HASIL KALI TITIK DAN PROYEKSI ORTOGONAL SUATU VEKTOR
(Aljabar Linear)

Oleh: H. Karso

FPMIPA UPI

A. Hasil Kali Titik (Hasil Kali Skalar) Dua Vektor

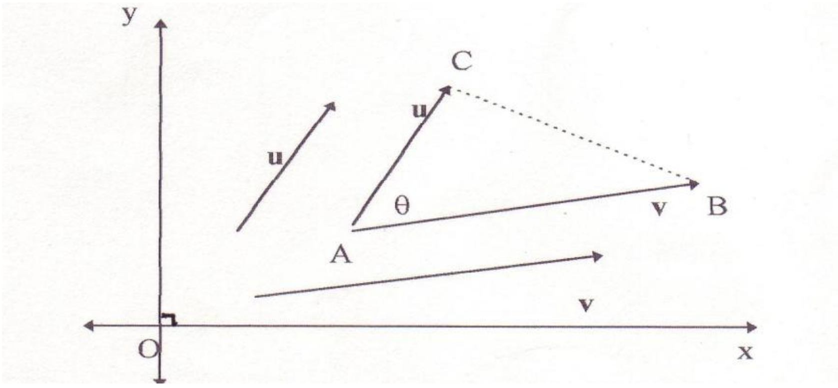
1. Hasil Kali Skalar Dua Vektor di R^2

Perkalian diantara dua vektor tidak seperti perkalian diantara dua bilangan real. Perkalian diantara dua bilangan real hasil kalinya adalah sebuah bilangan real lagi. Namun hasil kali dua vektor belum tentu demikian. Ada beberapa jenis perkalian vektor dengan notasi dan hasil yang berbeda. Ada perkalian titik (dot product), ada perkalian silang (*cross product*), dan ada pula **perkalian bar (***bar product***)**. Khusus dalam kegiatan belajar yang ini, hanya akan dibahas tentang **perkalian titik** atau **hasil kali skalar** dari dua vektor. Hal ini disesuaikan dengan Garis-garis Besar Program Pengajaran Mata Kuliah Aljabar Linear..

Kita perhatikan dua buah vektor yang bukan merupakan vektor nol, misalnya $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dan yang dimaksud dengan **hasil kali skalar** (*scalar product*) dari dua vektor, yaitu vektor u dan vektor v adalah bentuk

$$|\mathbf{u}| . |\mathbf{v}| \ . \text{Cos}\ \theta$$

dengan θ adalah sudut yang dibentuk diantara **u** dan **v**, $0^o \leq \theta \leq 180^o$ (definisi).



Gambar 4. 37

Apakah Anda masih ingat salah satu aturan (rumus Cosinus) yang berlaku dalam segitiga ABC? (Trigonometri). Tentunya salah satu diantaranya seperti berikut (Gambar 4. 37).

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AC|.|AB| \ . \cos\theta.$$

Sekarang kita perhatikan ruas kiri dan ruas kanan dari rumus di atas, yaitu :

Ruas kanan :

$$|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2|\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{AB}| \ . \cos\theta$$

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \ . \cos\theta \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ruas kiri :

$$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}|^2 = |-\mathbf{v} + \mathbf{u}|^2 .= \left|\begin{pmatrix}-v_1\\ -v_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix}u_1 - v_1\\ u_2 - v_2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left(\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}\right)^2$$

$$= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2$$

$$= (u_1^2 + u_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) - 2(u_1v_1 + u_2v_2)$$

$$= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2), \text{ sebab}$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \ \text{ dan } \ |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$\overrightarrow{BC} = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan dari rumus cosinus di atas, maka (1) = (2), atau $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|$. Cos θ = $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$ - $2(u_1v_1 + u_2v_2)$

$$-2|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \text{ . Cos } \theta = -2(u_1v_1 + u_2v_2)$$

