

## TURUNAN FUNGSI

### 1. Turunan Fungsi

Turunan fungsi  $f$  disebarkan titik  $x$  dilambangkan dengan  $f'(x)$  dengan definisi

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ . Proses mencari  $f'$  dari  $f$  disebut penurunan; dikatakan bahwa  $f$  diturunkan untuk mendapatkan  $f'$ .

Contoh 1:

Carilah turunan fungsi  $f$  yang dinyatakan dengan  $f(x) = x^2 + 5$  pada  $x = 3$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{Turunan } f \text{ pada } x = 3 \text{ ialah } f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 + 5 - (3^2 + 5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 + 5 - 9 - 5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6 \end{aligned}$$

Contoh 2:

Carilah turunan fungsi  $f$  yang ditentukan oleh  $f(x) = x^3$  langsung dari definisi.

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

Contoh 3.

Diketahui  $f(x) = 1/x^2$ . Carilah  $f'(x)$  langsung dari definisi.

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{(x+h)^2 x^2 h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x^2 + 2xh + h^2)}{h(x+h)^2 x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2}{h(x+h)^2 x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(2x+h)}{h(x+h)^2 x^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x-h}{(x+h)^2 x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x-h}{(x^2 + 2xh + h^2)x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x-h}{(x^4 + 2x^3h + x^2h^2)} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \end{aligned}$$

### Tugas 1

Gunakan definisi fungsi turunan  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  untuk memeriksa nilai  $f'(x)$  untuk tiap-tiap soal di bawah ini.

- |                                   |                                      |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $f(x) = 3x$ ; $f'(x) = 3$      | 4. $f(x) = 2/x^2$ ; $f'(x) = -4/x^3$ |
| 2. $f(x) = 5x^2$ ; $f'(x) = 10x$  | 5. $f(x) = 1/x$ ; $f'(x) = -1/x^2$   |
| 3. $f(x) = 2x^3$ ; $f'(x) = 6x^2$ |                                      |

## 2. Turunan Beberapa Fungsi Khusus

(i). Turunan fungsi-fungsi konstan

Jika  $f(x) = c$ , dengan  $c$  konstan, maka:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

**Turunan fungsi konstan adalah nol.**

(ii). Turunan  $x^n$  ( $n$  bilangan bulat positif)

$$\text{Untuk } n = 1, \text{ maka } f(x) = x, \text{ dan } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

$$\text{Untuk } n = 2, \text{ maka } f(x) = x^2, \text{ dan } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x+h = 2x.$$

$$\text{Untuk } n = 3, \text{ maka } f(x) = x^3 \text{ dan } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

Dari uraian di atas diperoleh

$f(x)$	$x$	$x^2$	$x^3$
$f'(x)$	1	$2x$	$3x^2$

Bila diperhatikan dengan seksama, tampak pola turunan untuk  $x^4$ ,  $x^5$ , dan seterusnya, sehingga dapat disimpulkan turunan dari  $f(x) = x^n$  adalah  $f'(x) = n x^{n-1}$ . Kesimpulan tersebut dapat dibuktikan dengan menggunakan definisi turunan sebagai berikut..

$$\text{Misalkan } f(x) = x^n, \text{ maka } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$(x+h)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n$$

$$\binom{n}{k} \text{ adalah kombinasi } k \text{ unsur dari } n \text{ unsur, dengan } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\text{Selanjutnya } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \dots + nxh^{n-1} + h^n) - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(nx^{n-1} + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1})}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}) = nx^{n-1}$$

**Jika  $f(x) = x^n$ , maka  $f'(x) = n x^{n-1}$ , dengan  $n$  bilangan bulat positif.**

(iii). Turunan  $ax^n$  ( $n$  bilangan bulat positif)

$$\begin{aligned} \text{Misalkan } f(x) &= ax^n, \text{ a suatu konstanta, maka } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^n - ax^n}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a[(x+h)^n - x^n]}{h}. & \text{ Berdasarkan sifat limit diperoleh } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a[(x+h)^n - x^n]}{h} = \\ a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^n - x^n]}{h} &= a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \dots + nxh^{n-1} + h^n) - x^n}{h} = \\ a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} &= a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(nx^{n-1} + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1})}{h} = \\ a \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}) &= ax^{n-1} \end{aligned}$$

**Jika  $f(x) = ax^n$ , maka  $f'(x) = anx^{n-1}$ , dengan  $n$  bilangan bulat positif.**

(iv). Turunan pangkat negative dan rasional dari  $x$

$$\begin{aligned} \text{Untuk } n = -1, \text{ maka } f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}, \text{ dan } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h)x}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x^2 + xh)} = -\frac{1}{x^2} = x^{-2} \\ \text{Untuk } n = -2, \text{ maka } f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}, \text{ dan } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 - (x+h)^2}{(x+h)^2 x^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 - (x^2 + 2xh + h^2)}{(x^2 + 2xh + h^2)x^2}}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-2xh - h^2}{(x^2 + 2xh + h^2)x^2}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h(2x+h)}{(x^4 + 2x^3h + x^2h^2)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2x+h)}{x^4 + 2x^3h + x^2h^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \end{aligned}$$

Dari uraian di atas diperoleh :

$f(x)$	$1/x$ atau $x^{-2}$	$1/x^2$ atau $x^{-2}$
$f'(x)$	$-1/x^2$ atau $-x^{-2}$	$-2/x^3$ atau $-2x^{-3}$

Bila dicermati diperoleh pola bahwa turunan dari  $f(x) = x^{-3}$ , maka  $f'(x) = -3x^{-4}$ . Juga bila  $f(x) = x^{-4}$ , maka  $f'(x) = -4x^{-5}$ , dan seterusnya. Dengan demikian bila  $f(x) = x^{-n}$ , maka  $f'(x) = -nx^{-n-1}$ , berlaku bagi  $n$  bilangan bulat untuk  $n \neq 0$ .

**Jika  $f(x) = x^n$ , maka  $f'(x) = nx^{n-1}$ , dengan  $n$  bilangan bulat,  $n \neq 0$ .**

Contoh 4 :

Diketahui  $f(x) = \frac{1}{3x^2}$ . Carilah  $f'(x)$  :

Jawab:

$$f(x) = \frac{1}{3x^2} = \frac{x^{-2}}{3}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^{-2-1}}{3} = \frac{-2x^{-3}}{3} = \frac{-2}{3x^3}$$

Bagaimana bila  $f(x) = x^n$  dengan  $n$  bilangan rasional?

Misalkan  $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ , maka  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \right) \left( \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \right) =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

**Jika  $f(x) = x^n$  dengan  $n$  bilangan rasional, maka  $f'(x) = n x^{n-1}$ .**

Contoh 5

Diketahui  $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ . Carilah  $f'(x)$ :

Jawab:

Bila  $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ , maka  $f'(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}$ :

### Tugas 2.

Carilah turunan dari :

- |                      |                      |                      |                      |                          |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. $x^{\frac{1}{2}}$ | 2. $x^{\frac{4}{3}}$ | 3. $x^{\frac{5}{2}}$ | 4. $x^{\frac{1}{2}}$ | 5. $x^{\frac{1}{3}}$     |
| 6. $x^{-1}$          | 7. $x^{-2}$          | 8. $x^{-6}$          | 9. $2x^{-3}$         | 10. $\frac{1}{2} x^{-4}$ |

### 3. Sifat-sifat Turunan Fungsi

Bila  $g(x)$  dan  $h(x)$  fungsi-fungsi yang memiliki turunan dan  $k$  konstanta, berlaku:

- (i) Jika  $f(x) = k g(x)$  maka  $f'(x) = k g'(x)$
- (ii) Jika  $f(x) = u(x) + v(x)$  maka  $f'(x) = u'(x) + v'(x)$
- (iii) Jika  $f(x) = u(x) - v(x)$  maka  $f'(x) = u'(x) - v'(x)$
- (iv) Jika  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$  maka  $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
- (v) Jika  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  maka  $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

Bukti (i).

Jika  $f(x) = k g(x)$  maka  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k g(x+h) - k g(x)}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} k \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = k g'(x)$$

Bukti (ii)

$$\begin{aligned} \text{Jika } f(x) = u(x)+v(x) \text{ maka } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - (u(x) + v(x))}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(x+h) - u(x)) + (v(x+h) - v(x))}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \\ u'(x) + v'(x). \end{aligned}$$

Bukti (iii) serupa dengan bukti (ii).

Bukti (iv)

$$\begin{aligned} \text{Jika } f(x) = u(x)v(x) \text{ maka } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)[v(x+h) - v(x)] + [u(x+h) - u(x)]v(x)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)[v(x+h) - v(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]v(x)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \frac{[v(x+h) - v(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]}{h} v(x) &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[v(x+h) - v(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]}{h} \lim_{h \rightarrow 0} v(x) &= \\ u(x)v'(x) + u'(x)v(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \end{aligned}$$

Bukti (v) serupa dengan bukti (iv)

Contoh 6.

