

## BAB 4 PERSAMAAN LINGKARAN

### STANDAR KOMPETENSI:

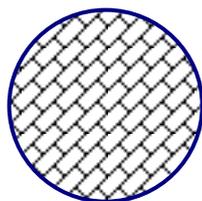
Menyusun persamaan lingkaran dan garis singgungnya.

### KOMPETENSI DASAR

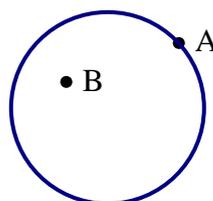
- Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan
- Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi

#### A. Persamaan Lingkaran

Sejak di sekolah dasar kita sudah mengenal bentuk lingkaran. Dalam matematika lingkaran didefinisikan sebagai himpunan atau tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu. Titik tertentu itu selanjutnya disebut pusat lingkaran, dan jaraknya disebut ukuran jari-jari. Perlu di bedakan antara lingkaran dan daerah dalam lingkaran, seperti pada Gambar 4.1., yang berwarna biru adalah lingkaran dan daerah yang diarsir adalah daerah dalam lingkaran. Titik A pada Gambar 4.2., terletak pada lingkaran, sedangkan titik B tidak terletak pada lingkaran tapi pada daerah dalam.



Gambar 4.1

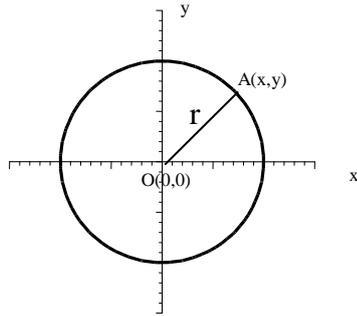


Gambar 4.2.

Dalam bidang kartesius, tiap titik dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut  $(x,y)$ , sehingga himpunan titik-titik yang terletak pada lingkaran tertentu memenuhi persamaan tertentu yang disebut persamaan lingkaran.

#### 1. Persamaan Lingkaran yang Pusatnya $(0,0)$ dan Jari-jari $r$

Misalkan  $A(x,y)$  terletak pada lingkaran dengan pusat  $O(0,0)$  dan jari-jari  $r$  seperti terlihat pada Gambar 3., maka  $OA = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = r \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$ .



Gambar 4.3

Jadi persamaan lingkaran yang berpusat di  $(0,0)$  dan jari-jari  $r$  memiliki persamaan  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Contoh 4.1

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di  $(0,0)$  dan melalui titik  $A(-3,4)$

Jawab:

Persamaan lingkaran yang pusatnya  $O(0,0)$  dan jari-jari  $r$  adalah  $x^2 + y^2 = r^2$ .

$$r = OA = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

Jadi persamaan lingkaran yang berpusat di  $(0,0)$  dan melalui titik  $A(-3,4)$  adalah  $x^2 + y^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$ .

Contoh 4.2

Diketahui titik  $A(0,1)$  dan  $B(0,9)$ . Tentukan persamaan tempat kedudukan  $P(x,y)$  sehingga  $PB = 3PA$ .

Jawab:

$$\begin{aligned} PB = 3PA &\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-9)^2} = 3 \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} \\ &\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-9)^2} = 3 \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\ &\Rightarrow x^2 + (y-9)^2 = 9(x^2 + (y-1)^2) \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - 18y + 81 = 9(x^2 + y^2 - 2y + 1) \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - 18y + 81 = 9x^2 + 9y^2 - 18y + 9 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - 18y + 81 = 9x^2 + 9y^2 - 18y + 9 \\ &\Rightarrow -8x^2 - 8y^2 = -72 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \end{aligned}$$

**Latihan 1.**

1. Tuliskan persamaan lingkaran yang berpusat di  $O(0,0)$  dengan jari-jari
  - a. 5
  - b. 8
  - c. 9
  - d. 1,2
  - e. a
2. Carilah persamaan lingkaran dengan pusat  $O(0,0)$  dan melalui titik
  - a.  $(2,3)$
  - b.  $(-1,2)$
  - c.  $(4,0)$
  - d.  $(-6,-8)$
3. Tentukan pusat dan jari-jari dari masing-masing lingkaran berikut.
  - a.  $x^2 + y^2 = 36$
  - b.  $x^2 + y^2 = 12$
  - c.  $4x^2 + 4y^2 = 9$
4. Carilah persamaan lingkaran dengan pusat sama dengan pusat lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$ , tetapi jari-jarinya dua kali jari-jari lingkaran tersebut.
5. Periksa titik titik manakah yang terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$