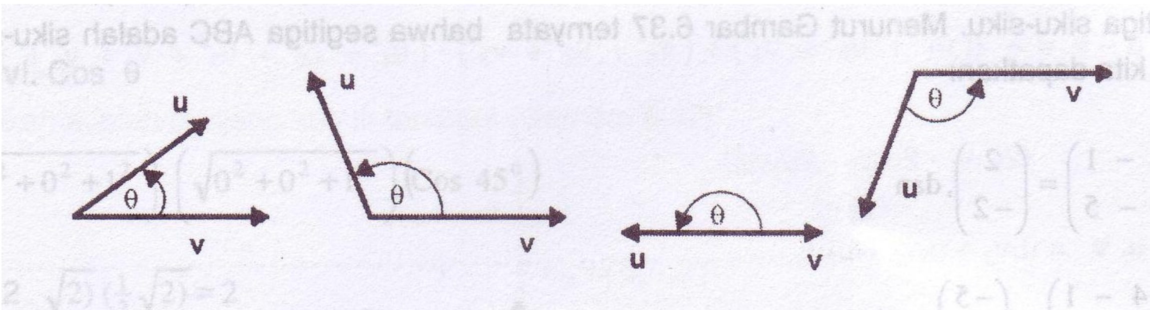
$$|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \text{ . Cos } \theta = u_1v_1 + u_2v_2$$

Kombinasi bentuk $u_1v_1 + u_2v_2$ diberi nama dan lambang yang khusus, yaitu sebagai **perkalian titik** (*dot product*) atau **hasil kali skalar** (*scalar product*), dan diberi lambang **u** . **v**. Karena penulisan ini, maka perkalian titik itu adalah :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

$$= |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \text{ . Cos } \theta$$

Kita sudah mengetahui, bahwa jika θ sudut lancip, maka tentunya Cos θ adalah positif, berarti **u** . **v** positif. Sedangkan jika θ sudut tumpul, maka Cos θ adalah negatif, berarti **u** . **v** negatif. Demikian pula sebaliknya jika **u** . **v** positif, maka Cos θ adalah positif dan θ adalah sudut lancip. Sedangkan jika **u** . **v** negatif, maka Cos θ adalah negatif dan θ adalah sudut tumpul.



Gambar 4. 38

Contoh 4. 4

Jika **u** = [3 , 0] dan **v** = [2 , 2], maka

a) Hasil kali skalarnya : **u . v** = $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$= 3 \cdot 4 + 0 \cdot 3 = 12$$

b) Cosinus sudut diantara **u** dan **v**

$$\text{Cos } \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

$= \dfrac{12}{\sqrt{9+0}+\sqrt{9+16}}$

$= \dfrac{12}{3+5}$

$= \dfrac{12}{8}$

$= 1\dfrac{1}{2}$

Tentunya besar sudut θ dapat kita cari (pakai kalkulator atau daftar matematika)

c) Sudut diantara **u** dan **v** (θ).

Karena **u . v** positif dan Cos θ juga positif, maka θ adalah sudut lancip.

Sekarang bagaimana jika kedua vektor itu saling tegak lurus ? Karena kedua vektor **u** dan **v** saling tegak lurus, maka sudut diantara keduanya adalah 90^o atau $\theta = 90^o$, berarti Cos θ = 0. Karena **u** . **v** = $|\mathbf{u}| . |\mathbf{v}|$. Cos θ, maka kedua vektor **u** dan **v** saling tegak lurus jika dan hanya jika dot productnya sama dengan nol, atau

$$\mathbf{u} \text{ tegak lurus } \mathbf{v} \Leftrightarrow \text{Cos}\theta = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} = 0.$$

Contoh 4. 5

Misalnya kita akan memperlihatkan bahwa titik-titik A(1,5), B(3,3), dan C(-4,0) adalah titik-titik puncak segitiga siku-siku. Menurut Gambar 4. 39 ternyata bahwa segitiga ABC adalah siku-siku di titik sudut A. Jadi kita dapatkan :