Carilah turunan dari  $f(x) = 3x^2 + 5x - 10$

Jawab:

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 10$$

Misalkan  $u(x) = 3x^2$ ,  $v(x) = 5x$  dan  $w(x) = 10$ , maka  $u'(x) = 6x$ ,  $v'(x) = 5$  dan  $w'(x) = 0$

Selanjutnya  $f(x) = u(x) + v(x) - w(x)$  dan  $f'(x) = u'(x) + v'(x) - w'(x) = 6x + 5$ .

Contoh 7

Carilah turunan  $f(x) = (3x^2 - 1)(x^4 + 2x)$

Jawab:

Dengan menggunakan sifat (iv)

Misalkan  $u(x) = 3x^2 - 1$  dan  $v(x) = x^4 + 2x$ , maka  $u'(x) = 6x$  dan  $v'(x) = 4x^3 + 2$

Jika  $f(x) = u(x)v(x)$  maka  $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$  sehingga turunan dari

$f(x) = (3x^2 - 1)(x^4 + 2x)$  adalah  $f'(x) = 6x(x^4 + 2x) + (3x^2 - 1)(4x^3 + 2) = 18x^5 + 18x^2 - 4x^3 - 2$

Hasilnya sama dengan cara mengalikan dahulu  $u(x)v(x)$  yaitu  $f(x) = (3x^2 - 1)(x^4 + 2x) = 3x^6 + 6x^3 - x^4 - 2x$ , dan  $f'(x) = 18x^5 + 18x^2 - 4x^3 - 2$ .

Contoh 8

Carilah turunan  $f(x) = \frac{2x^4 - x}{x^2 + 1}$

Jawab:

Dengan menggunakan sifat (iv)

Misalkan  $u(x) = 2x^4 - x$  dan  $v(x) = x^2 + 1$  maka  $u'(x) = 8x^3 - 1$  dan  $v'(x) = 2x$ .

Jika  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  maka  $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ .

Selanjutnya turunan dari  $f(x) = \frac{2x^4 - x}{x^2 + 1}$  adalah

$$f'(x) = \frac{(8x^3 - 1)(x^2 + 1) - (2x^4 - x)(2x)}{[x^2 + 1]^2} = \frac{4x^5 + 8x^3 + x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

### Tugas 3

Carilah turunan dari fungsi-fungsi berikut.

1.  $x^2 + 2x + 3$

2.  $x^3 - 7x^2 + 2$

1.  $4x^4 - x^2 + 9$

2.  $(x^3 + 3x^2)(2x - 1)$

3.  $(5x^2 - 7)(3x^2 - 2x + 1)$

4.  $\frac{2}{5x^2 - 1}$

5.  $\frac{2x^2 - 1}{3x + 5}$

6.  $\frac{5x^2 + 2x - 6}{2x - 1}$

7. Jika  $f(0) = 4$ ,  $f'(0) = -1$ ,  $g(0) = -3$  dan  $g'(0) = 5$

Carilah  $(f-g)'(0)$ ;  $(f.g)'(0)$ ; dan  $(f/g)'(0)$

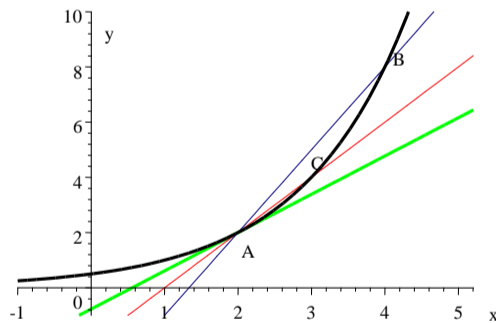
8. Jika  $f(3) = 7$ ,  $f'(3) = 2$ ,  $g(3) = 6$  dan  $g'(3) = -10$

Carilah  $(f+g)'(3)$ ;  $(f.g)'(3)$ ; dan  $(f/g)'(3)$

## 4. Arti Geometris Turunan

### a. Gardien Garis singgung Kurva

Perhatikan grafik fungsi  $f$  pada gambar berikut.



Gambar 1

Titik A, B, dan C terletak pada grafik  $f$ , bila absisnya berturut-turut  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_3$ , maka koordinat titik  $A(x_1, f(x_1))$ ,  $B(x_2, f(x_2))$ , dan  $C(x_3, f(x_3))$ . Garis AB memotong grafik  $f$

memiliki gradien  $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ . Garis AC memotong grafik  $f$  memiliki

gradien  $\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$ . Misalkan selisih absis titik C dan absis titik C sama

dengan  $h$ , maka  $x_3 = x_1 + h$ , sehingga gradien garis AC sama dengan  $\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{(x_1 + h) - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

Jika titik C pada grafik terus digeser mendekati titik A, maka  $x_3$  mendekati  $x_1$  atau sehingga selisihnya yaitu  $h$  mendekati 0, ditulis  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$  dilambangkan dengan  $f'(x_1)$  yang memiliki makna gradien garis singgung kurva  $f$  di titik  $A(x_1, f(x_1))$ .

Contoh 9 :

Tentukan gradien garis singgung kurva  $f(x) = x^2 - 1$  di titik  $x = 2$

Jawab:

$f(x) = x^2 - 1$ , maka  $f'(x) = 2x$

Gradien garis singgung di  $x = 2$  adalah  $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

#### b. Kecepatan Sesaat

Kita biasa mendengar pernyataan-pernyataan seperti “Waktu berpapasan dengan mobil polisi, mobil tadi sedang bergerak dengan kecepatan 20 meter per detik”. Apakah arti “20 m/det” (pada saat yang dimaksud)? Apabila mobil itu bergerak dengan *kecepatan tetap* (konstan), maka mobil itu akan menempuh jarak 20 m dalam waktu dua detik, dan seterusnya. Secara umum, jarak  $s$  meter, yang ditempuh dalam waktu  $t$  detik, dapat dihitung dengan rumus  $s = 20t$  atau  $20 = s/t$ , artinya

$$\text{Kecepatan} = \frac{\text{Jarak yang ditempuh}}{\text{Waktu yang diperlukan}}$$

Apabila kecepatannya *tidak tetap*, maka situasinya menjadi lebih sulit.

Misalkan suatu mobil bertolak dari titik  $\mathbf{O}$  dan mencapai jarak  $s$  meter dari  $\mathbf{O}$  setelah bergerak  $t$  detik, dan jarak  $s$  meter dalam  $t$  detik itu memenuhi rumus  $s = t^2$ .

Berdasarkan rumus kecepatan di atas, maka kecepatan =  $s/t = \frac{t^2}{t} = t$  tidak tetap tergantung nilai  $t$ . Jadi mobil tadi bergerak dengan kecepatan yang tidak tetap.

Tetapi dari pengalaman kita merasa bahwa tiap-tiap saat mobil itu memiliki suatu kecepatan, yang misalnya dapat dibaca pada pengukur kecepatan. Muncul pertanyaan “Berapakah kecepatannya dalam m/det pada  $t = 1$ ?” Jelas jawabannya tergantung pada  $s = t^2$  dan pada  $t = 1$ .

Persamaan  $s = t^2$  ini memasangkan suatu bilangan non-negatif  $s$  dengan tiap-tiap bilangan real  $t$ . Maka rumus  $s = t^2$  menentukan suatu fungsi yang berdomain  $\mathbf{R}$ . Sedangkan daerah hasilnya adalah himpunan semua bilangan real non-negatif.

*Mencari arti kecepatan pada  $t = 1$  jika  $s = t^2$*

Dengan menggunakan  $s : t \rightarrow t^2$  adalah fungsi yang berkaitan dengan rumus  $s = t^2$  diperoleh  $s(t) = t^2$ , yang memberikan jarak yang ditempuh dalam waktu  $t$  mulai dari  $t = 0$ . Jarak yang ditempuh dari  $t = 0$  sampai  $t = 1$  adalah  $s(1) = 1^2 = 1$  m. Jarak yang ditempuh dari  $t = 0$  sampai  $t = 2$  adalah  $s(2) = 2^2 = 4$  m. *Kecepatan rata-rata* dalam selang waktu dari  $t = 1$  sampai  $t = 2$  adalah

$$\frac{\text{perubahan jarak}}{\text{perubahan waktu}} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{1} = 3 \text{ m/dtk.}$$

Dengan cara yang sama diperoleh kecepatan rata-rata dari  $t = 1$  sampai  $t = 1,5$  adalah

$$\frac{s(1,5) - s(1)}{1,5 - 1} = \frac{2,25 - 1}{0,5} = 2,5 \text{ m/dtk.}$$

Untuk memperoleh jawaban atas pertanyaan “Berapakah kecepatan pada  $t = 1$ ?”, biasa disebut “kecepatan sesaat untuk  $t = 1$ ” kita membuat daftar kecepatan rata-rata dalam selang-selang waktu yang singkat dari  $t = 1$  sampai  $t = 1 + h$ , untuk nilai-nilai positif  $h$  yang makin kecil.