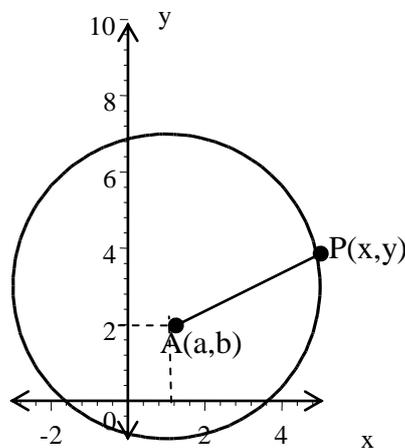
- a. (3,4)                      b. (2,5)                      c. (-5,0)                      d. (-2,-3)
6. a. Jika A(0,1) dan B(0,4) tentukan persamaan tempat kedudukan . titik P yang memenuhi  $PB = 2PA$
- b. Jika A(0,-1) dan B(0,-25) tentukan persamaan tempat kedudukan . titik P yang memenuhi  $PB = 5PA$

## 2. Persamaan Lingkaran dengan Pusat A(a,b) dan Jari-jari r

Misalkan titik P(x,y) terletak pada lingkaran dengan pusat A(a,b) dengan jari-jari r,

$$\text{maka } AP = r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Persamaan  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  ini merupakan persamaan lingkaran yang titik pusatnya (a, b) dan jari-jarinya r.



Gambar 4.4.

### Contoh 4.3

Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat (3,4) dengan jari-jari 5

Jawab:

$$\text{Persamaan lingkaran itu adalah } (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

### Latihan 2

- Tuliskan persamaan lingkaran dengan pusat dan jari-jari berikut.
  - (1,1), 3
  - (0,3), 4
  - (5,0), 2
  - (-5,2), 7
- Carilah persamaan lingkaran
  - pusat (6,8) melalui O(0,0)
  - pusat (-2,0) melalui (3,4)
- Carilah pusat dan jari-jari dari setiap lingkaran berikut.
  - $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$
  - $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 49$
- Tentukan persamaan lingkaran yang konsentrik (sepusat) dengan lingkaran  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$ , tetapi memiliki jari-jari dua kali jari-jari lingkaran tersebut.
- Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (1,5) dan menyinggung sumbu x.
- Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (2,-1) dan menyinggung sumbu y.

7. Tentukan empat persamaan lingkaran berjari-jari 3 yang menyinggung sumbu x dan sumbu y.
8. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui O(0,0) dan A(4,6) dengan OA adalah diameter..
9. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui B(-3,5) dan C(1, -1) dan BC adalah diameter.
10. Diketahui A(1,2), B(4,6), dan C(1,6). Buktikan  $\angle ACB$  siku-siku, dan tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik A, B, dan C.

### 3. Persamaan Umum Lingkaran

Persamaan lingkaran dengan titik pusat (a,b) dan jari-jari r adalah  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$\Rightarrow$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Bila  $-2a = A$ ,  $-2b = B$  dan  $C = a^2 + b^2 - r^2$ , maka persamaan  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$  dapat ditulis sebagai  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ .

Dengan demikian bila diketahui persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ , maka dari koordinat titik pusatnya  $(a,b) = (-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$  dan jari-jari  $r =$

$$\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}.$$

Contoh 4.4

Tentukan persamaan umum lingkaran yang pusatnya (3, -4) dan jari-jari 5.

Jawab:

Misalkan persamaan umum lingkaran itu  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ .

Absis titik pusatnya  $a = 3$ , maka  $A = -2a = -6$ . Ordinat titik pusatnya  $b = -4$ ,  $B = -2b = 8$ .