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, dan

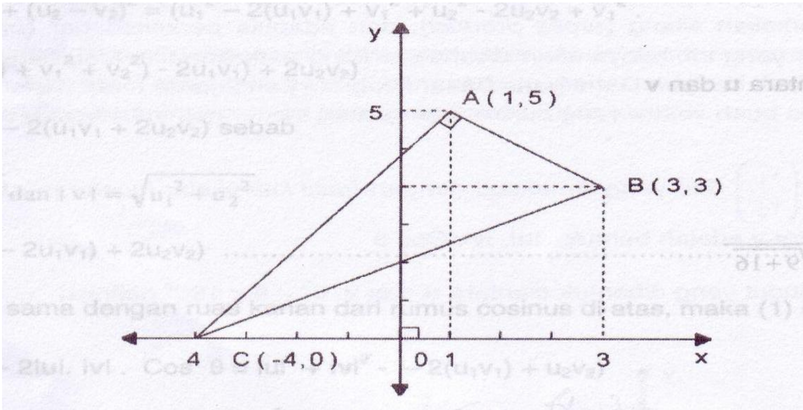
$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4-1 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$, maka

$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC}$ = 2 . (-5) + (-2) . (-5)

= -10 + 10

= 0

Karena perkalian titiknya nol, maka terbuktilah bahwa segitiga ABC adalah segitiga siku-siku, dalam hal ini siku-siku di titik sudut A.



Gambar 4. 39

2. Hasil Kali Skalar Dua Vektor di R^3

Dalam kegiatan belajar 2.1 telah kita pelajari perkalian titik diantara dua vektor di R^2, dan dalam kegiatan belajar ini akan kita bahas perkalian titik diantara dua vektor di R^3.

Sama seperti halnya vektor-vektor di R^2, bahwa jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor di ruang 3 (R^3) dan θ sudut diantara **u** dan **v,** maka hasil kali skalar atau perkalian titik (dot product) **u** dan **v** didefinisikan oleh :

$$\mathbf{u}\ .\ \mathbf{v} = \begin{cases} |\,\mathbf{u}\,|.|\,\mathbf{v}\,|\,\text{Cos}\,\theta \ \text{jika}\ \mathbf{u} \neq 0 \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{jika}\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Contoh 4. 6

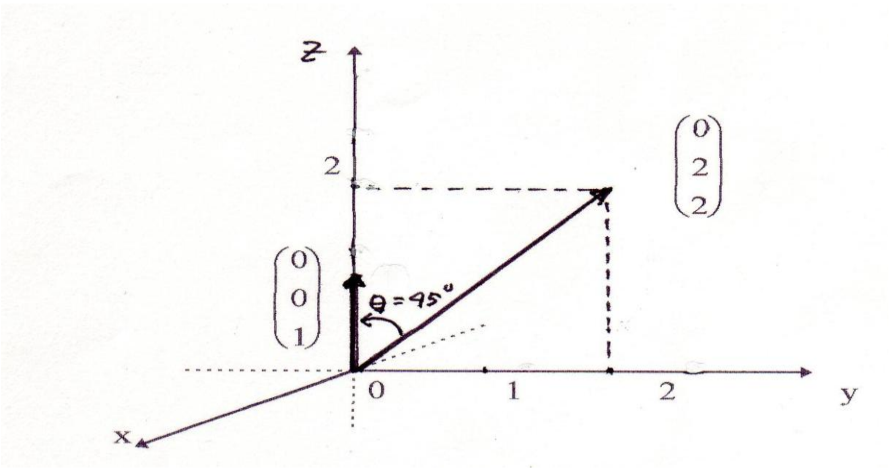
Diperlihatkan dalam Gambar 4. 40, bahwa sudut diantara vektor u = [0 , 0 , 1] dan vektor v = [0 , 2 , 2] adalah 45^o.

Jadi,

$$\mathbf{u}\ .\ \mathbf{v} = |\,\mathbf{u}\,|.|\,\mathbf{v}\,| \ .\ \text{Cos}\,\theta$$

$$= \left(\sqrt{0^2+0^2+1^2}\right).\left(\sqrt{0^2+2^2+2^2}\right).\left(\cos 45^o\right)$$

$$= (1).(2\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 2.$$



Gambar 4. 40

Misalkan **u** = [u_1 ,u_2 , u_3] dan **v** = [v_1 , v_2 , v_3] adalah dua buah vektor yang tak nol dengan θ adalah sudut antara **u** dan **v** (Gambar 4. 41). Dengan menggunakan rumus cosinus, kita dapatkan :

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \ . \operatorname{Cos}\theta \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

