BAB I
TEORI KETERBAGIAN DALAM BILANGAN BULAT

1.1 Pendahuluan

Well-Ordering Principle

Jika S himpunan bagian dari himpunan bilangan bulat positif yang tidak kosong, maka S memiliki sebuah unsur terkecil.
Unsur a dikatakan unsur terkecil dari S, apabila berlaku $a \leq b$ untuk setiap $b \in S$.

Teorema 1.1 :S ifat Archimides

Jika a dan b sembarang bilangan bulat positif, maka ada sebuah bilangan bulat positif n sehingga $na \geq b$.

Bukti:

Andaikan teorema di atas salah. Negasi dari teorema itu adalah untuk beberapa a dan b bilangan bulat positif berlaku $na < b$ untuk setiap n bilangan bulat positif.
Berdasarkan pernyataan ini (negasi dari teorema) dapat dibentuk himpunan $S = \{ b - na \mid n$ bilangan bulat positif$\}$, yang tentu hanya memuat bilangan bulat positif.
Berdasarkan WOP, himpunan S dipastikan memiliki sebuah unsur terkecil, sebut saja $b - ma$.
Dari aturan pembentukan himpunan S, maka $b - (m+1)a$ juga unsur dari S. Namun ternyata $b - (m + 1)a = (b - ma) - a < b - ma$, atau dengan kata lain kontradiksi dengan $b - ma$ sebagai unsur terkecil dari S. Artinya justru yang diandaikan benar itu salah, maka haruslah berlaku pernyataan teorema tersebut.

Teorema 1.2 Prinsip Induksi Terhingga

Misalkan S adalah sebuah himpunan bagian dari bilangan bulat positif yang memiliki sifat berikut: (a) 1 unsur dari S, (b) jika k unsur dari S maka k+1 juga unsur dari S. Dapat disimpulkan S adalah himpunan semua bilangan bulat positif.

Bukti:

Misalkan T adalah himpunan semua bilangan bulat positif yang tidak terletak dalam S dan diasumsikan T tidak kosong. Menurut WOP, T memiliki unsur terkecil, misal a. Karena 1 dalam S, tentu $a > 1$, juga karena a unsur terkecil dari T maka $a - 1$ bukan unsur dari T , dengan demikian $a - 1$ dalam S. Berdasarkan sifat S (sifat b), maka S memuat $(a - 1) + 1 = a$. Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa a terletak pada T. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa T adalah himpunan kosong dan mengakibatkan S memuat semua bilangan bulat positif.

Contoh 1:
Buktikan bahwa formula di bawah ini berlaku untuk setiap n bilangan bulat positif.

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \qquad (1)$$

Bukti:

Untuk n = 1, diperoleh $1^2 = \dfrac{1(2+1)(1+1)}{6} = 1$, artinya 1 terletak dalam S

Anggaplah k dalam S, artinya berlaku

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(2k+1)(k+1)}{6} \qquad (2)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan k + 1 dalam S, atau

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[2(k+1)+1][(k+1)+1]}{6}$$

Perhatikan persamaan (2), jika kedua ruasnya ditambah dengan $(k+1)^2$ diperoleh

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k)(2k+1)(k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k)(2k+1)(k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[2(k+1)+1][(k+1)+1]}{6}$$

Hal ini menunjukkan bahwa jika k dalam S maka k+1 juga dalam S, dan berdasarkan teorema 1.2 haruslah S memuat semua bilangan bulat positif, artinya formula tersebut benar untuk n = 1,2,3,...

Pembuktian dengan menggunakan teorema 1.2 ada kalanya kurang efektif. Oleh karena itu prinsip tersebut dimodifikasi menjadi seperti berikut ini.
Misalkan S adalah sebuah himpunan bagian dari bilangan bulat positif yang memiliki sifat berikut: (a) 1 unsur dari S, (b) jika k suatu bilangan bulat positif, sehingga 1,2,...,k dalam S, maka k+1 juga unsur dari S.
Dapat disimpulkan S adalah himpunan semua bilangan bulat positif.

Contoh 2:
Diberikan barisan Lucas: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ...
$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk setian $n \geq 3$
Buktikan untuk setiap bilangan bulat positif berlaku $a_n < (7/4)^n$
Bukti:
Untuk n = 1 dan 2 ternyata ketidaksamaan itu berlaku, sebab $a_1 = 1 < (7/4)^1 = 7/4$ dan $a_2 = 3 < (7/4)^2 = 49/16$.
Ambil $k \geq 3$ dan anggaplah ketidaksamaan tersebut berlaku untuk n = 1, 2, ..., k-1. Dengan demikian berlaku $a_{k-1} < (7/4)^{k-1}$ dan $a_{k-2} < (7/4)^{k-2}$, selanjutnya akan ditunjukkan $a_k < (7/4)^k$.