Dengan menghitung  $\frac{s(1+h) - s(1)}{(1+h) - 1}$  untuk tiap-tiap h, kita peroleh

H	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01
$\frac{s(1+h) - s(1)}{(1+h) - 1}$	2,05	2,04	2,03	2,02	2,01

Baris kedua menunjukkan *kecepatan rata-rata*  $\frac{s(1+h) - s(1)}{(1+h) - 1}$  pada selang waktu dari  $t = 1$  sampai  $t = 1 + h$  adalah sangat dekat pada 2 (m/det) untuk h positif kecil. Sedangkan  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(1+h) - s(1)}{h} = 2$  memiliki arti sebagai kecepatan sesaat pada  $t = 1$ . Dengan demikian, jika jarak yang ditempuh sebuah benda adalah s meter dalam t detik dengan  $s = s(t)$  maka kecepatan  $v(t) = s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$

#### Contoh 10

Jarak s meter yang ditempuh dalam t detik oleh benda yang jatuh dinyatakan oleh rumus  $s(t) = 5t^2$ . Carilah kecepatan mobil diatas sesudah 10 detik dari saat berangkatnya.

Jawab:

Persoalan ini adalah mencari kecepatan sesaat mobil ketika  $t = 10$ , dapat diperoleh sebagai berikut.

$s(t) = 5t^2$ , maka  $v(t) = s'(t) = 2.5t = 10t$ .

Kecepatan sesaat mobil ketika  $t = 10$  adalah  $v(10) = 10.10 = 100$  m/dtk

#### Tugas 4

1. Tentukan gradien garis singgung  $f(x) = x^2$ , di titik (1,1).
2. Tentukanlah koordinat titik pada kurva  $y = x^2 + 4x + 6$  sehingga garis singgung kurva di titik itu mempunyai gradien 12
3. Tentukan persamaan garis singgung  $f(x) = x^2 + x$  yang melalui (-1,0).
4. Jarak s cm yang ditempuh oleh sebutir kelereng yang mengguling pada waktu t detik dinyatakan dengan  $s(t) = 5t - t^2$ . Hitunglah kecepatan kelereng saat  $t = 2$ .
5. Sebuah bola dilemparkan tegak lurus ke atas dengan kecepatan permulaan 30 m/det. Bola itu bergerak sesuai dengan persamaan  $h = 30t - 5t^2$ . Dalam rumus itu h menunjukkan tinggi bola di atas titik keberangkatan diukur dengan meter, setelah t detik. Carilah kecepatan bola pada saat  $t = 1,5$  detik

### 5. Turunan Fungsi Trigonometri

(i). Turunan  $\sin x$

Misalkan  $f(x) = \sin x$ , maka  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

Telah kita ketahui bahwa  $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ ,



$$\begin{aligned} \text{maka } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{(2x+h)}{2} \sin \frac{h}{2}}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \cos(x + \frac{h}{2}) \times \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) \times \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{2 \cdot \frac{h}{2}} \right) &= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) = \cos x \cdot 1 = \cos x. \end{aligned}$$

Jika  $f(x) = \sin x$ , maka  $f'(x) = \cos x$ .

(ii). Turunan  $\cos x$

$$\text{Misalkan } f(x) = \cos x, \text{ maka } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$\text{Telah kita ketahui bahwa } \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{maka } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{(2x+h)}{2} \sin \frac{h}{2}}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{-2 \sin(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ -\sin(x + \frac{h}{2}) \times \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h} \right] = -\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x + \frac{h}{2}) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h} = \\ -\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x + \frac{h}{2}) \times \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{2 \cdot \frac{h}{2}} \right) &= -\sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) = -\sin x \cdot 1 = -\sin x. \end{aligned}$$

Jika  $f(x) = \cos x$ , maka  $f'(x) = -\sin x$ .

(iii). Turunan  $\tan x$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \text{ Misalkan } u(x) = \sin x \text{ dan } v(x) = \cos x \text{ maka } u'(x) = \cos x \text{ dan}$$

$$v'(x) = -\sin x. \text{ Menurut sifat (v) } f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{[\cos x]^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

### Tugas 5

Carilah turunan dari fungsi-fungsi berikut.

1.  $2 \sin x + 3 \cos x$
2.  $\cot x$
3.  $x^2 \cos x$
4. Tentukan gradien garis singgung kurva  $f(x) = \cos x$  di  $x = \pi/3$ .
5. Tentukan persamaan garis singgung  $f(x) = \tan x$  melalui titik  $(\pi/4, 1)$ .

## 6. Aturan Rantai dan Notasi Leibniz

### a. Teorema Aturan Rantai

Jika  $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ , maka  $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Contoh 11:

Carilah  $f'(x)$  bila  $f(x) = (2x + 1)^3$

Jawab:

Cara pertama

$$f(x) = (2x + 1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1, \text{ maka } f'(x) = 24x^2 + 24x^2 + 6x = 6(8x^2 + 2x + 1) = 6(2x + 1)^2.$$

Cara kedua

Menggunakan sifat (vi) jika  $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ , maka  $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ .

Untuk  $f(x) = (2x + 1)^3$ , misalkan dengan  $u(x) = x^3$  dan  $v(x) = 2x + 1$ , sehingga

$$f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)).$$

Bila  $u(x) = x^3$  maka  $u'(x) = 3x^2$  dan bila  $v(x) = 2x + 1$  maka  $v'(x) = 2$

$$f'(x) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2.$$

Contoh 12:

Carilah  $f'(x)$  bila  $f(x) = \sqrt{x^{10} + 2x^5 - 10}$

Jawab:

$$f(x) = \sqrt{x^{10} + 2x^5 - 10} = (x^{10} + 2x^5 - 10)^{\frac{1}{2}}$$

$f(x) = (u \circ v)(x)$  dengan  $u(x) = x^{\frac{1}{2}}$  dan  $v(x) = x^{10} + 2x^5 - 10$ , maka  $u'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$  dan

$$v'(x) = 10x^9 + 10x^4$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^{10} + 2x^5 - 10)^{-\frac{1}{2}}(10x^9 + 10x^4) = \frac{10x^9 + 10x^4}{2\sqrt{x^{10} + 2x^5 - 10}}$$

### b. Notasi Leibniz

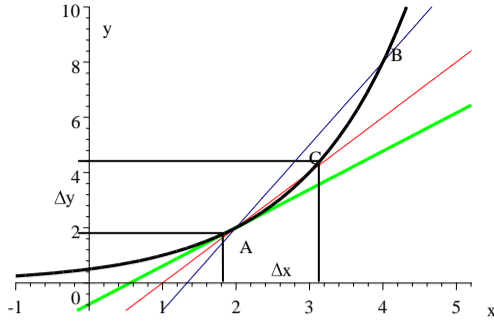
Fungsi  $f: x \rightarrow x^2 + 1$  biasa ditulis  $f(x) = x^2 + 1$ , tetapi sering juga ditulis sebagai  $y = x^2 + 1$ . Jika  $f(x) = x^2 + 1$  maka  $f'(x) = 2x$ , dan bila  $y = x^2 + 1$  sering ditulis  $y' = 2x$ .

Dari definisi fungsi turunan dari  $f(x)$  adalah  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ,  $h$

melambangkan perubahan nilai  $x$ . Dalam berbagai penerapan kalkulus perlu sekali lambang  $h$  sering ditulis sebagai  $\Delta x$ , sedang perubahan nilai  $f$  atau  $y$  yang sesuai disebut dilambangkan dengan  $\Delta f$  atau  $\Delta y$ .

Jika  $y = f(x)$ , maka  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  dan  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Oleh Leibniz  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  ditulis sebagai  $\frac{dy}{dx}$ .



Gambar 2

Dengan menggunakan notasi Leibniz, Teorema Aturan Rantai dapat dinyatakan

sebagai berikut: Jika  $y = f(u)$  dan  $u = g(x)$ , maka  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ .

Contoh 13

Carilah  $y'$  bila  $y = (2x + 1)^3$

Jawab:

Misalkan  $v = 2x + 1$  maka  $y = (2x + 1)^3 = v^3$

$\frac{dy}{dv} = 3v^2$  dan  $\frac{dv}{dx} = 2$  sehingga  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx} = 3v^2 \cdot 2 = 6v^2 = 6(2x + 1)^2$

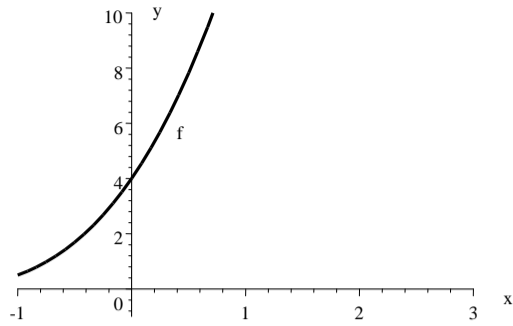
### Tugas 6

Carilah turunan dari fungsi-fungsi berikut.