Karena $\overrightarrow{PQ}$ = **v - u**, maka kita dapat menuliskan (1) menjadi

$$|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \ . \operatorname{Cos}\theta$$

$$|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \ . \operatorname{Cos}\theta = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2\right)$$

atau $\mathbf{u} . \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2\right)$

Substitusikan : $|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$

$|\mathbf{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, dan

$|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$

Selanjutnya kita dapatkan :

$$\mathbf{u} . \mathbf{v} = \frac{1}{2}\{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1 + v_2 + v_3)$$

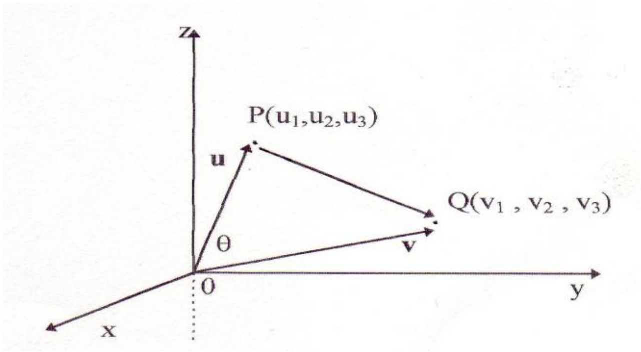
$$- 2u_1v_1 - 2u_2v_2 - 2u_3v_3)\}$$

$$\mathbf{u} . \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

Jika **u** = [u_1 , u_2] dan **v** = [v_1 , v_2] dua vektor di R^2, maka menurut rumus (2) :

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$

Bandingkan dengan kegiatan belajar bagian A.1 yang telah lalu.



Gambar 4. 41

Contoh 4. 7

Perhatikan vektor-vektor **u** = [2 , -1 , 1] dan **v** = [1 , 1 , 2].

Carilah **u . v** dan tentukan pula sudut θ, yaitu sudut antara **u** dan **v**.

Penyelesaian :

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

$= (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$

Karena $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = \sqrt{6}$, maka

$$\text{Cos } \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

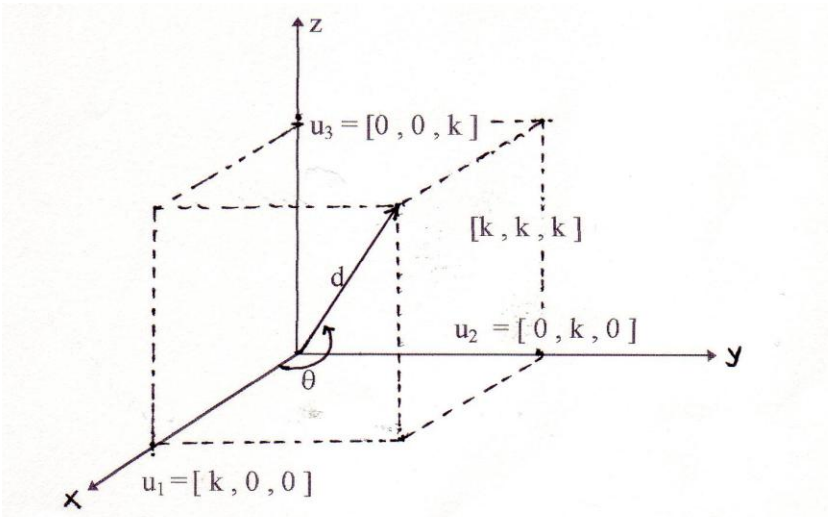
Jadi , θ = 60^o.

Contoh 4. 8

Carilah sudut diantara sebuah diagonal suatu kubus dengan salah satu rusuknya.

Penyelesaian :

Misalkan k adalah panjang kubus tersebut (Gambar 4. 42)



Gambar 4. 42

Jika kita misalkan $\mathbf{u}_1$ = [k , 0 , 0], $\mathbf{u}_2$ = [0 , k , 0], dan $\mathbf{u}_3$ = [0 , 0 , k], maka vektor

$\mathbf{d}$ = [k , k , k] = $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ adalah diagonal kubus tersebut. Sudut antara diagonal dengan sisi u_1 memenuhi

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}_1 . \mathbf{d}}{|\mathbf{u}|.|\mathbf{d}|} = \frac{k}{(k)(\sqrt{3k^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \text{Cos}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54^o 44'.$$

Teorema sudut memperlihatkan bagaimana perkalian titik kaitannya dengan sudut antara dua vektor dan kaitan yang penting antara panjang sebuah vektor dengan perkalian titik.

