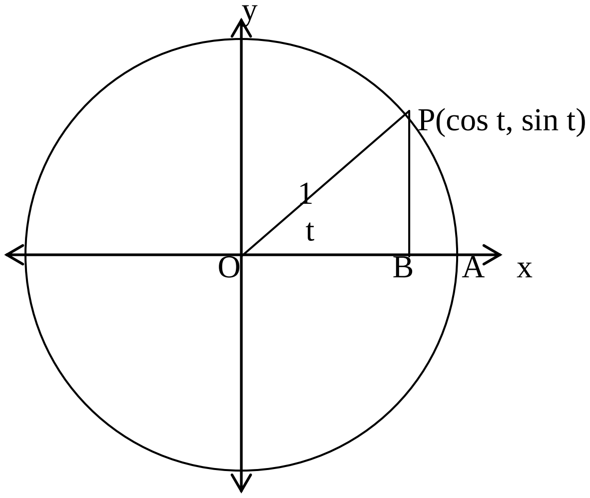
$$\Rightarrow 2 \le \lim_{x\to 1}(\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}) \le 2 \Rightarrow \lim_{x\to 1}(\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}) = 2$$

Teorema

1. $\lim_{t\to c} \sin t = \sin c$
2. $\lim_{t\to c} \cos t = \cos c$
3. $\lim_{t\to c} \tan t = \tan c$
4. $\lim_{t\to c} \cot t = \cot c$
5. $\lim_{t\to c} \sec t = \sec c$
6. $\lim_{t\to c} \csc t = \csc c$

Ambil kasus untuk c = 0, akan ditunjukkan bahwa $\lim_{t\to 0} \sin t = 0$. Misalkan t > 0 dan titik A,B, dan P dengan lingkaran berjari-jari satu satuan (lingkaran satuan). Dari Gambar 5., dapat diperoleh kesimpulan 0 < BP < Busur AP. Sedangkan BP = $\frac{BP}{1}$ = sin t dan panjang busur AP = $\frac{t}{2\pi} \times 2\pi.1$ = t, sehingga disimpulkan 0 < sin t < t. Berdasarkan teorema apit

0 < $\lim_{t\to 9} \sin t < \lim_{t\to 0} t$ ⇒ 0< $\lim_{t\to 9} \sin t < 0 \Rightarrow \lim_{t\to 9} \sin t = 0$.



Gambar 5.

Selanjutnya dengan menggunakan identitas trigonometri dapat dicari

$$\lim_{t\to 0}\cos t = \lim_{t\to 0}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\lim_{t\to 0}\sin t\right)^2} = \sqrt{1-0^2} = 1$$

Sekarang akan ditunjukkan $\boldsymbol{\lim_{t\to c}\sin t = \sin c}$. Misalkan h = t –c, sehingga h $\to$ 0 ekivalen dengan t $\to$ c

$$\lim_{t\to c}\sin t = \lim_{h\to 0}\sin(c+h) = \lim_{h\to 0}\left(\sin c\cos h + \cos c\sin h\right)$$

Ingat identitas sin (A + B) = sin A cos B + cos A sin B

$\lim_{h\to 0}\left(\sin c\cos h + \cos c\sin h\right) = \sin c\lim_{h\to 0}\cos h + \cos c\lim_{h\to 0}\sin h$ = sin c. 1 + cos c. 0 = sin c.

Dengan menggunakan identitas cos t = $\sqrt{1-\sin^2 t}$ dapat ditunjukkan $\boldsymbol{\lim_{t\to c}\cos t = \cos c}$

$$\lim_{t\to c}\cos t = \lim_{t\to c}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\lim_{t\to c}\sin t\right)^2} = \sqrt{1-\sin^2 c} = \sqrt{\cos^2 c} = \cos c.$$

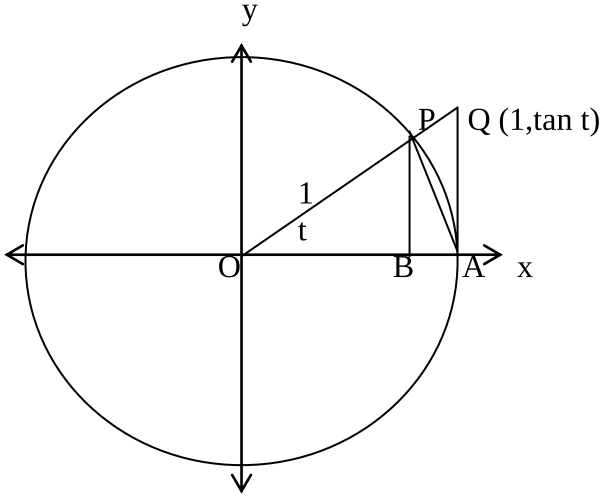
Teorema Limit Trigonometri Khusus

1. $\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1$
2. $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$
3. $\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t} = 1$
4. $\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t} = 1$

Bukti:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$$

Perhatikan luas daerah Δ OAB, luas juring OAB, dan luas daerah Δ OAQ pada Gambar 6., diperoleh kesimpulan



Gambar 5.