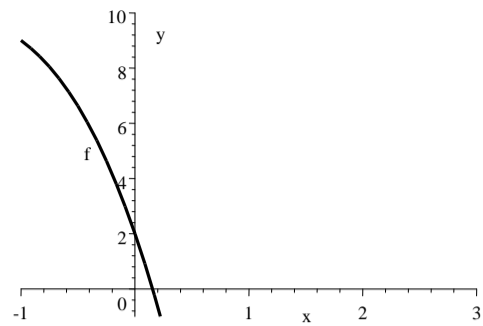
1.  $f(x) = (3 - 2x)^5$
2.  $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^{11}$
3.  $f(x) = \sin^2 x$
4.  $f(x) = 1 - \cos^2 x$
5.  $f(x) = (x^2 - x + 1)^{-7}$
6.  $y = \frac{1}{(x^2 + 3)^9}$
7.  $y = \sin^4(3x^2)$
8.  $y = [(x^2 + 1)\sin x]^3$
9.  $y = \left( \frac{x^2 + 1}{\cos x} \right)^4$
10.  $y = \sin^2[\cos^2 x(x^2)]$

## 7. Kurva Naik dan Kurva Turun

Bila suatu kurva dari grafik fungsi digambarkan pada koordinat kartesius, kurva dikatakan naik, bila makin ke kanan kurva makin tinggi, seperti terlihat pada Gambar 3. Suatu kurva dikatakan turun bila makin ke kanan kurva makin rendah, seperti pada Gambar 4.

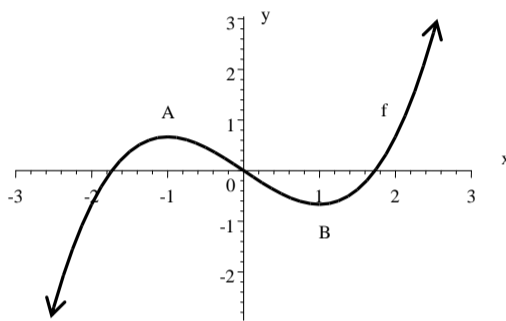


Gambar 3



Gambar 4

Perhatikan Gambar 5., pada interval  $-\infty < x < -1$  kurva naik, pada interval  $-1 < x < 1$  kurva turun, dan pada interval  $1 < x < \infty$  kurva naik. Sedangkan pada  $x = -1$  dan  $x = 1$  kurva tidak naik maupun turun, dikatakan kurva mencapai *stasioner*. Titik A dan B disebut titik stasioner kurva.

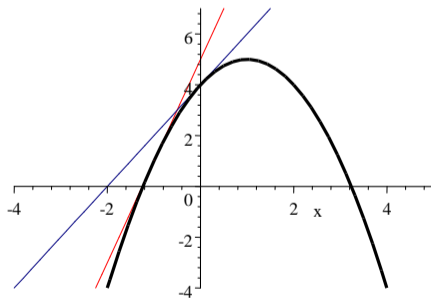


Gambar 5.

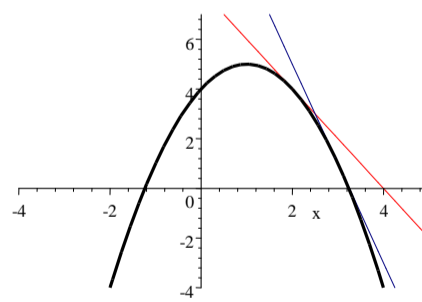
#### *Hubungan Turunan Fungsi dengan Grafik Fungsi*

Perhatikan Gambar 6., pada interval  $-\infty < x < 1$  grafik naik dan garis-garis singgungnya membentuk sudut lancip dengan sumbu x positif, artinya gradien-gradien garis singgung grafik f pada saat kurva f itu naik adalah positif. Dengan kata lain, grafik fungsi f naik bila  $f'(x) > 0$ .

Perhatikan Gambar 7., pada interval  $1 < x < \infty$  grafik turun dan garis-garis singgungnya membentuk sudut tumpul dengan sumbu x positif, artinya gradien-gradien garis singgung grafik f pada saat kurva f turun adalah negatif. Dengan kata lain, grafik fungsi f turun bila  $f'(x) < 0$ .



Gambar 6



Gambar 7

Contoh 14

Bila  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ , tentukan dimana grafik  $f$  naik dan grafik  $f$  turun.

Jawab:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7 \text{ maka } f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

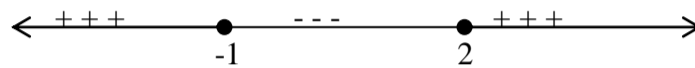
$$\text{Grafik } f \text{ naik bila } f'(x) > 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 > 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) > 0$$

$$\text{Batas-batas interval adalah } (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ dan } x = -1$$

Untuk daerah pada garis bilangan sebelah kiri -1 itu daerah positif (+) atau negatif (-) substitusikan sembarang bilangan sebelah kiri -1, misalnya -2 diperoleh  $(-2-2)(-2+1) = (-4)(-1) = 4$  positif (+).

Untuk daerah pada garis bilangan antara -1 dan 2 itu daerah positif (+) atau negatif (-) substitusikan sembarang bilangan sebelah kiri di antara kedua bilangan, misalnya 0 diperoleh  $(0-2)(0+1) = (-2)(1) = -2$  negatif (-).

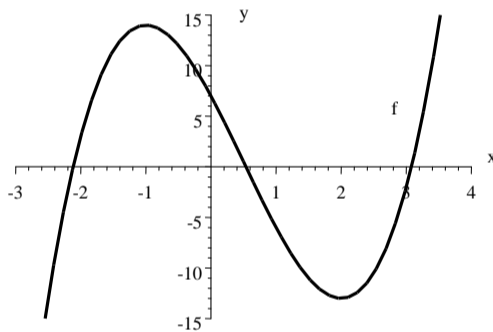
Begitu juga untuk memeriksa daerah garis bilangan sebelah kanan 2, ambil bilangan 3, kemudian substitusikan ke  $(x-2)(x+1) = (3-2)(3+1) = 1 \cdot 4 = 4$  positif (+)



Grafik  $f$  naik pada interval garis bilangan yang bertanda positif (+) yaitu,  $-\infty < x < -1$  dan  $2 < x < \infty$ .

Dengan menggunakan garis bilangan yang sama, sekaligus diperoleh interval dimana grafik  $f$  turun, yaitu pada interval garis bilangan yang bertanda negatif (-). Grafik  $f$  turun pada interval  $-1 < x < 2$ .

Ini sesuai dengan grafik  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$  pada Gambar 8.



Gambar 8.

### Tugas 7

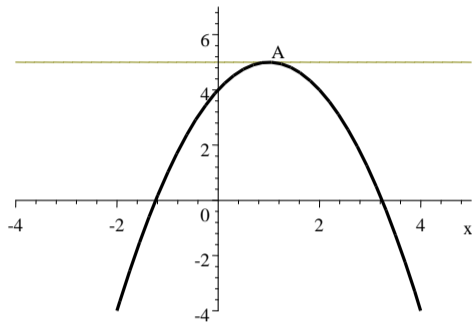
Untuk setiap fungsi yang ditentukan dalam persamaan no. 1 – 7 tentukanlah interval-interval dimana fungsi itu naik dan dimana fungsi itu turun

1.  $f(x) = x^2 - 8x + 10$
2.  $f(x) = 2x - x^2$
3.  $f(x) = 3x - x^3$
4.  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12$
5.  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3$
6.  $f(x) = x(x-2)^2$
7.  $f(x) = 1 + x - x^2 - x^3$
8. Tunjukkanlah grafik fungsi  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$  tidak pernah turun.

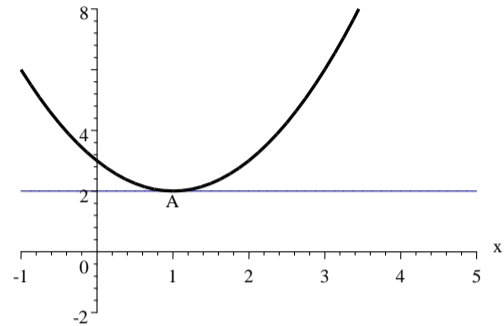
## 8. Titik Stasioner

Pada Gambar 9., sebelah kiri titik A kurva naik, dan sebelah kanan titik A kurva turun, sedangkan di titik A kurva tidak naik maupun turun, oleh karena itu A disebut titik *stasioner*. Titik stasioner A pada Gambar 9. ini disebut *titik balik maksimum*. Sedangkan pada Gambar 10., sebelah kiri titik A kurva turun dan sebelah kanan titik A kurva naik. Titik stasioner A pada Gambar 10. disebut *titik balik minimum*.

Baik pada Gambar 9., maupun Gambar 10., garis singgung di titik stasioner A sejajar dengan sumbu x, artinya gradien garis singgung grafik fungsi  $f$  di A adalah 0. Dengan kata lain, grafik  $f$  mencapai stasioner bila  $f'(x) = 0$ .