Teorema. Misalkan **u** dan **v** adalah vektor-vektor di ruang 2 atau ruang 3.

(a) $\mathbf{v}\ .\ \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$ sehingga $|\mathbf{v}| = (\mathbf{v}.\mathbf{v})^{\frac{1}{2}}$

(b) Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor yang tidak nol dan θ adalah sudut diantara kedua vektor tersebut, maka

θ adalah lancip, jika dan hanya jika $\mathbf{u}\ .\ \mathbf{v} > 0$

θ adalah tumpul, jika dan hanya jika **u . v** < 0

$\theta = \frac{\pi}{2}$, jika dan hanya jika **u . v** = 0

Bukti :

(a) Karena sudut antara **v** dengan **v** adalah 0^o ($\theta = 0^o$), maka

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}||\mathbf{v}| \cos\theta = |\mathbf{v}|^2 \cos\theta = |\mathbf{v}|^2.$$

(b) Karena $|\mathbf{u}| > 0, |\mathbf{v}| > 0$, dan $\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,.\,|\mathbf{v}|\cos\theta$, maka **u . v** bertanda sama dengan $\cos\theta$. Karena memenuhi $0^o \leq \theta \leq \pi$, berarti sudut θ lancip jika dan hanya jika $\cos\theta < 0$, θ tumpul jika dan hanya jika $\cos\theta < 0$, dan $\theta = \frac{\pi}{2}$ jika dan hanya jika $\cos\theta = 0$.

Contoh 4. 9

Jika **u** = [1 , -2 , 3] , **v** = [-3 , 4 , 2] , dan **w** = [3 , 6 , 3],

maka **u . v** = (1)(-3) + (-2)(4) +(3)(2) = -5

v . w = (-3)(3) + (4)(6) +(2)(3) = 21

u . w = (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0

Sehingga **u** dan **v** membentuk sudut tumpul, **v** dengan **w** membentuk sudut lancip, dan **u** dengan **w** saling tegak lurus.

Beberapa sifat perhitungan utama dari perkalian titik dimuat dalam teorema berikutnya.

Teorema. Jika **u**, **v** dan **w** vektor-vektor di ruang 2 atau ruang 3 dan k adalah sembarang skalar, maka

(a) **u . v = v . u**

(b) **u . (v + w)** = **u . v** + **u . w**

(c) k(**u . v**) = (k**u**) **. v = u .** (k**v**)

(d) **v . v** > 0 jika **v** ≠ 0 dan **v . v** = 0 jika **v** = 0

Bukti: Kita akan membuktikan bagian (c) dalam ruang 3 dan yang lainnya diberikan sebagai latihan. Misalkan **u** = [u_1 , u_2 , u_3] dan **v** = [v_1 , v_2 , v_3], maka

$$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$
$$= (ku_1)\mathbf{v} + (ku_2)\mathbf{v} + (ku_3)\mathbf{v}$$
$$= (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}.$$

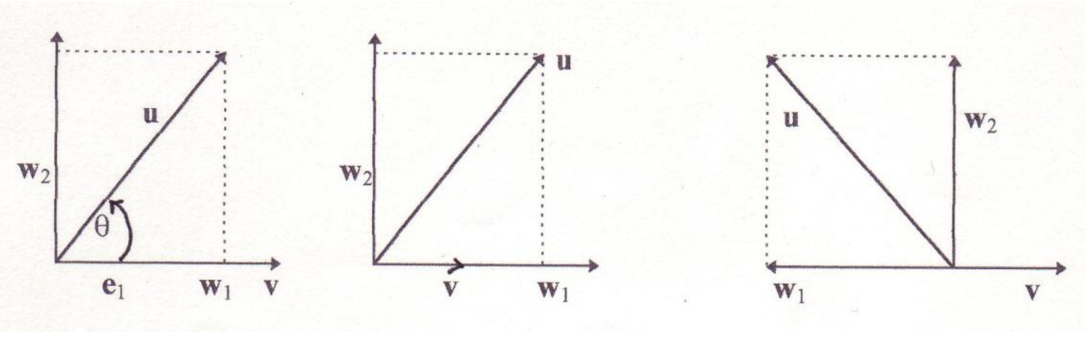
Menurut bagian (b) dari teorema pertama tadi, kita mendefinisikan dua vektor **u** dan **v** yang saling tegak lurus atau ortogonal (dituliskan $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$) jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Berarti, jika suatu vektor membentuk sudut $\frac{\pi}{2}$ dengan vektor lainnya, maka dua vektor itu saling ortogonal dan secara geometris kedua vektor itu saling tegak lurus dan sebaliknya.