$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} < (7/4)^{k-1} + (7/4)^{k-2} = (7/4 + 1)(7/4)^{k-2} = 11/4\,(7/4)^{k-2} < (7/4)^2(7/4)^{k-2} =$
$(7/4)^k$.
Karena ketidaksamaan itu benar untuk n = k ketika untuk n = 1, 2, ..., k-1 benar, maka dapat disimpulkan $a_n < (7/4)^n$ untuk semua $n \geq 1$.

Soal-soal
1. Buktikan dengan induksi matematika berikut ini.

$$(a)\quad 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \text{ untuk setiap } n \geq 1$$

$$(b)\quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \text{ untuk setiap } n \geq 1$$

$$(c)\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \text{ untuk setiap } n \geq 1$$

2. Buktikan bahwa pangkat tiga dari suatu bilangan bulat positif (bilangan kubik) dapat inyatakan sebagai selisih dua bilangan kuadrat.
(Petunjuk: $n^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3)$)
3. (a) Carilah nilai $n \leq 7$ sehingga n! +1 adalah bilangan kuadrat.
(b) Benar atau salah ? Untuk setiap m dan n bilangan bulat positif (mn)! = m!n! dan (m +n)! = m! + n!
4. Tunjukkan bahwa $(2n)!/2^n\, n!$ adalah suatu bilangan bulat untuk setiap $n \geq 0$

1.2 Algoritma Pembagian

Teorema 1.3 Algoritma Pembagian
Misalkan a dan b bilangan bulat dan $b > 0$, maka ada bilangan bulat q dan r yang unik (tunggal) yang memenuhi $a = qb + r$ dengan $0 \leq r < b$.
Bilangan q disebut *hasil bagi* dan r disebut *sisa* dari pembagian a oleh b.

Bukti:
Misalkan $S = \{ a - xb \mid x$ suatu bilangan bulat; $a - xb \geq 0\}$.
Pertama-tama akan ditunjukkan S tidak kosong.
Jelaslah S memuat bilangan bulat non-negatif. Karena $b \geq 1$ maka $|a|b \geq |a|$, juga $a - (-|a|)b = a + |a|b \geq a + |a| \geq 0$. Untuk $x = -|a|$, $a - xb$ terletak pada S, dengan demikian S tidak kosong.
Berdasarkan WOP himpunan S memuat unsur terkecil, sebut saja r. Berdasarkan definisi dari S, maka ada bilangan bulat q yang memenuhi $r = a - qb$ dengan $0 \leq r$.
Selanjutnya akan ditunjukkan $r < b$. Andaikan tidak demikian, artinya $r \geq b$ atau $r - b = a - qb - b =$
$a - (q+1)b \geq 0$. Bentuk $a - (q+1)b$ jelas menunjukkan unsur dari S, tetapi karena $b > 0$, $a - (q+1)b = r - b < r$, menyimpulkan r bukan unsur terkecil yangi bertentangan dengan pemisalan bahwa r sebagai unsur terkecil. Dengan demikian pengandaian itu salah dan haruslah $r < b$.
Selanjutnya akan ditunjukkan keunikan (ketunggalan) dari q dan r.
Andaikan q dan r tidak unik, katakanlah memiliki dua representasi yang berbeda, $a = qb + r = q'b + r'$ dengan $0 \leq r < b$ dan $0 \leq r' < b$. Dengan demikian $r' - r = b(q - q')$ atau $| r' - r | = |b(q - q')|$ atau atau $| r' - r | = b|q - q'|$.
Berdasarkan pertidaksamaan $0 \leq r < b$ dan $0 \leq r' < b$, diperoleh $-b < r' - r < b$ atau dengan kata lain $| r' - r | < b$. Dengan demikian disimpulkan $b|q - q'| < b$ atau
$0 \leq |q - q'| < 1$. Karena $|q - q'|$ bilangan bulat non negatif, maka haruslah $|q - q'| = 0$ atau $q = q'$ dan mengakibatkan $r = r'$.