Gambar 9



Gambar 10

### Contoh 15

Tentukan titik stasioner dan jenisnya dari grafik  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Jawab:

Grafik  $f$  mencapai stasioner bila  $f'(x) = 0$

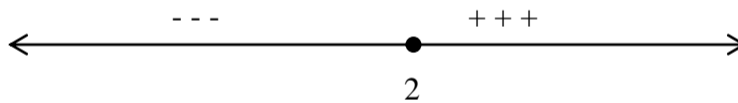
$f(x) = x^2 - 4x + 3$ , maka  $f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 0$ , artinya  $2x - 4 = 0$  atau  $x = 2$

Nilai stasionernya  $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$

Jadi titik stasionernya  $(2, -1)$

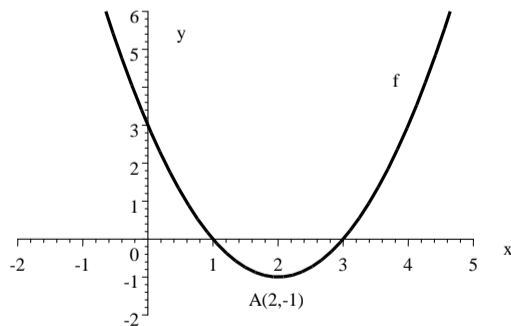
Gunakan garis bilangan berikut untuk memeriksa jenis stasioner .



$x = 2$  adalah absis titik stasioner, batas kurva naik atau turun. Daerah pada garis bilangan sebelah kiri 2 adalah negatif (-) sebab  $f'(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4$  negatif (-), sedangkan sebelah kanan 2 adalah positif (+), sebab  $f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$  positif (+).

Sebelah kiri  $x = 2$  kurva turun dan sebelah kanan  $x = 2$  kurva naik, disimpulkan jenis titik stasioner  $(2, -1)$  adalah titik minimum.

Jawaban di atas sesuai dengan grafik  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  pada Gambar 11.



Gambar 11.

Contoh 16

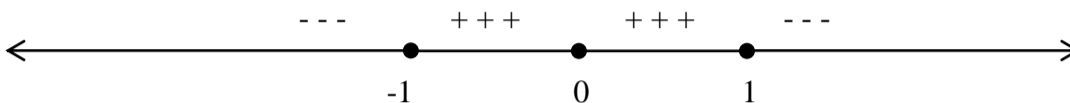
Tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya dari grafik  $f(x) = 5x^3 - 3x^5$

Jawab:

Fungsi turunan dari  $f(x) = 5x^3 - 3x^5$  adalah  $f'(x) = 15x^2 - 15x^4$ .

Grafik  $f$  mencapai stasioner bila  $f'(x) = 0 \Rightarrow 15x^2 - 15x^4 = 0 \Rightarrow 15x^2(1-x)(1+x) = 0, \Rightarrow 15x^2 = 0$  atau  $1-x = 0$  atau  $1+x = 0$ , sehingga diperoleh absis titik-titik stasioner  $x = 0, x = 1$ , dan  $x = -1$ . Masing-masing ordinat titik stasionernya adalah,  $f(0) = 5 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^5 = 0, f(1) = 5 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^5 = 2$ , dan  $f(-1) = 5 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^5 = -2$ , sehingga diperoleh titik-titik stasioner  $(0,0), (1,2)$  dan  $(-1,-2)$ .

Untuk memeriksa jenis titik stasioner itu, digunakan garis bilangan sebagai berikut.



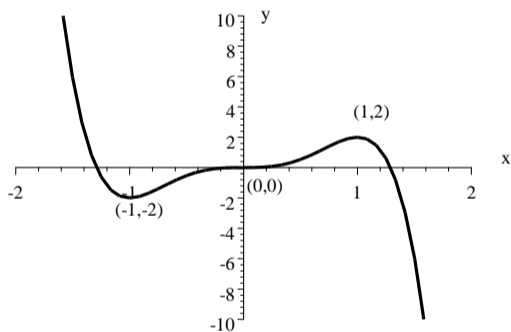
Daerah pada garis bilangan sebelah kiri -1 adalah negatif (-) sebab bila disubstitusi oleh sebarang bilangan kurang dari -1 misalnya -1,  $f'(-2) = 15(-2)^2(1 - (-2))(1 + (-2)) = -180$  adalah bilangan negatif.  $2 \cdot 0 - 4 = -4$  negatif (-). Daerah antara -1 dan 0 adalah positif (+), sebab  $f'(-\frac{1}{2}) = 15(-\frac{1}{2})^2(1 - (-\frac{1}{2}))(1 + (-\frac{1}{2})) = \frac{45}{16}$  adalah bilangan positif.

Daerah antara 0 dan 1 adalah positif (+), sebab  $f'(\frac{1}{2}) = 15(\frac{1}{2})^2(1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2}) = \frac{45}{16}$  adalah bilangan positif. Daerah sebelah kanan 1 negatif (-), sebab  $f'(2) = 15(2)^2(1 - 2)(1 + 2) = -180$  adalah bilangan negatif.

Titik  $(-1,-2)$  adalah titik balik minimum, karena grafik sebelah kiri titik ini turun dan sebelah kanan titik itu naik. Nilai  $f(-1) = -2$  disebut *nilai balik minimum*.

Titik  $(1,2)$  adalah titik balik maksimum, karena grafik sebelah kiri titik ini naik dan sebelah kanan titik itu turun. Nilai  $f(1) = 2$  disebut *nilai balik maksimum*.

Titik  $(0,0)$  bukan titik balik minimum maupun minimum, karena grafik sebelah kiri titik ini naik dan sebelah kanan titik itu naik pula. Titik  $(0,0)$  pada kurva ini disebut *titik belok*.



Gambar 12.

Dari contoh di atas, secara umum, misalnya  $x = a$  memenuhi  $f'(a) = 0$ , maka titik  $(a, f(a))$  adalah titik balik maksimum atau titik balik minimum atau titik belok. Jika  $f'(x)$  ada untuk setiap titik disekitar  $x = a$  (yaitu interval kecil pada sumbu  $x$  yang memuat  $a$ ) maka di sekitar  $x = a$  terdapat 4 kemungkinan untuk grafik  $f$ .

Titik  $(a,f(a))$  merupakan titik balik maksimum dari  $f$ , bila

$x$	Sedikit sebelah kiri $a$ ( $a^-$ )	$a$	Sedikit sebelah kanan $a$ ( $a^+$ )
$f'(x)$	Positif (+)	0	Negatif (-)

Titik  $(a, f(a))$  merupakan titik balik minimum dari  $f$ , bila

$x$	Sedikit sebelah kiri $a$ ( $a^-$ )	$a$	Sedikit sebelah kanan $a$ ( $a^+$ )
$f'(x)$	Negatif (-)	0	Positif (+)

Titik  $(a, f(a))$  merupakan titik belok dari  $f$ , bila

$x$	Sedikit sebelah kiri $a$ ( $a^-$ )	$a$	Sedikit sebelah kanan $a$ ( $a^+$ )
$f'(x)$	Positif (+)	0	Positif (+)

atau

$x$	Sedikit sebelah kiri $a$ ( $a^-$ )	$a$	Sedikit sebelah kanan $a$ ( $a^+$ )
$f'(x)$	Negatif (-)	0	Negatif (-)

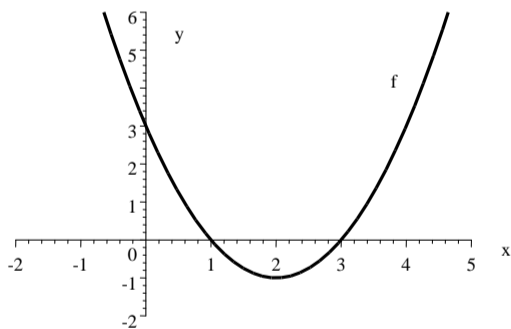
### Tugas 8.

Tentukanlah nilai-nilai stasioner fungsi yang didefinisikan berikut ini dan tentukanlah jenis masing-masing nilai stasioner itu

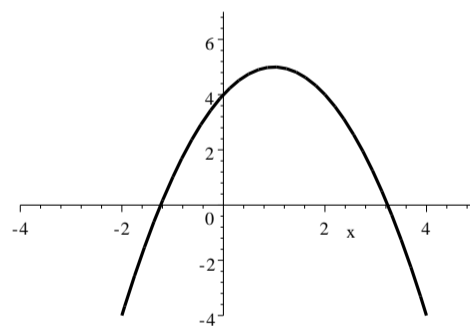
1.  $f(x) = x^2$
2.  $f(x) = x^2 - 2x$
3.  $f(x) = 4 - x^2$
4.  $f(x) = (x + 1)(3 - x)$
5.  $f(x) = x^3 - 3x$
6.  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
7.  $f(x) = 2x^4 - 2x^2$
8.  $f(x) = x + 1/x$
9.  $f(x) = (4 - x)^2$
10.  $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$

### 9. Perubahan Kecekungan Kurva

Perhatikan Gambar 13., kurva ini dikatakan *cekung ke atas*, sedangkan kurva pada Gambar 14., dikatakan *cekung ke bawah*.