B. Proyeksi Ortogonal Suatu Vektor Terhadap Vektor lain

Perkalian titik atau hasil kali skalar dua vektor akan kita pakai untuk menguraikan suatu vektor menjadi jumlah dua vektor yang saling tegak lurus. Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor yang tidak nol di ruang 2 atau ruang 3, maka selalu memungkinkan untuk menuliskan vektor **u** menjadi

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

dengan w_1 kelipatan skalar dari **v**, dan w_2 tegak lurus terhadap **v** (Gambar 4. 43). Vektor w_1 disebut **proyeksi ortogonal dari u pada v**, dan vektor w_2 disebut **komponen dari u yang ortogonal terhadap kepada v**.



Gambar 4. 43

Karena $\mathbf{w}_1$ adalah kelipatan skalar dari **v**, maka dapat kita tuliskan $\mathbf{w}_1 = k\mathbf{v}$. Jadi

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\mathbf{v} + \mathbf{w}_2 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Dengan melakukan perkalian titik pada kedua ruas (3) dengan $\mathbf{v}$, dan menurut teorema pertama serta teorema kedua, kita dapatkan

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (k\mathbf{v} + \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v} = k\,|\mathbf{v}|^2 + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}$$

Karena $\mathbf{w}_2$ tegak lurus terhadap $\mathbf{v}$, kita dapatkan $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$, sehingga persamaan di atas menghasilkan

$$k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$$

Karena $\mathbf{w}_1 = k\mathbf{v}$, kita dapatkan :

$$\boxed{\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\, \mathbf{v} \text{ (proyeksi ortogonal dari } \mathbf{u} \text{ pada } \mathbf{v})}$$

Dengan menyelesaikan $\mathbf{u}$ $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ untuk $\mathbf{w}_2$ memberikan

$$\boxed{\mathbf{w}_2 = u - \text{proy } \mathbf{v}^{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\, \mathbf{v}, \text{ (komponen dari } \mathbf{u} \text{ yang ortogonal pada } \mathbf{v}).}$$

Proyeksi ortogonal dari $\mathbf{u}$ pada $\mathbf{v}$, yaitu $\mathbf{w}_1$ dapat pula kita cari dengan langkah-langkah sebagai berikut :

Dengan memperhatikan gambar 2.7 di atas, maka menurut definisi fungsi cosinus dalam trigonometri :

$$\text{Cos } \theta = \frac{|\mathbf{w}_1|}{|\mathbf{u}|} \text{ atau } |\mathbf{w}_1| = |\mathbf{u}| \,.\, \text{Cos} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(1)

Dari rumus hasil kali skalar (perkalian titik) antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, yaitu

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \,.\, |\mathbf{v}| \,.\, \text{Cos } \theta \text{ atau Cos } \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \,.\, |\mathbf{v}|} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) :

$$|\mathbf{w}_1| = |\mathbf{u}| \cdot \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Karena setiap vektor yang tidak nol, termasuk $\mathbf{w}_1$ selalu mempunyai vektor satuan yang searah dengan $\mathbf{w}_1$ misalkan $\mathbf{e}_1$, maka :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|} \text{ dengan } |\mathbf{e}| = 1$$

Demikian pula dengan vektor **v** akan mempunyai vektor satuan, misal namanya $\mathbf{e}_2$, maka

