ALGORITMA EUCLID

Algoritma Euclid dirumuskan sebagai berikut: Misalkan akan dicari pembagi persekutuan terbesar dari bilangan bulat a dan b. Karena ppt ($|a|$, $|b|$) = ppt (a,b) dan misalkan a $\geq$ b > 0. Langkah pertama menerapkan algoritma pembagian terhadap a dan b diperoleh

$$a = q_1 b + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < b$$

Jika terjadi r_1= 0. maka b$|$a dan ppt(a,b) = b. Jika $r_1 \neq 0$, bagilah b oleh r_1 dan diperoleh q_2 dan r_2 yang memenuhi

$$b = q_2 r_1 + r_2 \qquad 0 \leq r_2 < r_1$$

Jika r_2 = 0, maka berhenti, sebaliknya jika $r_2 \neq 0$ dengan cara yang sama diperoleh

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \qquad 0 \leq r_3 < r_2$$

Proses pembagian ini dilanjutkan sampai sisa pembagian nol, katakanlah pada langkah ke (n+1) yang mana r_{n-1} dibagi r_n dengan $b > r_1 > r_2 > \ldots \geq 0$.

Proses di atas menghasilkan sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} a &= q_1 b + r_1 & 0 &\leq r_1 < b \\ b &= q_2 r_1 + r_2 & 0 &\leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 & 0 &\leq r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_3 & 0 &\leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0 \end{aligned}$$

Sisa pembagian yang terakhir yang bukan nol r_n = ppt(a,b).

Lemma.
Jika a = qb + r, maka ppt(a,b) = ppt(b,r)

Bukti:
Jika d = ppt(a,b) maka d$|$a dan d$|$b mengakibatkan d$|$(a-qb) atau d$|$r. Jadi d pembegi persekutuan dari b dan r. Di lain pihak jika c sebarang pembagi persekutuan dari b dan r, maka c$|$(qb+r) atau c$|$a. Ini mengakibatkan c merupakan pembagi persekutuan dari a dan b dengan c $\leq$ d. Berdasarkan definisi pembagi persekutuan terbesar d = ppt(a, b) = ppt(b,r).

Berdasarkan lemma ini, dari sistem persamaan di atas diperoleh
ppt(a,b) = ppt(b, r_1) = ppt(r_1, r_2) = … = ppt(r_{n-1}, r_n) = ppt(r_n, 0) = r_n

Pada teorema sebelumnya menyatakan bahwa ppt (a,b) dapat dinyatakan sebagai ax + by. Untuk menentukan x dan y yang memenuhi ppt (a,b) = ax + by adalah dengan subsitusi balik algoritma Euclid ini.

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-2} - q_n r_{n-1} \\ r_n &= r_{n-2} - q_n (r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2}) \\ &= (1 + q_n q_{n-1}) r_{n-2} + (-q_n) r_{n-3} \end{aligned}$$

Representasi rn sebagai kombinasi linear dari r_{n-2} dan r_{n-3}. Dengan meneruskan subsitusi balik dari sistem persamaan tersebut, kita akan berhasil mengeliminasi r_{n-1}, r_{n-2}, …, r_2, r_1 sehingga r_n= ppt(a,b) dinyatakan sebagai kombinasi linear dari a dan b.

Contoh

Algoritma Euclid dapat digunakan untuk menentukan ppt(12378,3054). Berdasarkan algoritma pembagian diperoleh:

$$\begin{aligned}
12378 &= 4.\ 3054 + 162\\
3054 &= 18.\ 162 + 138\\
162 &= 1.\ 138 + 24\\
138 &= 5.\ 24 + 18\\
24 &= 1.\ 18 + 6\\
18 &= 3.6 + 0
\end{aligned}$$

Seperti telah dikatakan sebelumnya bahwa sisa terakhir yang bukan nol dari persamaan tersebut yaitu 6 merupakan pembagi persekutuan terbesar dari 12378 dan 3054, jadi 6 = ppt(12378, 3054).

Untuk menyatakan 6 sebagai kombinasi linear dari 12378 dan 3054, kita mulai dari persamaan sebelum persamaan terakhir dan selanjutnya mengeliminasi sisa-sisa 18, 24, 138, dan 162.

$$\begin{aligned}
6 &= 24 - 18\\
&= 24 - (138 - 5.24)\\
&= 6.\ 24 - 138\\
&= 6(162 - 138) - 138\\
&= 6.\ 162 - 7.\ 138\\
&= 6.\ 162 - 7(3054 - 18.162)\\
&= 132.162 - 7.\ 3054\\
&= 132\ (12378 - 4.\ 3054) - 7.\ 3054\\
&= 132.\ 12378 + (-535)3054
\end{aligned}$$

Jadi 6 = ppt(12378,3054) = 12378x + 3054y dengan x = 132 dan y = -535. Perlu dicatat bahwa nilai x dan y yang memenuhi 6 = 12378 x + 3054 y tidaklah tunggal, misalnya

$$\begin{aligned}
6 &= (132 + 3054)\ 12378 + (-535 - 12378)3054\\
&= 3186.\ 12378 + (-12913)3054.
\end{aligned}$$

Matematikawan Perancis Gabriel Lamè (1795-1870) membuktikan bahwa banyaknya langkah yang diperlukan dalam algoritma Euclid ini paling banyak 5 kali banyaknya digit dari bilangan yang lebih kecil. Misalnya , dalam menentukan ppt (12378, 3054) di atas, bilangan 3054 (lebih kecil dari 12378) memiliki empat digit, maka langkah algoritma Euclid tidak akan lebih dari 5 . 4 = 20 langkah. Kenyataannya proses tersebut hanya mnemerlukan 6 langkah.