Corollary (Akibat teorema 1.3)
Jika a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$, maka ada bilangan bulat yang unik q dan r sehingga $a = qb + r$ dengan $0 \leq r < | b|$
Bukti
Pembuktian ini cukup untuk kasus $b < 0$, sebab untuk $b > 0$ telah dibuktikan sebelumnya.
Jika $b < 0$, maka $| b| > 0$, berdasarkan teorema 1.3 di atas ada q' dan r yang unik sehingga $a = q' | b| + r$ dengan $0 \leq r < | b|$.
Sebagai catatan bahwa $| b| = -b$, dapat dipilih $q = -q'$, hingga diperoleh $a = qb + r$ dengan $0 \leq r < | b|$.
Sebagai ilustrasi, jika $b < 0$, misalkan $b = -7$, untuk masing-masing a = 1, -2, 61, dan –59 diperoleh ekspresi sebagai berikut:
$1 = 0(-7) + 1$

-2 = 1(-7) + 5
61 = (-8)(-7) + 5
-59 = 9(-7) + 4

Sekarang akan digambarkan terapan dari algoritma pembagian tersebut. Sebagai ilustrasi, jika b = 2 , maka sisa pembagian yang mungkin adalah r = 0 dan r =1, bilangan bulat a yang dapat dinyatakan sebagai a = 2q disebut bilangan genap, jika r = 1, bilangan bulat a dapat dinyatakan sebagai 2q + 1 disebut bilangan ganjil. Perhatikan bilangan bulat a^2, maka kemungkinannya $(2q)^2 = 4k$ atau $(2q+1)^2 = 4(q^2+q) +1 = 4k + 1$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa suatu bilangan kuadrat dibagi oleh 4, maka sisanya 0 atau 1.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa, kuadrat dari suatu bilangan ganjil berbentuk 8k +1. Berdasarkan algoritma pembagian, setiap bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai sebuah bentuk dari empat bentuk berikut; 4k, 4k + 1, 4k + 2, atau 4k +3. Menurut klasifikasi itu bilangan ganjil hanya dapat berbentuk 4k + 1 atau 4k +3.
Jika bilangan ganjil itu berbentuk 4k + 1, maka $(4k+1)^2 = 8(2q^2 + q) + 1 = 8k +1$.
Jika bilangan ganjil itu berbentuk 4k + 3, maka $(4k+3)^2 = 8(2q^2 + 3q +1) + 1 = 8k +1$.
Sebagai contoh kuadrat dari bilangan 7 adalah 49 = 8.6 + 1, sedangkan kuadrat dari 13 adalah 169 = 8.21 + 1.

Contoh:
Misalkan a bilangan bulat dengan a ≥ 1. Tunjukkan bahwa $a(a^2 +2)/3$ adalah sebuah bilangan bulat.
Bukti:
Menurut algoritma pembagian, setiap bilangan bulat a dapat diklasifikasikan ke dalam bentuk 3q, 3q + 1, atau 3q + 2
Jika a = 3q, maka $\dfrac{a(a^2+2)}{3} = \dfrac{3q(9q^2+2)}{3} = q(9q^2+2)$
Jika a = 3q + 1, maka $\dfrac{a(a^2+2)}{3} = \dfrac{(3q+1)((3q+1)^2+2)}{3} = (3q+1)(3q^2+2q+1)$
Sedangkan jika a = 3q +2, maka
$$\frac{a(a^2+2)}{3} = \frac{(3q+2)((3q+2)^2+2)}{3} = (3q+2)(3q^2+4q+2)$$

Dengan demikian untuk semua kasus telah dibuktikan bahwa setiap bilangan bulat a ≥ 1 ekspresi $a(a^2 +2)/3$ adalah bilangan bulat.

Soal-soal
1. Buktikan bahwa jika a dan b bilangan bulat dengan b > 0, maka ada q dan r yang unik
yang memenuhi a = qb + r dimana 2b ≤ r < 3b
2. Tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat yang dinyatakan dalam bentuk 6k + 5 dapat

dinyatakan sebagai bentuk $3j + 2$. Tetapi sebaliknya tidak berlaku.

3. Gunakan algoritma pembagian untuk menunjukkan pernyataan berikut:
   (a) Kuadrat suatu bilangan bulat berbentuk $3k$ atau $3k + 1$
   (b) Kubik (pangkat tiga) suatu bilangan bulat berbentuk satu di antara $9k$, $9k + 1$ atau $9k + 8$
   (c) Pangkat empat dari suatu bilangan bulat berbentuk $5k$ atau $5k + 1$
4. Buktikan bahwa bentuk $3a^2 - 1$ tidak mungkin bilangan kuadrat
5. Untuk $n \geq 1$, buktikan $n(n+1)(2n+1)/6$ adalah bilangan bulat
6. Tunjukkan bahwa pangkat tiga dari suatu bilangan bulat berbetuk $7k$ atau $7k \pm 1$
7. Periksa bahwa suatu bilangan kuadrat dan sekaligus bilangan kubik (seperti $64 = 8^2 = 4^3$) haruslah berbentuk $7k$ atau $7k + 1$
8. Jika n suatu bilangan ganjil, tunjukkan $n^4 + 4n^2 + 11$ berbentuk $16k$.

1. Teorema Binomial
2. Teorema bilangan dahulu