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \text{ dengan } |\mathbf{e}_2| = 1$$

Karena $\mathbf{w}_1$ segaris dengan **u** (mungkin searah atau berlawanan arah), maka $\mathbf{w}_1$ proyeksi **u** pada **v** (lihat ambar 4. 43), maka vektor satuan $\mathbf{w}_1$ akan sama dengan vektor satuan **v**, yang berarti

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{v}|} \text{ .... } (3)$$

Untuk setiap vektor termasuk $\mathbf{w}_1$ selalu berlaku

$$\mathbf{w}_1 = |\mathbf{w}_1| \,.\, \mathbf{e} \text{ dengan } \mathbf{e} \text{ vektor satuan } \mathbf{w}_1 \text{ .... } (4)$$

Dari (3) dan (4)

$$|\mathbf{w}_1| = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \text{ (proyeksi ortogonal } \mathbf{u} \text{ pada } \mathbf{v})$$

Contoh 4. 10

Perhatikan vektor-vektor **u** = [2 , -1 , 3] dan **v** = [4 , -1 , 2]

Karena

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$

dan $$|\mathbf{v}|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$$

maka proyeksi ortogonal dari **u** pada **v** adalah

$$|\mathbf{w}_1| = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{15}{21}[\,4 , -1 , 2\,] = [\,\frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7}\,]$$

Komponen dari **u** yang ortogonal kepada **v** adalah

$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = [\ 2\ ,\ -1\ ,\ 3\ ] - [\ \frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7}\ ] = [\ \frac{-6}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{11}{7}\ ]$

Untuk mengeceknya, maka para pembaca dapat membuktikan bahwa $\mathbf{w}_2$ tegak lurus kepada **v** dengan menunjukkan bahwa $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$.

Untuk mengetahui tingkat pemahaman Anda dalam mempelajari materi **Kegiatan Belajar** di atas, kerjakanlah soal-soal latihan berikut.

Latihan

1. Gambarlah vektor-vektor untuk mencari besar sudut B dari segitiga dengan titik-titik sudut A(-1,0), B(-2,1), dan C(1,4).

2. Jika $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + \mathbf{a}_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + \mathbf{b}_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ dengan $\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ dan $\mathbf{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ berturut-turut adalah vektor-vektor satuan pada sumbu x, sumbu y, dan sumbu z.

   Tentukanlah hasil kali skalar antara **a** dan **b**.

3. Jelaskan mengapa bentuk **u . (v . w**) tidak berarti?

4. Diketahui $\mathbf{p} = [\ 2\ ,\ -1\ ,\ 2\ ]$ dan $\mathbf{q} = [\ 3\ ,\ 2\ ,\ -1\ ]$ adalah vektor-vektor di R^3, sedangkan **r** adalah vektor proyeksi dari **p** dan **q**. Tulislah **r** dalam bentuk komponen.

5. Jika $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, tentukan panjang proyeksi vektor **u** dan **v**.

Setelah Anda mencoba menyelesaikan soal-soal latihan di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk jawaban latihan berikut.

Petunjuk Jawaban Latihan

1. Sudut B terletak antara $\overrightarrow{BA}$ dan $\overrightarrow{BC}$ dengan $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

sehingga

$BA \cdot BC = |BA| . |BC| . \text{Cos} \angle B$

$$\text{Cos} \angle B = \frac{BA.BC}{|BA|.|BC|} = \frac{1.3 + (-1).3}{\sqrt{8}.\sqrt{18}}$$

$\text{Cos} \angle B = 0$

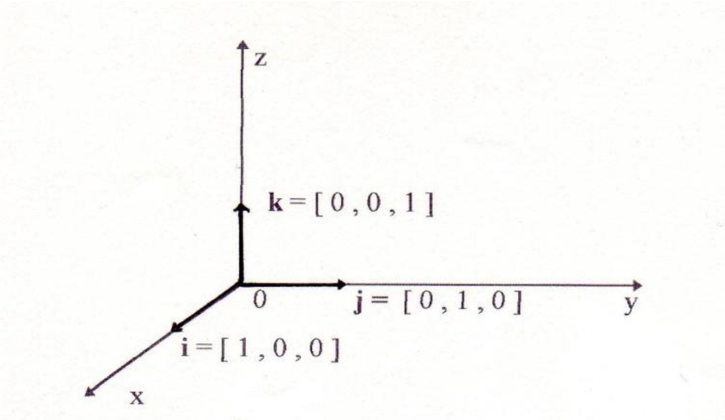
Jadi $\angle B = 90^o$.