Luas daerah Δ OAP $\leq$ Luas Juring OAP $\leq$ Luas daerah Δ OAQ

Luas daerah Δ OAP = $\dfrac{alas\times tinggi}{2}=\dfrac{OA\times BP}{2}=\dfrac{1\times\sin t}{2}=\dfrac{\sin t}{2}$

Luas Juring OAP = $\dfrac{t\times luas\,\text{lingkaran}}{2\pi}=\dfrac{t\times\pi(1)^2}{2\pi}=\dfrac{t}{2}$

Luas daerah Δ OAQ = $\dfrac{alas\times tinggi}{2}=\dfrac{OA\times AQ}{2}=\dfrac{1\times\tan t}{2}=\dfrac{\tan t}{2}$

Selanjutnya diperoleh

$$\frac{\sin t}{2}\leq\frac{t}{2}\leq\frac{\tan t}{2}\Rightarrow \sin t\leq t\leq\tan t\Rightarrow 1\leq\frac{t}{\sin t}\leq\frac{1}{\cos t}$$

$$\lim_{t\to 0}1\leq\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\leq\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos t}\Rightarrow 1\leq\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\leq\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\cos t}\Rightarrow 1\leq\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\leq 1.$$

Berdasarkan Teorema Apit disimpulkan $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$

Bukti:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\dfrac{t}{\sin t}}\right)=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}}=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\dfrac{\sin t}{\cos t}}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t\cos t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{\cos t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos t}=$$

1 . 1 = 1

Contoh 7.13

Carilah nilai limit berikut

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}$

Jawab:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 4\dfrac{\sin 4x}{4x} = 4 \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}$

Misalkan y = 4x, jika x $\to$ 0, maka y $\to$ 0 dan 4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}$ = 4 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}$ = 4.1 = 4.

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{6x}}{\dfrac{\tan 2x}{6x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\tan 2x}{2x}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{2x}}$

Misalkan y = 3x dan z = 2x, jika x $\to$ 0, maka y $\to$ 0 dan z$\to$0

$$\frac{\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{2x}}=\frac{\dfrac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}{\dfrac{1}{3}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\tan z}{z}}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

Latihan 3

Hitunglah

1. (a) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos^2 t}{1+\sin t}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\tan x}{\sin x}$

2. (a) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin 3\theta}{2\theta}$ (b) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan 5\theta}{\sin 2\theta}$

3. (a) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(3t)+4t}{t\sec t}$ (b) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos 2t}{t^2}$

4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$ (b) $\lim\limits_{z \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 z}{1 - \sin z}$

5. Hitunglah $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ untuk

(a) f(x) = sin x (b) f(x) = tan x

Prakata bab 7
Konsep limit fungsi diciptakan para matematikawan untuk dapat mendefinisikan konsep turunan fungsi dengan baik. Dengan demikian sifat-sifat turunan fungsi pun dengan sendirinya didasarkan atas sifat-sifat limit fungsi. Oleh karena itu agar dapat memahami konsep turunan fungsi dengan baik, diperlukan pemahaman limit fungsi beserta sifat-sifatnya.

Soal Apersepsi

1. Diketahui f(x) = $\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$, apakah nilai f(4) ada?
2. Diketahui deret 2 + 1 + ½ + ¼ + ..., tentukan julah deret tersebut untuk n $\to \infty$

Perdalam konsepmu
1. Apakah syaratnya agar $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ada?