$C = a^2 + b^2 - r^2 = 3^2 + (-4)^2 - 5^2 = 0$ . Jadi persamaan lingkaran dengan pusat (3,-4) dan jari-jari 5 adalah  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 0 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ .

Contoh 4.5

Tentukan koordinat titik pusat lingkaran dan jari-jari dari persamaan:

$$x^2 + y^2 + 12x - 10y - 30 = 0.$$

Jawab:

$A = 12$ ,  $B = -10$ , dan  $C = -30$

Titik pusatnya  $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$  dan jari-jarinya  $r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}$

Titik pusatnya  $(-\frac{1}{2} \cdot 12, -\frac{1}{2}(-10)) = (-6, 5)$

Jari-jarinya  $r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C} = \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{-10}{2}\right)^2 - (-30)} = \sqrt{36 + 25 + 30} = 9$ .

### Latihan 3

1. Tentukan pusat dan jari-jari setiap lingkaran berikut.

a.  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$

b.  $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

c.  $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

d.  $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

2. Tentukan pusat dan jari-jari setiap lingkaran berikut.

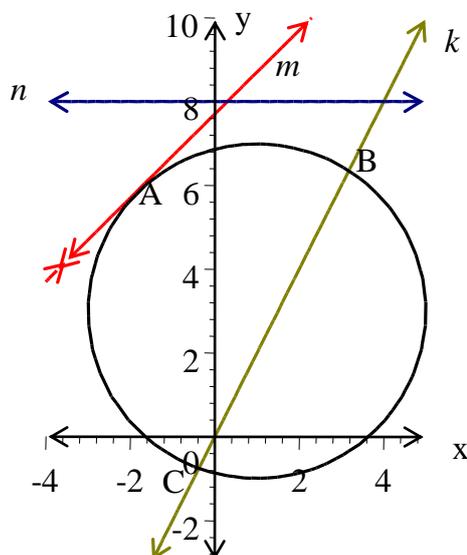
a.  $4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 11 = 0$

b.  $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 0$

3. Manakah yang merupakan persamaan lingkaran?
  - a.  $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$
  - b.  $2x + 3y - 4 = 0$
  - c.  $x^2 + y^2 - 5 = 0$
  - d.  $2x^2 + 3y^2 + x - y = 0$
  - e.  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 6$
  - f.  $x^2 + y^2 + xy - x - y + 1 = 0$
4. Tentukan h jika titik (h,3) terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 + 13x + 5y + 6 = 0$
5. Tentukan k jika titik (-5,k) terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 + 2x - 5y - 21 = 0$
6. Jika (1,2) terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 + 2fx + 3y + 1 = 0$ , tentukan f.
7. Jika (-1,2) terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 - 5x + 2gy - 6 = 0$ , tentukan g.
8. Jika lingkaran  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  melalui O(0,0), (1,3) dan (5,-5), tentukan A, B, dan C.
9. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui (0,-1), (2,3), dan (1,6).
10. Tentukan persamaan lingkaran luar segitiga OAB bila A(-2,4), B(-1,7), dan O(0,0)

### B. Garis Singgung Lingkaran

Misalkan kita memiliki sebuah lingkaran dan sebuah garis, maka kedudukan lingkaran dengan garis itu ada 3 kemungkinan: (i) saling berpotongan di dua titik, (ii) berpotongan di satu titik, dan (iii) tidak beririsan seperti terlihat pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5

Garis *k* memotong lingkaran di dua titik B dan C, garis *m* yang memotong lingkaran tepat di satu titik A, sedangkan garis *n* tidak memotong lingkaran. Garis yang tepat memotong lingkaran tepat di satu titik seperti garis *m* pada Gambar 4.5., disebut *garis singgung lingkaran*.

