2.1 ALGORITMA PEMBAGIAN

Teorema 2.1 Algoritma Pembagian

Misalkan a dan b bilangan bulat dan $b > 0$, maka ada bilangan bulat q dan r yang unik (tunggal) yang memenuhi $a = qb + r$ dengan $0 \leq r < b$.
Bilangan q disebut *hasil bagi* dan r disebut *sisa* dari pembagian a oleh b.

Bukti:

Misalkan $S = \{ a - xb \mid x$ suatu bilangan bulat; $a - xb \geq 0\}$. Pertama-tama akan ditunjukkan S tidak kosong. Jelaslah S memuat bilangan bulat non-negatif. Karena $b \geq 1$ maka $|a|b \geq |a|$, juga $a - (-|a|)b = a + |a|b \geq a + |a| \geq 0$. Untuk $x = -|a|$, $a - xb$ terletak pada S, dengan demikian S tidak kosong.
Berdasarkan WOP himpunan S memuat unsur terkecil, sebut saja r. Berdasarkan definisi dari S, maka ada bilangan bulat q yang memenuhi $r = a - qb$ dengan $0 \leq r$. Selanjutnya akan ditunjukkan $r < b$. Andaikan tidak demikian, artinya $r \geq b$ atau $r - b = a - qb - b = a - (q+1)b \geq 0$. Bentuk $a - (q+1)b$ jelas menunjukkan unsur dari S, tetapi karena $b > 0$, $a - (q+1)b = r - b < r$, menyimpulkan r bukan unsur terkecil yangi bertentangan dengan pemisalan bahwa r sebagai unsur terkecil. Dengan demikian pengandaian itu salah dan haruslah $r < b$.

Selanjutnya akan ditunjukkan keunikan (ketunggalan) dari q dan r.
Andaikan q dan r tidak unik, katakanlah memiliki dua representasi yang berbeda, $a = qb + r = q'b + r'$ dengan $0 \leq r < b$ dan $0 \leq r' < b$. Dengan demikian $r' - r = b(q - q')$ atau $| r' - r | = |b(q - q')|$ atau atau $| r' - r | = b|q - q'|$.
Berdasarkan pertidaksamaan $0 \leq r < b$ dan $0 \leq r' < b$, diperoleh $-b < r' - r < b$ atau dengan kata lain $| r' - r | < b$. Dengan demikian disimpulkan $b|q - q'| < b$ atau $0 \leq |q - q'| < 1$. Karena $|q - q'|$ bilangan bulat non negatif, maka haruslah $|q - q'| = 0$ atau $q = q'$ dan mengakibatkan $r = r'$.

Corollary (Akibat Teorema 2.1)

Jika a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$, maka ada bilangan bulat yang unik q dan r sehingga $a = qb + r$ dengan $0 \leq r < | b|$

Bukti

Pembuktian ini cukup untuk kasus $b < 0$, sebab untuk $b > 0$ telah dibuktikan sebelumnya.
Jika $b < 0$, maka $| b| > 0$, berdasarkan teorema 1.3 di atas ada q' dan r yang unik sehingga $a = q' | b| + r$ dengan $0 \leq r < | b|$.
Sebagai catatan bahwa $| b| = -b$, dapat dipilih $q = -q'$, hingga diperoleh $a = qb + r$ dengan $0 \leq r < | b|$.
Sebagai ilustrasi, jika $b < 0$, misalkan $b = -7$, untuk masing-masing a = 1, -2, 61, dan –59 diperoleh ekspresi sebagai berikut:

$$1 = 0(-7) + 1$$
$$-2 = 1(-7) + 5$$
$$61 = (-8)(-7) + 5$$
$$-59 = 9(-7) + 4$$

Sekarang akan digambarkan terapan dari algoritma pembagian tersebut. Sebagai ilustrasi, jika b = 2 , maka sisa pembagian yang mungkin adalah r = 0 dan r =1, bilangan bulat a yang dapat dinyatakan sebagai a = 2q disebut bilangan genap, jika r = 1, bilangan bulat a dapat dinyatakan sebagai 2q + 1 disebut bilangan ganjil. Perhatikan bilangan bulat a^2, maka kemungkinannya $(2q)^2 = 4k$ atau $(2q+1)^2 = 4(q^2+q) +1 = 4k + 1$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa suatu bilangan kuadrat dibagi oleh 4, maka sisanya 0 atau 1.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa, kuadrat dari suatu bilangan ganjil berbentuk 8k +1. Berdasarkan algoritma pembagian, setiap bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai sebuah bentuk dari empat bentuk berikut; 4k, 4k + 1, 4k + 2, atau 4k +3. Menurut klasifikasi itu bilangan ganjil hanya dapat berbentuk 4k + 1 atau 4k +3. Jika bilangan ganjil itu berbentuk 4k + 1, maka $(4k+1)^2 = 8(2q^2 + q) + 1 = 8k +1$. Jika bilangan ganjil itu berbentuk 4k + 3, maka $(4k+3)^2 = 8(2q^2 + 3q +1) + 1 = 8k +1$. Sebagai contoh kuadrat dari bilangan 7 adalah 49 = 8.6 + 1, sedangkan kuadrat dari 13 adalah 169 = 8.21 + 1.

Contoh 1

Misalkan a bilangan bulat dengan $a \geq 1$. Tunjukkan bahwa $a(a^2 +2)/3$ adalah sebuah bilangan bulat.

Bukti:

Menurut algoritma pembagian, setiap bilangan bulat a dapat diklasifikasikan ke dalam bentuk 3q, 3q + 1, atau 3q + 2

Jika a = 3q, maka $\dfrac{a(a^2+2)}{3} = \dfrac{3q(9q^2+2)}{3} = q(9q^2+2)$

Jika a = 3q + 1, maka $\dfrac{a(a^2+2)}{3} = \dfrac{(3q+1)((3q+1)^2+2)}{3} = (3q+1)(3q^2+2q+1)$

Sedangkan jika a = 3q +2, maka

$$\frac{a(a^2+2)}{3} = \frac{(3q+2)((3q+2)^2+2)}{3} = (3q+2)(3q^2+4q+2)$$

Dengan demikian untuk semua kasus telah dibuktikan bahwa setiap bilangan bulat $a \geq 1$ ekspresi $a(a^2 +2)/3$ adalah bilangan bulat.

Soal 2.1

1. Buktikan bahwa jika a dan b bilangan bulat dengan b > 0, maka ada q dan r yang unik yang memenuhi a = qb + r dimana $2b \leq r < 3b$.
2. Tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat yang dinyatakan dalam bentuk 6k + 5 dapat dinyatakan sebagai bentuk 3j + 2. Tetapi sebaliknya tidak berlaku.
3. Gunakan algoritma pembagian untuk menunjukkan pernyataan berikut:
   (a) Kuadrat suatu bilangan bulat berbentuk 3k atau 3k + 1
   (b) Kubik (pangkat tiga) suatu bilangan bulat berbentuk satu di antara 9k, 9k + 1 atau 9k + 8

(c) Pangkat empat dari suatu bilangan bulat berbentuk $5k$ atau $5k + 1$

4. Buktikan bahwa bentuk $3a^2 - 1$ tidak mungkin bilangan kuadrat.
5. Untuk $n \geq 1$, buktikan $n(n+1)(2n+1)/6$ adalah bilangan bulat.
6. Tunjukkan bahwa pangkat tiga dari suatu bilangan bulat berbetuk $7k$ atau $7k \pm 1$.
7. Periksa bahwa suatu bilangan kuadrat dan sekaligus bilangan kubik (seperti $64 = 8^2 = 4^3$) haruslah berbentuk $7k$ atau $7k + 1$.
8. Jika n suatu bilangan ganjil, tunjukkan $n^4 + 4n^2 + 11$ berbentuk $16k$.