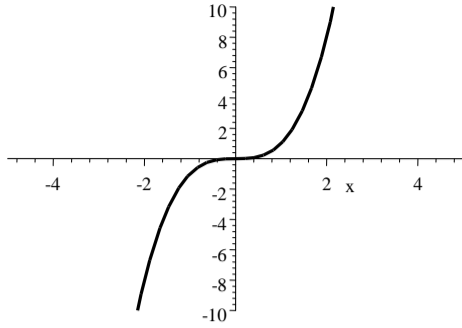
Gambar 13



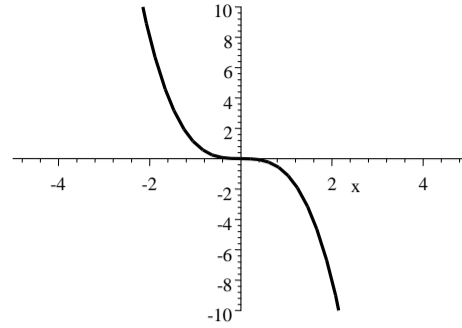
Gambar 14

Sekarang perhatikan Gambar 15. kurva dari grafik  $f(x) = x^3$ . dan Gambar 16, kurva dari grafik  $f(x) = -x^3$ .





Gambar 15



Gambar 16

Untuk  $f(x) = x^3$ , maka  $f'(x) = 3x^2$ , dan untuk  $f(x) = 0$  diperoleh  $3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Nilai  $f'(0^-)$ , misal  $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$  (positif), juga nilai  $f'(0^+)$ , misal  $f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$  (positif) sehingga diperoleh

x	Sedikit sebelah kiri 0 ( $0^-$ )	0	Sedikit sebelah kanan 0 ( $0^+$ )
$f'(x)$	Positif (+)	0	Positif (+)

Untuk  $f(x) = -x^3$ , maka  $f'(x) = -3x^2$ , dan untuk  $f(x) = 0$  diperoleh  $-3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Nilai  $f'(0^-)$ , misal  $f'(-1) = -3 \cdot (-1)^2 = -3$  (negatif), juga nilai  $f'(0^+)$ , misal  $f'(1) = -3 \cdot 1^2 = -3$  (negatif) sehingga diperoleh

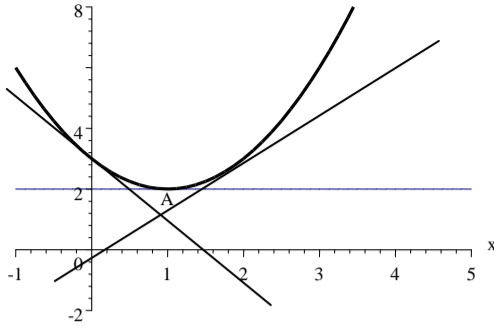
x	Sedikit sebelah kiri 0 ( $0^-$ )	0	Sedikit sebelah kanan 0 ( $0^+$ )
$f'(x)$	Negatif (-)	0	Negatif (-)

Pada Gambar 15., untuk  $-\infty < x < 0$  kurva cekung ke bawah dan untuk  $0 < x < \infty$  kurva cekung ke atas. Juga pada Gambar 16., untuk  $-\infty < x < 0$  kurva cekung ke atas dan untuk  $0 < x < \infty$  kurva cekung ke bawah.. Titik (0,0) pada kedua gambar tersebut disebut titik belok, yaitu titik dimana terjadi perubahan kecekungan, dari cekung ke bawah menjadi cekung ke atas atau sebaliknya dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah.

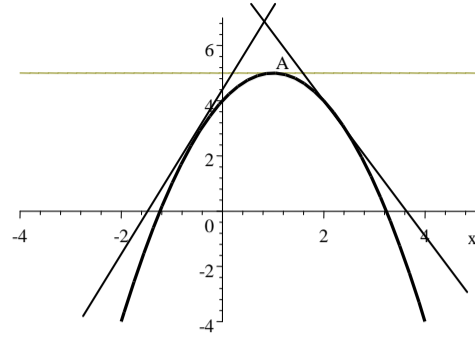
*Hubungan Turunan dengan Kecekungan dan Titik Belok.*

Pada Gambar 17., kurva cekung ke atas dengan A sebagai titik stasioner. Gradien garis singgung sebelah kiri titik A semuanya negatif. Gradien garis singgung di titik A adalah 0, dan gradien garis-garis singgung sebelah kanan titik A semuanya positif. Bila ditinjau dari kiri ke kanan gradien-gradien garis singgung kurva yang cekung ke atas adalah naik.

Sebelumnya telah dikemukakan grafik  $f(x)$  naik pada interval yang memenuhi  $f'(x) > 0$ . Tentu grafik  $g(x)$  naik pada interval yang memenuhi  $g'(x) > 0$ . Jika  $g(x) = f'(x)$ , grafik  $f'(x)$  naik pada interval yang memenuhi  $g'(x) > 0$ . Karena  $g(x) = f'(x)$ , turunan dari  $g(x)$  yaitu  $g'(x)$  sama dengan turunan dari  $f'(x)$ . Turunan dari  $f'(x)$  ditulis  $f''(x)$  disebut turunan kedua dari  $f(x)$ . Dengan demikian dapat disimpulkan, kurva  $f$  cekung ke atas pada interval yang memenuhi  $f''(x) > 0$ .



Gambar 17



Gambar 18.

Sebaliknya pada Gambar 18., kurva cekung ke bawah, ditinjau dari kiri ke kanan gradien-gradien garis singgungnya turun. Diperoleh kesimpulan, kurva  $f$  cekung ke bawah pada interval yang memenuhi  $f''(x) < 0$ . Kecekungan grafik  $f$  dibatasi oleh absis titik-titik belok  $x$  yang memenuhi  $f''(x) = 0$ .

Contoh 17.

Tentukan titik belok dari grafik  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ . Tentukan dimana kurva cekung ke atas dan dimana kurva cekung ke bawah.

Jawab:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ , maka  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$  dan  $f''(x) = 12x - 6$

Catatan:  $f''(x)$  adalah turunan dari  $f'(x)$ .

Absis titik belok diperoleh dari  $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Ordinat titik belok adalah  $f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - 3(\frac{1}{2})^2 - 12(\frac{1}{2}) + 7 = \frac{1}{2}$

Jadi titik belok kurva tersebut  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Kurva cekung ke atas bila  $f''(x) > 0 \Rightarrow 12x - 6 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

Kurva cekung ke atas pada interval  $\frac{1}{2} < x < \infty$

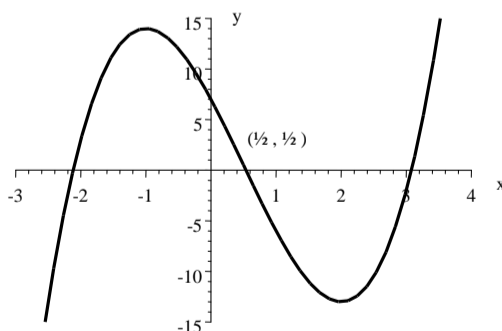
Kurva cekung ke bawah bila  $f''(x) < 0 \Rightarrow 12x - 6 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

Kurva cekung ke atas pada interval  $-\infty < x < \frac{1}{2}$ .

Jika dituliskan dengan tabel diperoleh

$x$	Sedikit sebelah kiri $\frac{1}{2}$ ( $\frac{1}{2}^-$ )	$\frac{1}{2}$	Sedikit sebelah kanan $\frac{1}{2}$ ( $\frac{1}{2}^+$ )
$f''(x)$	Negatif (-)	0	Positif (+)

Kesimpulan di atas sesuai dengan grafik fungsi  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$  pada Gambar 19. Sebelah kiri titik  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  kurva cekung ke bawah dan sebelah kanan titik  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  kurva cekung ke atas.



Gambar 19.

Turunan kedua dari  $f(x)$  yaitu  $f''(x)$  dapat digunakan untuk memeriksa jenis stasioner. Dari Gambar 17. dapat dilihat bahwa kurva cekung ke atas, titik stasionernya adalah stasioner minimum. Sedangkan dari Gambar 18., kurva yang cekung ke bawah

titik stasionernya adalah stasioner maksimum. Dengan demikian bila titik A (a, f(a)) sebuah titik pada kurva f, dapat disimpulkan:

- (i) Jika  $f''(a) = 0$ , maka titik A (a, f(a)) titik belok (titik perubahan kecekungan)
- (ii) Jika  $f'(a) = 0$  dan  $f''(a) > 0$ , maka titik A (a, f(a)) titik balik minimum.
- (iii) Jika  $f'(a) = 0$  dan  $f''(a) < 0$ , maka titik A (a, f(a)) titik balik maksimum.

#### Contoh 18

Tentukanlah nilai-nilai stasioner fungsi f yang didefinisikan dengan  $f(x) = x^3(x - 4)$  dan tentukanlah jenis setiap nilai tersebut

Jawab:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3(x - 4) = x^4 - 4x^3 \\ f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Absis titik stasioner f diperoleh jika } f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x^2(x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 3 \end{aligned}$$

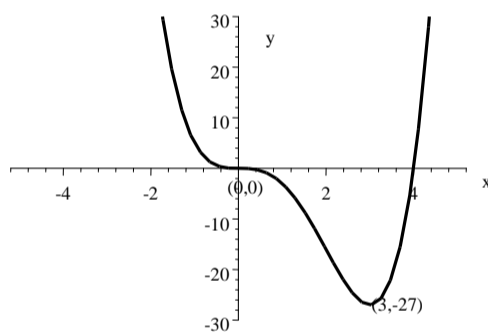
Ordinat titik stasionernya masing-masing adalah  $f(0) = 0$  untuk  $x = 0$  dan  $f(3) = -27$  untuk  $x = 3$ . Jadi titik stasionernya adalah (0, 0) dan (3, -27).