#### 1. Persamaan garis singgung melalui $A(x_1, y_1)$ pada Lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

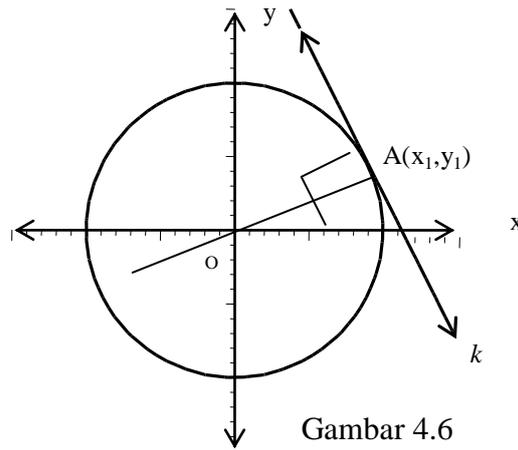
Perhatikan Gambar 6., garis  $k$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  di titik  $A(x_1, y_1)$ .

Garis singgung lingkaran  $k$  itu memiliki sifat tegaklurus terhadap garis  $OA$ . Titik

$O(0,0)$  dan  $A(x_1, y_1)$ , maka garis  $OA$  memiliki gradien  $m_1 = \frac{y_1}{x_1}$ . Karena garis  $k$

tegaklurus garis  $OA$  maka gradien garis singgung  $k$  adalah  $m_2 = \frac{-x_1}{y_1}$  (kedua garis

saling tegaklurus bila hasil kali gradiennya  $m_1 \cdot m_2 = -1$ )



Gambar 4.6

Titik  $A(x_1, y_1)$  pada lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$ , maka  $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ . Selanjutnya persamaan garis  $k$  yang melalui  $A(x_1, y_1)$  dengan gradien  $m_2$  adalah  $y - y_1 = m_2(x - x_1)$

$$\Rightarrow y - y_1 = \frac{-x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y_1 y - y_1^2 = -x_1 x + x_1^2$$

$$\Rightarrow x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

Dengan demikian diperoleh kesimpulan:

Jika titik  $A(x_1, y_1)$  pada lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$ , maka garis singgung lingkaran yang melalui titik  $A$  adalah  $x_1 x + y_1 y = r^2$ .

Contoh 4.6:

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$  melalui titik  $(4, -3)$ .

Jawab:

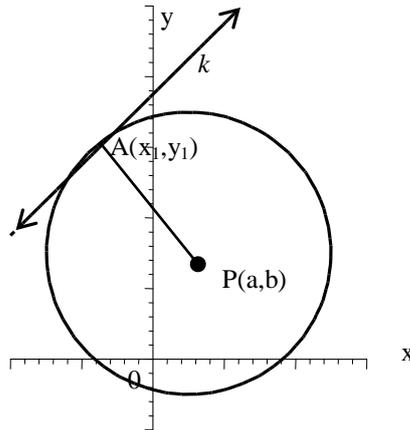
Periksa apakah titik  $(4, -3)$  pada lingkaran atau tidak, dengan mensubstitusi ke dalam persamaan lingkaran  $4^2 + (-3)^2 = 16 + 9 = 25$ . Artinya titik  $(4, -3)$  pada lingkaran.

Karena titik  $(4, -3)$  pada lingkaran maka rumus yang digunakan untuk menentukan persamaan garis singgungnya adalah  $x_1 x + y_1 y = r^2$  dengan  $x_1 = 4$  dan  $y_1 = -3$ , sehingga persamaan garis singgung itu  $4x - 3y = 25$ .

2. Persamaan garis singgung melalui  $A(x_1, y_1)$  pada Lingkaran  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Perhatikan Gambar 4.7, titik  $A(x_1, y_1)$  pada lingkaran  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  dan  $k$  adalah garis singgung lingkaran yang melalui titik  $A$ . Pusat lingkaran  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  adalah  $P(a,b)$ , gradien garis  $PA$  adalah  $m_1 = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$ . Karena garis  $k$  tegak lurus  $PA$ ,

maka gradiennya adalah  $m_2 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$



Gambar 4.7.