Perlu dicata pula bahwa langkah dalam algoritma Euclid ini biasanya dapat disingkat lagi dengan memilih sisa r_{k+1} sehingga $|r_{k+1}| < r_k/2$. Contoh soal di atas dapat diselesaikan lebih singkat seperti berikut.

$$12378 = 4.\ 3054 + 162$$

$$
\begin{aligned}
3054 &= 19.\ 162 - 24\\
162 &= 1.\ 138 + 24\\
138 &= 7.\ 24\ - 6\\
24 &= (-4)(-6) + 0
\end{aligned}
$$

Teorema

Jika $k > 0$, maka ppt(ka,kb) = k ppt(a,b).

Bukti:

Dengan mengalikan k terhadap proses algoritma Euclid yang telah diuaraikan sebelumnya, diperoleh:

$$
\begin{array}{ll}
ka = q_1(bk) + r_1k & 0 \le r_1k < bk\\
bk = q_2(r_1k) + r_2k & 0 \le r_2k < r_1k\\
r_1k = q_3(r_2k) + r_3k & 0 \le r_3k < r_2k\\
\quad\vdots & \\
r_{n-2}k = q_n(r_{n-1}k) + r_3k & 0 \le r_nk < r_{n-1}k\\
r_{n-1}k = q_{n+1}(r_nk) + 0 &
\end{array}
$$

Dengan demikian ppt(ka,kb) = r_nk = k. ppt(a,b).

Teorema Akibat.

Untuk sebarang $k \neq 0$, ppt(ka,kb) = $|k|$ ppt (a,b).

Bukti:

Cukup dibuktikan untuk kasus $k < 0$, maka $-k = |k| > 0$. Berdasarkan teorema di atas maka ppt(ak,bk) = ppt(-ak, -bk) = ppt(a$|k|$, b$|k|$) = $|k|$ ppt(a,b).

Definisi

Kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan bulat yang tidak nol dituliskan kpt(a,b) adalah bilangan bulat positif m yang memenuhi

(a) $a | m$ dan $b | m$

(b) Jika $a | c$ dan $b | c$ dengan $c > 0$, maka $m \le c$

Teorema

Untuk a dan b bilangan bulat posisif ppt (a,b). kpt (a,b) = ab

Bukti:

Misalkan d = ppt(a,b) dan a = dr dan b = ds untuk suatu r dan s bilangan bulat. Jika m = ab/d, maka m as = br, akibatnya m (suatu bilangan positif) sebagai kelipatan persekutuan dari a dan b.

Sekarang misalkan c bilangan bulat positif merupakan kelipatan persekutuan dari a dan b, katakanlah c = au = bv. Seperti kita ketahui bahwa ada x dan y yang memenuhi d = ax + by sehingga

$$\frac{c}{m} = \frac{cd}{ab} = \frac{c(ax+by)}{ab} = (\frac{c}{b})x + (\frac{c}{a})y = vx + uy$$

Pernyataan ini menyatakan bahwa m$\mid$c, hingga dapat disimpulkan bahwa m ≤ c. Berdasarkan definisi kelipatan persekutuan terkecil, maka m = ppt(a,b) dimana kpt(a,b) = $\frac{ab}{d} = \frac{ab}{ppt(a,b)}$.

Teorema Akibat

Untuk setiap bilangan positif a dan b, kpt (a,b) = ab jika dan hanya jika ppt(a,b) = 1.

Bukti:

Berdasarkan teorema di atas ppt(a,b).kpt(a,b) = ab.

Jika kpt(a,b) = ab, maka ppt(a,b) = $\frac{ab}{ab} = 1$

Jika ppt(a,b) = 1 maka kpt (a,b) = $\frac{ab}{1} = ab$

Pada contoh sebelumnya telah diketahui bahwa ppt(12378, 3054) = 6, maka kpt(12378,3054) = $\frac{12378.3054}{6}$ = 6.300.402

Bahwa pembagi persekutuan terbesar ini dapat diperluas lebih dari dua bilangan. Dalam kasus tiga bilangan, misalkan a, b, dan c bilangan yang tidak nol, maka ppt (a.b,c) = d adalah bilangan bulat positif yang memenuhi sifat berikut.

(a) d merupakan pembagi dari a , b dan c
(b) Jika c membagi a, b, dan c, maka c ≤ d

Sebagai contoh, ppt(39,42, 54) = 3 dan ppt(49, 210, 350) = 7.

Soal-soal:

1. (a) Carilah ppt(143,227), ppt(306,657), ppt(272, 1479).
   (b) Carilah kpt(143,227), kpt(306,657), kpt(272, 1479).
2. Gunakan algoritma Euclid untuk memperoleh x dan y yang memenuhi
   (a) ppt(56,72) = 56x + 72y
   (b) ppt(24,138) = 24x +138y
   (c) ppt(119,272) = 119x + 272y
   (d) ppt(1769,2378) = 1769x + 2378y
3. Buktikan jika d pembagi persekutuan dari a dan b, maka d = ppt(a,b) jika dan hanya jika ppt(a/d. b/d) = 1
4. Untuk bilangan bulat a, b dan n ≥ 1 tunjukkan:
   (a) Jika ppt(a,b) =1, maka ppt(a^n, b^n) = 1
   (b) Jika $a^n \mid b^n$ maka an$\mid$bn
5. Carilah bilangan bulat x, y, dan z sehingga ppt(198, 288, 512) = 198x + 288y + 512 z.
   (Petunjuk: Misalkan d = ppt(198,288). Karena ppt(198,288,512) = ppt(d,512), maka terlebih dahulu tentukan u dan v yang memenuhi ppt(d,512) = du + 512v).