2. Diketahui f(x) = $\dfrac{ax^m}{bx^n}$, tentukan $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
 a. jika m = n
 b. jika m < n
 c. jika m > n

Rangkuman
1. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ = L artinya nilai f(x) di sekitar c adalah L

2. (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{k}\right)^k=0$

3. Sifat-sifat limit fungsi
Bila n bilangan asli, k suatu konstanta, serta f dan g fungsi yang memiliki limit di x = c, maka

(1) $\lim\limits_{x\to c} k = k$

(2) $\lim\limits_{x\to c} x = c$

(3) $\lim\limits_{x\to c} kf(x) = k\lim\limits_{x\to c} f(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x)+\lim\limits_{x\to c} g(x)$

(5) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x)-\lim\limits_{x\to c} g(x)$

(6) $\lim\limits_{x\to c} f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x).\lim\limits_{x\to c} g(x)$

(7) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}, \lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$

(8) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to c} f(x)]^n$

(9) $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$

4. Limit fungsi Trigonometri dengan satuan ukuran sudut radian

(1). $\lim\limits_{t \to c} \sin t = \sin c$ (2). $\lim\limits_{t \to c} \cos t = \cos c$

(3). $\lim\limits_{t \to c} \tan t = \tan c$ (4). $\lim\limits_{t \to c} \cot t = \cot c$

(5). $\lim\limits_{t \to c} \sec t = \sec c$ (6). $\lim\limits_{t \to c} \csc t = \csc c$

(7). $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (8). $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$

(9). $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\tan t}{t} = 1$ (10). $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{\tan t} = 1$

Prakata bab 8

Turunan fungsi merupakan sebagai bagian dari topik hitung diferensial, yang didasrkan atas gagasan (ide) laju perubahan yang dikembangkan sekitar permulaan abad ketujuh belas. Newton matematikawan Inggris dan Leibniz matematikawan Jerman merupakan orang –orang yang paling berjasa dalam mengembangkan ide dan metoda hitung diferensial. Limit fungsi yang melandasi konsep turunan baru dikembangkan dalam abad kesembilanbelas.

Soal apersepsi

1. Tentukan gradien persamaan garis yang melalui titik (x_1,y_1) dan (x_2,y_2).
2. Diketahui f(x) = x^2, tentukan $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
3. Tentukan x dari f(x) = x^2 + 4x + 5 agar f(x) bernilai minimum.

Perdalam Konsepmu

1. Manakah pernyataan yang benar di bawah ini.
   a. Jika h(x) =f(x) + g(x), maka h'(x) = f '(x) + g'(x)
   b. Jika h(x) =f(x) g(x), maka h'(x) = f '(x) g'(x)
   c. Jika h(x) = (fog)(x) maka h'(x) = (f 'og')(x)
2. Operasi manakah yang terkait dengan aturan rantai?
3. Apa bedanya f naik pada interval a < x < b dan f tidak turun pada interval a < x < b?
4. Jelaskan jenis-jenis titik ekstrim!

Rangkuman

1. Turunan dari fungsi f ditulis f ' dengan definisi f '(x) = $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
2. Turunan dari f(x) = ax^n adalah f '(x) = $an\, x^{n-1}$ untuk n bilangan rasional.

3. Sifat-sifat turunan fungsi

Bila g(x) dan h(x) fungsi-fungsi yang memiliki turunan dan k konstanta, berlaku:

(1) Jika f(x) = k g(x) maka f '(x) = k g'(x)

(2) Jika f(x) = u(x) + v(x) maka f ' (x) = u'(x) + v'(x)

(3) Jika f(x) = u(x) - v(x) maka f ' (x) = u'(x) - v'(x)

(4) Jika f(x) = u(x).v(x) maka f ' (x) = u'(x)v(x) + u(x)v(x)

(5) Jika f(x) = $\frac{u(x)}{v(x)}$ *maka f ' (x) =* $\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

4. Jika y = f(x) turunan dari f ditulis f '(x) oleh Leibniz dilambangkan dengan $\frac{dy}{dx}$

5. Turunan fungsi Trigonometri

(1) Jika f(x) = sin x maka f '(x) = cos x

(2) Jika f(x) = cos x maka f '(x) = -sin x

(3) Jika f(x) = tan x maka f '(x) = $\frac{1}{cos^2 x}$

6. Aturan Rantai

(1) Jika h(x) = (f(g(x)) maka h '(x) = f '(g(x)) g(x) atau

(2) Jika y = f(u) dan u = g(x), maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

7. Turunan dan grafik fungsi

(1) Grafik f naik pada interval yang memenuhi f '(x) >0

(2) Grafik f turun pada interval yang memenuhi f '(x) <0

(3) Grafik f mencapai stasioner pada x yang memenuhi f '(x) = 0

(4) Grafik f cekung ke atas pada interval yang memenuhi f "(x) >0

(5) Grafik f cekung ke bawah turun pada interval yang memenuhi f "(x) <0

(6) Titik (a,f(a)) merupakan titik balik maksimum bila f '(a) = 0 dan f "(a) < 0

(7) Titik (a,f(a)) merupakan titik balik minimum bila f '(a) = 0 dan f "(a) > 0

(8) Titik (a,f(a)) merupakan titik belok bila f "(a) = 0