Persamaan garis  $k$  yang melalui  $A(x_1, y_1)$  dengan gradien  $m_2 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$  adalah

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b} (x - x_1) \Rightarrow (y - y_1)(y_1 - b) = -(x_1 - a)(x - x_1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_1 y - by - y_1^2 + by_1 &= -x_1 x + x_1^2 + ax - ax_1 \\ \Rightarrow (x_1 x - ax) + (y_1 y - by) &= (x_1^2 - ax_1) + (y_1^2 - by_1) \\ \Rightarrow (x_1 x - ax - ax_1 + a^2) + (y_1 y - by - by_1 + b^2) &= (x_1^2 - ax_1 - ax_1 + a^2) + (y_1^2 - by_1 - by_1 + b^2) \\ \Rightarrow (x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) &= (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 \\ \Rightarrow (x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) &= r^2 \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh kesimpulan:

Jika titik  $A(x_1, y_1)$  pada lingkaran  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  maka garis singgung lingkaran yang melalui titik  $A$  adalah  $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

Contoh 4.7:

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $(x - 4)^2 + (y + 3) = 25$  melalui titik  $(7, 1)$ .

Jawab:

Periksa apakah titik  $(7, 1)$  pada lingkaran atau tidak, dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan lingkaran  $(7 - 4)^2 + (1 + 3) = 9 + 16 = 25$ . Artinya titik  $(7, 1)$  pada lingkaran.

Karena titik  $(7, 1)$  pada lingkaran maka rumus yang digunakan untuk menentukan persamaan garis singgungnya adalah  $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

Dengan  $x_1 = 7$  dan  $y_1 = 1$ ,  $a = 4$  dan  $b = -3$ , sehingga persamaan garis singgung itu  $(7 - 4)(x - 4) + (1 + 3)(y + 3) = 25 \Rightarrow 3(x - 4) + 4(y + 3) = 25$

$$\Rightarrow 3x + 4y - 12 + 12 = 25 \Rightarrow 3x + 4y = 25$$

### 3. Persamaan garis singgung melalui $A(x_1, y_1)$ pada Lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Di atas telah dikemukakan bahwa dengan mensubsitusi  $a = -\frac{1}{2}A$ ,  $b = -\frac{1}{2}B$ , dan

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C} \text{ ke dalam persamaan } (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \text{ diperoleh}$$

persamaan umum lingkaran  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ . Selanjutnya jika titik  $A(x_1, y_1)$  pada lingkaran  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  maka garis singgung lingkaran yang melalui titik A adalah  $(x_1-a)(x-a) + (y_1-b)(y-b) = r^2 \Rightarrow (x_1x - ax - ax_1 + a^2) + (y_1y - by - by_1 + b^2) = r^2$ . Kemudian dengan mensubsitusi  $a = -\frac{1}{2}A$ ,  $b = -\frac{1}{2}B$ , dan  $r =$

$$\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}$$

ke dalam persamaan  $(x_1x - ax - ax_1 + a^2) + (y_1y - by - by_1 + b^2) = r^2$ , diperoleh  $(x_1x + \frac{1}{2}Ax + \frac{1}{2}Ax_1 + (\frac{1}{2}A)^2) + (y_1y + \frac{1}{2}By + \frac{1}{2}By_1 + (\frac{1}{2}B)^2) = (\frac{1}{2}A)^2 + (\frac{1}{2}B)^2 - C$

$$x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x - x_1) + \frac{1}{2}B(y - y_1) + C = 0.$$

Uraian di atas menyimpulkan jika  $A(x_1, y_1)$  terletak pada persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ , maka persamaan garis singgung lingkaran tersebut melalui titik A adalah  $x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x - x_1) + \frac{1}{2}B(y - y_1) + C = 0$ .

Contoh 4.8:

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  melalui  $(1, -5)$ .

Jawab:

Periksa apakah titik  $(1, -5)$  pada lingkaran atau tidak, dengan mensubsitusi ke dalam persamaan lingkaran  $1^2 + (-5)^2 - 2(1) + 4(-5) - 4 = 0$ . Artinya titik  $(1, -5)$  pada lingkaran.