Untuk memeriksa jenis titik stasioner tersebut, substitusi absisnya ke dalam  $f''(x)$

Untuk  $x = 0$  maka  $f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 = 0$ , artinya titik (0,0) adalah titik belok.

Untuk  $x = 3$ , maka  $f''(3) = 12 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 = 108 - 72 = 36 > 0$ , artinya titik (3, -27) adalah titik balik minimum.

Kesimpulan di atas sesuai dengan grafik fungsi  $f(x) = x^3(x - 4)$  pada Gambar 20. Titik (0,0) adalah titik belok, titik perubahan kurva dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah, dan titik (3, -27) adalah titik balik minimum.



Gambar 20.

#### Tugas 9

Tentukan dimana fungsi yang diberikan cekung ke atas dan dimana cekung ke bawah. Tentukan pula titik beloknya.

1.  $f(x) = x^3 - 12x$
2.  $f(x) = (x - 3)^3 + 4$
3.  $f(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + x + 2$
4.  $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$
5.  $f(x) = \sin 2x$ , untuk  $0 \leq x \leq \pi$

## 10. Menggambar Kurva

Sebelumnya telah kita belajar menggambar berbagai grafik fungsi tertentu seperti, fungsi linear, kuadrat, dan lain sebagainya. Sekarang akan belajar menggambar berbagai grafik fungsi dengan memperhatikan titik-titik stasioner, titik-titik balik maksimum, minimum, kecekungan, dan lain-lain. Kemampuan menggambar kurva merupakan hal yang sangat penting dalam pengertian dan penggunaan Kalkulus. Dalam menggambar grafik fungsi yang dapat didefinisikan, beberapa atau semua hal berikut ini sangat membantu:

- (i). Titik-titik potong kurva dengan sumbu x dan sumbu y (jika mudah diterapkan).
- (ii). Titik-titik stasioner dan jenisnya
- (iii) Nilai-nilai  $f(x)$  untuk  $x \rightarrow \infty$  atau  $x \rightarrow -\infty$ .

Contoh 19

Gambarlah grafik kurva  $f(x) = x(x - 3)^2$

Jawab:

- (i). Titik-titik potong dengan sumbu-sumbu:

Titik potong dengan sumbu y diperoleh jika  $x = 0$  maka  $f(0) = 0(0-3)^2 = 0$

Titik potong dengan sumbu y adalah  $(0,0)$ .

Titik potong dengan sumbu x diperoleh jika  $f(x) = 0$ , maka  $x(x-3)^2 = 0$  diperoleh

Titik potong dengan sumbu x adalah  $(0,0)$  dan  $(3,0)$ .

- (ii). Titik-titik stasioner dan jenisnya;

$$f(x) = x(x - 3)^2 = x(x^2 - 6x + 9) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$$

Titik-titik stasioner pada kurva diperoleh dari  $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1) = 0 \text{ atau } (x-3) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ atau } x = 3$$

Untuk  $x = 1$ , maka  $f(1) = 1(1-3)^2 = 4$ , untuk  $x = 3$  maka  $f(3) = 3(3-3)^2 = 0$

Jadi titik-titik stasioner adalah  $(1, 4)$ , dan  $(3, 0)$

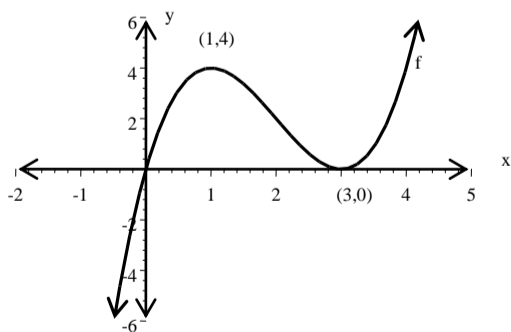
$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0$ , jadi titik  $(1,4)$  adalah titik balik maksimum

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0$ , jadi titik  $(3,0)$  adalah titik balik minimum.

- (iii)  $f(x) = x(x - 3)^2$ .

Untuk nilai  $x \rightarrow \infty$  maka  $f(x) \rightarrow \infty$  dan untuk nilai  $x \rightarrow -\infty$  maka  $f(x) \rightarrow -\infty$

Semua keterangan di atas memungkinkan kita menggambar kurva, seperti tampak pada Gambar 21.



Gambar 21.

**Tugas 10.**

Gambarlah kurva-kurva berikut ini:

1.  $y = x^2 - 4$

2.  $y = 8x - x^2$

3.  $y = 3x - x^3$

4.  $y = (5 - x)^2$

5.  $y = x^4$

6.  $y = x(x - 1)^2$

7.  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

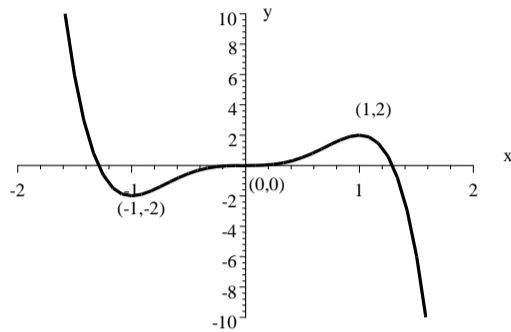
8.  $y = 8 + 2x^2 - x^4$

9.  $y = 3x^2 - x^3$

10.  $y = x^3(4 - x)$

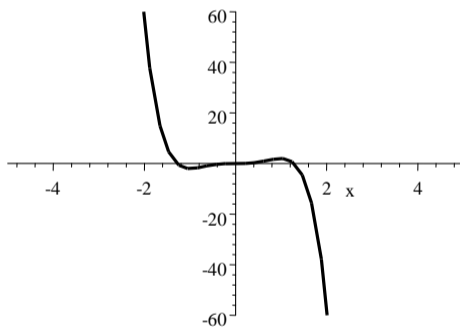
**11. Nilai-nilai Maksimum dan Minimum suatu Fungsi dalam Interval Tertutup**

Grafik fungsi  $f$  yang ditentukan dengan  $f(x) = 5x^3 - 3x^5$  yang telah dipelajari sebelumnya tampak pada Gambar 22.



Gambar 22.

Nilai maksimum  $f$  dalam interval tertutup  $0 \leq x \leq 2$  dengan mudah dapat dilihat yaitu  $f(1) = 2$ . Tetapi untuk interval  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  nilai maksimum  $f$  adalah  $f(\frac{1}{2}) = \frac{17}{32}$  dan untuk interval  $-2 \leq x \leq 2$  nilai maksimum  $f$  adalah  $f(-2) = 56$ .



Gambar 23.

Dari Gambar 23., terlihat untuk interval  $-2 \leq x \leq 2$  nilai minimum  $f$  adalah  $f(2) = -56$  dan nilai maksimum  $f$  adalah  $f(-2) = 56$ , dapat ditulis  $-56 \leq f(x) \leq 56$  untuk interval  $-2 \leq x \leq 2$ . Dengan demikian perlu diperhatikan bahwa nilai balik maksimum atau minimum dari fungsi  $f$  dalam suatu interval tertutup belum tentu nilai maksimum atau minimum dari  $f$ . Nilai maksimum dan minimum fungsi  $f$  dalam interval tertutup didapat dari nilai stasioner  $f$  dalam interval itu atau dari nilai  $f$  pada ujung-ujung interval.

**Contoh 20**

Tentukan nilai minimum dan maksimum dari  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  pada interval  $0 \leq x \leq 5$

Jawab:

(i) Menentukan nilai balik kurva  $f$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 \text{ dan } f''(x) = 2$$

$$\text{Absis titik stasioner diperoleh dari } f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

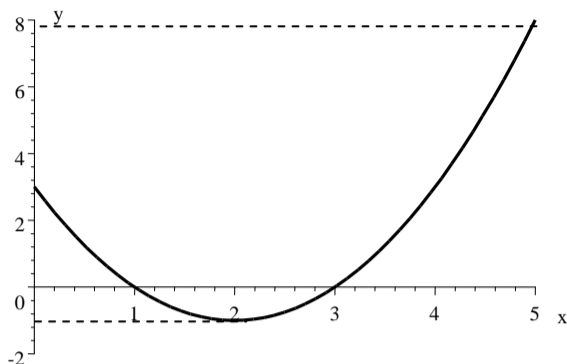
$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$  dan  $f''(2) = 2 > 0$ , sehingga  $(2, -1)$  merupakan titik balik minimum. Jadi nilai balik minimumnya  $-1$ .

(ii) Menentukan nilai  $f$  pada batas-batas interval.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f(0) = 3 \text{ dan } f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 8$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh nilai minimum dari  $f$  adalah  $-1$  dan nilai maksimum  $f$  adalah  $8$ .

Jadi  $-1 \leq f(x) = x^2 - 4x + 3 \leq 8$  pada interval  $0 \leq x \leq 5$ , seperti terlihat pada Gambar 24.