Karena titik  $(1, -5)$  pada lingkaran maka rumus yang digunakan untuk menentukan persamaan garis singgungnya adalah  $x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x - x_1) + \frac{1}{2}B(y - y_1) + C = 0$ . Dengan  $x_1 = 1$  dan  $y_1 = -5$ ,  $A = -2$  dan  $B = 4$  dan  $C = -4$  diperoleh persamaan garis singgung itu  $1 \cdot x + (-5)y - 1(x - 1) + 2(y + 5) - 4 = 0 \Rightarrow x - 5y - x + 1 + 2y + 10 - 4 = 0$

$$\Rightarrow -3y = -7 \Rightarrow 3y - 7 = 0$$

Latihan 4

1. Tunjukkan bahwa  $(1, -3)$  terletak pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 10$  dan tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran itu di titik itu.
2. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 13$  di titik  $(-2, 3)$
3. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9$  di titik  $(1, 2)$
4. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 45 = 0$  di titik  $(4, -1)$
5. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran  $3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 3 = 0$  di titik  $(-1, 2)$

#### 4. Syarat Garis Menyinggung Lingkaran

Misalkan garis  $k$  memiliki persamaan  $y = px + q$  dan lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$ . Kedua persamaan ini membentuk sistem persamaan yang penyelesaiannya merupakan koordinat titik potong garis dengan lingkaran. Bila  $y = npx + q$  disubsitusikan ke dalam persamaan  $x^2 + y^2 = r^2$  diperoleh  $x^2 + (px + q)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + p^2x^2 + 2px + p^2 = r^2$

$$\Rightarrow (1+p^2)x^2 + 2px + (p^2 - r^2) = 0$$

Ini merupakan persamaan kuadrat dengan  $a = 1 + p^2$ ,  $b = 2p$  dan  $c = p^2 - r^2$ . Telah kita ketahui bahwa suatu persamaan kuadrat akan memiliki dua akar real, satu akar real atau tidak memiliki akar real. Persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$  akan memiliki :

(i) dua akar real yang berbeda bila  $b^2 - 4ac > 0$

(ii) satu akar real bila  $b^2 - 4ac = 0$

(iii) tidak memiliki akar real bila  $b^2 - 4ac < 0$

Ini menyimpulkan bila persamaan garis disubsitusikan ke dalam persamaan lingkaran menghasilkan suatu persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$ , maka garis itu

(i) memotong lingkaran di dua titik bila  $b^2 - 4ac > 0$

(ii) menyinggung lingkaran bila  $b^2 - 4ac = 0$

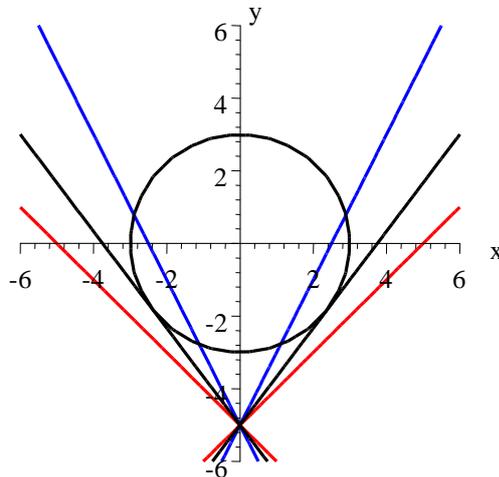
(iii) tidak beririsan dengan lingkaran bila  $b^2 - 4ac < 0$

Contoh 4.9:

Tentukan persamaan –persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 9$  yang melalui titik  $(0, -5)$ .

Jawab:

Titik  $(0, -5)$  terletak di luar lingkaran, sebab jika disubsitusikan ke dalam persamaan lingkaran yaitu  $0^2 + (-5)^2 = 25 > 9$ .



Gambar 4. 8

Misalkan gradien persamaan garis singgung itu  $m$  sehingga persamaan garis singgung lingkaran itu  $y - (-5) = m(x - 0)$  atau  $y = mx - 5$

Sekarang substitusi  $y = mx - 5$  ke dalam  $x^2 + y^2 = 9$  diperoleh  $x^2 + (mx - 5)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + m^2x^2 - 10mx + 25 = 9 \Rightarrow (1 + m^2)x^2 - 19mx + 16 = 0$ .

Garis  $y = mx - 5$  akan menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 = 9$  bila diskriminan dari persamaan kuadrat  $(1 + m^2)x^2 - 19mx + 16 = 0$  adalah  $D = 0$

$$D = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-19m)^2 - 4(1 + m^2).16 = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 100m^2 - 64 - 64m^2 &= 0 \\ \Rightarrow 36m^2 - 64 &= 0 \\ \Rightarrow 36m^2 &= 64 \\ \Rightarrow m^2 &= \frac{16}{9} \\ \Rightarrow m &= \pm \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = 9$  yang melalui titik  $(0, -5)$  ada dua yaitu  $y = \frac{4}{3}x - 5$  dan  $y = -\frac{4}{3}x - 5$

### Latihan 5

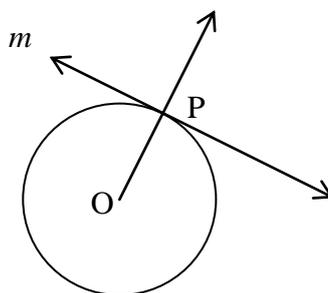
1. Buktikan bahwa garis  $y = 0$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ , tentukan pula titik singgungnya.
2. Buktikan bahwa garis  $y = 3x + 10$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 20 = 0$ , tentukan pula titik singgungnya.
3. Tentukan nilai  $r^2$  jika garis  $y = 2x - 5$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$ .
4. Diketahui lingkaran  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$  dan garis singgung lingkaran itu yang memiliki persamaan  $y = -2x + c$ . Tentukan nilai-nilai  $c$  yang mungkin.
5. Buktikan bahwa garis singgung di titik  $(-1, -3)$  pada lingkaran  $x^2 + y^2 = 10$  juga menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 20 = 0$ . Tentukan panjang garis singgung persekutuan tersebut.

## Prakata Bab 4

Banyak sekali benda-benda di sekeliling kita memuat bangun lingkaran seperti, roda kendaraan, bagian-bagian pada baik mesin mobil atau mesin-mesin produksi lainnya. Dengan demikian bangun lingkaran tidak dapat diabaikan dalam kehidupan, sehingga cukup menarik untuk dikaji secara matematis, khususnya secara geometri dan aljabar.

### Soal Apersepsi

1. Bila diketahui sebuah lingkaran dan sebuah garis. Tentukan kemungkinan-kemungkinan kedudukan antara lingkaran dan garis tersebut.
2. Perhatikan Gambar 1. berikut, P pada lingkaran dan O pusat lingkaran. Apa yang kalian ketahui antara garis OP dan garis  $m$ ?



### Perdalam Konsepmu!

1. Jika  $(x_1, y_1)$  di luar lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$ , apakah benar persamaan garis singgungnya  $x_1x + y_1y = r^2$ ?
2. Titik  $(x_1, y_1)$  yang terletak di daerah dalam lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$ . Mungkinkah kita dapat membuat garis singgung lingkaran tersebut yang melalui titik  $(x_1, y_1)$ ?

## RANGKUMAN Bab 4

1. Persamaan lingkaran dengan pusat  $O(0,0)$  dan jari-jari  $r$  adalah  $x^2 + y^2 = r^2$
2. Persamaan lingkaran dengan pusat  $(a,b)$  dan jari-jari  $r$  adalah  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
3. Suatu lingkaran yang memiliki persamaan umum  $x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0$  berpusat di  $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$  dan jari-jari  $r = \sqrt{(\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2 - C}$
4. Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 = r^2$  yang melalui titik  $(x_1, y_1)$  pada lingkaran tersebut adalah  $x_1x + y_1y = r^2$
5. Persamaan garis singgung lingkaran  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  yang melalui titik  $(x_1, y_1)$  pada lingkaran tersebut adalah  $(x_1-a)(x-a) + (y_1-b)(y-b) = r^2$
6. Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0$  yang melalui titik  $(x_1, y_1)$  pada lingkaran tersebut adalah  $x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x - x_1) + \frac{1}{2}B(y - y_1) + C = 0$
7. Jika garis  $m$  dengan persamaan  $y = ax + b$  dan lingkaran yang memiliki persamaan  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ . Garis  $m$  menyinggung lingkaran tersebut bila diskriminan persamaan kuadrat  $x^2 + (ax + b)^2 + Ax + B(ax + b) + C = 0$  adalah 0