Gambar 24.

#### Contoh 21

Tentukan nilai minimum dan maksimum dari  $f(x) = x^3 - 6x^2$  pada  $-1 \leq x \leq 3$

Jawab:

(i) Menentukan nilai balik kurva  $f$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x \text{ dan } f''(x) = 6x - 12$$

$$\text{Absis titik stasioner diperoleh dari } f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 0 \text{ atau } (x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ atau } x = 4$$

$$f(0) = 0^3 - 6(0)^2 = 0 \text{ dan } f(4) = 4^3 - 6(4)^2 = 64 - 96 = -32.$$

$f''(0) = 6 \cdot 0 - 12 = -12 < 0$ , sehingga  $(0, 0)$  merupakan titik balik maksimum dan nilai balik maksimumnya adalah  $0$ .

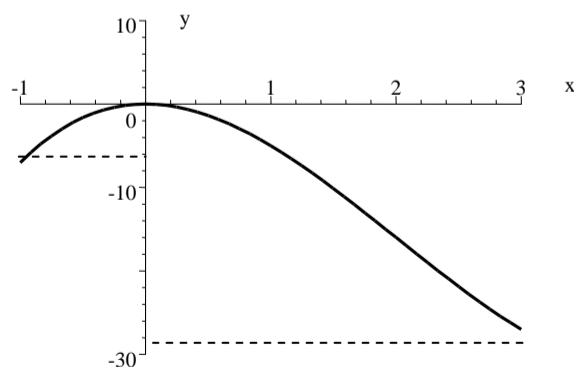
$f''(4) = 6 \cdot 4 - 12 = 18 > 0$ , sehingga  $(4, -32)$  merupakan titik balik minimum dan nilai balik minimumnya adalah  $-32$ . Nilai ini tidak diperhitungkan karena  $x = 4$  di luar interval yang diberikan.

(ii) Menentukan nilai  $f$  pada batas-batas interval.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 = -5 \text{ dan } f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 = 27 - 54 = -27.$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh nilai minimum dari  $f$  adalah  $-27$  dan nilai maksimum  $f$  adalah  $0$ .

Jadi  $-27 \leq f(x) = x^3 - 6x^2 \leq 0$  pada interval  $-1 \leq x \leq 3$ , seperti terlihat pada Gambar 25.



Gambar 25.

**Tugas 11**

Tentukanlah nilai-nilai maksimum atau minimum fungsi-fungsi berikut dalam interval tertutup yang diberikan. Nyatakanlah hasilnya dalam bentuk  $a \leq f(x) \leq b$  dan tunjukkanlah dengan sketsa.

1.  $f(x) = x^2$  pada interval  $-3 \leq x \leq 3$
2.  $f(x) = x^2 - 9$  pada interval  $-4 \leq x \leq 4$
3.  $f(x) = 2x - x^2$  pada interval  $-1 \leq x \leq 1\frac{1}{2}$
4.  $f(x) = 2x^3 - 6x$  pada interval  $-2 \leq x \leq 2$
5.  $f(x) = 2x^2 - x^4$  dalam  $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

**12. Soal-soal tentang Maksimum dan Minimum****Contoh 22**

Sebidang tanah terletak sepanjang suatu tembok. Tanah itu kan dipagari untuk peternakan ayam. Pagar kawat yang tersedia panjangnya 400 m. Peternakan itu dibuat berbentuk persegi panjang. Tentukanlah ukurannya agar terdapat daerah peternakan yang seluas-luasnya.

Jawab:

Pertama-tama dibuat model matematika dari soal itu, kemudian dianalisa.

Jika lebar kandang  $x$  meter maka panjangnya  $(400 - 2x)$  meter. Jelaslah bahwa  $x \geq 0$  dan  $(400 - 2x) \geq 0$ . Jadi  $0 \leq x \leq 200$ .

Luas kandang dalam  $m^2$  adalah  $L(x) = x(400 - 2x) = 400x - 2x^2$

$L'(x) = 400 - 4x = 4(100 - x)$  dan  $L''(x) = -4$

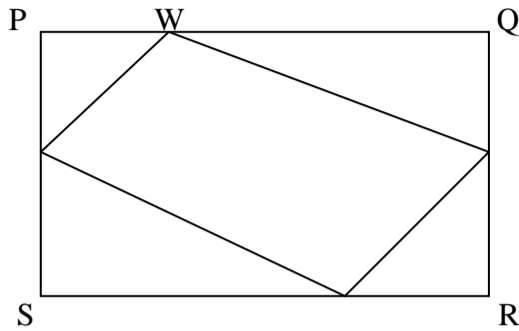
$L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 100$ , karena  $L''(100) = -4 < 0$ , maka  $L(100)$  nilai balik maksimum.

Jadi untuk  $x = 100$  terdapat nilai balik maksimum  $L(100) = 20.000$ . Pada ujung-ujung interval  $0 \leq x \leq 200$  terdapat  $L(0) = 0$  dan  $L(200) = 0$

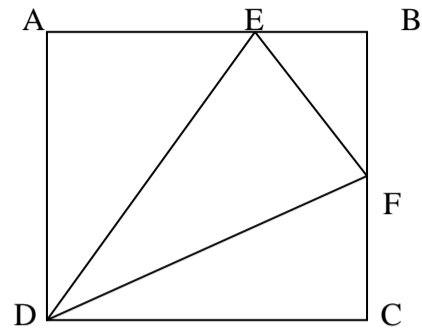
Jadi luas maksimum yang ditanyakan adalah  $20.000 m^2$  yang terjadi jika lebarnya 100 m dan panjangnya 200 m.

**Tugas 12**

1. Tinggi  $h$  meter suatu roket setelah  $t$  detik adalah  $h(t) = 600t - 5t^2$ . Tentukanlah tinggi maksimum roket itu.
2. Jumlah dua bilangan  $x$  dan  $y$  adalah 40, dan hasil kalinya  $p$ . Tulislah persamaan yang menyatakan hubungan antara  $x$  dan  $y$ . Kemudian nyatakan  $p$  dalam  $x$ . Tentukanlah hasil kali yang terbesar.
3. Keliling suatu persegipanjang 100 m
  - a. Jika panjangnya  $x$  meter dan lebarnya  $y$  meter tulislah persamaan paling sederhana yang menyatakan hubungan antara  $x$  dan  $y$
  - b. Tulislah rumus luas  $L m^2$  untuk persegipanjang itu. Nyatakan  $L$  dalam  $x$ . Tentukanlah ukuran persegipanjang tersebut agar luasnya maksimum.
4. Sehelai karton berbentuk persegi panjang dengan lebar 5 cm dan panjang 8 cm. Pada tempat sudut karton itu dipotong bujursangkar yang sisinya  $x$  cm. Dari bangun yang didapat dibuat kotak tanpa tutup yang tingginya  $x$  cm. Tentukanlah ukuran kotak agar isinya sebanyak-banyaknya.
5. Pada Gambar 26 PQRS adalah persegipanjang yang lebarnya 6 cm dan panjangnya 10 cm;  $PW = QX = RY = SZ = x$  cm seperti tampak pada gambar
  - a. Dengan pengurangan luas PQRS oleh luas 4 segitiga buktikanlah bahwa luas segiempat WXYZ adalah  $L cm^2$  dengan  $L(x) = 60 - 16x + 2x^2$
  - b. Tentukanlah luas minimum segiempat tersebut



Gambar 26.



Gambar 27

6. Pada Gambar 27., tampak bujursangkar ABCD dengan sisi 10 cm,  $BE = x$  cm dan  $CF = 2x$  cm. Nyatakanlah panjang AE dan BF dalam  $x$ . Tunjukkanlah bahwa luas  $\triangle DEF$  adalah  $L$  cm<sup>2</sup> dengan  $L(x) = 50 - 10x + x^2$ . Kemudian tentukan  $x$  sehingga  $L$  minimum.
7. Segitiga siku-siku OAB terbentuk dari sumbu  $x$ , sumbu  $y$  dan garis  $g$  yang persamaannya  $y = 8 - 2x$ . Titik  $P(x,y)$  terletak pada garis  $g$ . Dari  $P$  dibuat garis-garis tegak lurus sumbu-sumbu sehingga terjadi persegipanjang dengan diagonal  $OP$ . Nyatakanlah luas persegipanjang itu dalam  $x$ . Tentukanlah koordinat  $P$  sehingga luas persegipanjang maksimum.
8. Suatu kotak alasnya berbentuk bujursangkar dengan sisi  $x$  cm dan tinggi kotak  $h$  cm, atasnya terbuka. Isi kotak  $32 \text{ cm}^3$ 
  - a. Tulislah persamaan yang menyatakan hubungan  $x$  dengan  $h$ . Tulislah juga rumus untuk luas permukaan kotak  $L \text{ cm}^2$  dinyatakan dengan  $x$  dan  $h$
  - b. Tunjukkan bahwa  $L(x) = x^2 + 128/x$  dan kemudian tentukanlah ukuran kotak agar bahan untuk membuat kotak itu sesedikit mungkin.