2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$

$= a_1b_1(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + a_1b_2(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + a_1b_3(\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) + a_2b_1(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + a_2b_2(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + a_2b_3(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) + a_3b_1(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) + a_3b_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) + a_3b_3(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})$.

$= a_1b_1(1) + a_1b_2(0) + a_1b_3(0) + a_2b_1(0) + a_2b_2(1) + a_2b_3(0) + a_3b_1(0) + a_3b_2(0) + a_3b_3(1)$.

$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$



Gambar 4. 44

3. **u . (v . w)** tidak berarti, sebab **v . w** hasilnya adalah skalar, sedang **u .** k yaitu perkalian titik diantara vektor dengan skalar tidak didefinisikan.

4. Menurut rumus pyoyeksi ortogonal :

$$r = \frac{p \cdot q}{|q|^2}\, q = \frac{2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1)}{9+4+1}\,[3,2,-1]$$

$$= \frac{1}{7}\,[\,3\,,2\,,-1\,]$$

$$= [\,\frac{3}{7}\,,\frac{2}{7}\,,\frac{-1}{7}\,]$$

5. Misal proyeksi **u** pada **v** adalah **w**, maka menurut rumus proyeksi

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v}$$

dan panjang proyeksi vektor **u** pada **v** adalah

$$|\,\mathbf{w}\,| = \left|\,\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\,\mathbf{v}\,|^2}\,\mathbf{v}\,\right| = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|^2}|\mathbf{v}| = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

$$= \frac{(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$|\mathbf{w}| = 2.$$

Sekarang coba Anda buat rangkuman dari **Kegiatan Belajar 2**, kemudian bandingkan dengan rangkuman berikut.

Rangkuman

1. Hasil Kali Skalar Dua Vektor di R^2 (Perkalian Titik dari Dua Vektor)

Jika $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \theta$, maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\,\mathbf{u}\,| \cdot |\,\mathbf{v}\,| \cdot \cos\theta$$

$$= u_1v_1 + u_2v_2$$

2. Hasil kali Skalar Dua Vektor di R^3 (Perluasan Perkalian Titik di R^3)

Jika $\mathbf{u} = [\, u_1 , u_2 , u_3 \,]$, $\mathbf{v} = [\, v_1, v_2 , v_3 \,]$, $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \theta$,

$= u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

maka :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

$$= |\,\mathbf{u}\,| . |\,\mathbf{v}\,| \; . \cos\theta$$

3. Proyeksi Ortogonal Suatu Vektor Terhadap Vektor

Jika **u** dan **v** dua vektor yang bukan vektor nol, maka

$\mathbf{w}_1 = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \cdot \mathbf{v}$ disebut proyeksi ortogonal dari **u** pada **v**, dan

$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \cdot \mathbf{v}$ disebut komponen dari **u** yang ortogonal pada **v**.

Kerjakanlah soal-soal **Tes Formatif** berikut dengan cara memberi tanda silang (X) di depan pernyataan yang menurut Anda paling tepat.

Tes Formatif

1. Sudut antara vektor **u** = [6 , 1 , 3] dengan **v** = [4 , 0 , -3]

   A. lancip
   C. ortogonal
   B. tumpul
   D. A, B, C salah

2. Jika **u** = [2 , k] , **v** = [-3 , 4], dan **u** tegak lurus terhadap **v**, maka k =

   A. $\frac{-10}{3}$
   C. $\frac{10}{3}$
   B. $\frac{6}{5}$
   D. $\frac{-6}{5}$

3. Cosinus sudut diantara vektor **u** = [1 , 0 , 0] dan **v** = 3 , 4 , 0]

   A. $\frac{5}{3}$
   C. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{5}{2}$

4. Jika **u**, **v**, dan **w** sembarang vektor dan k skalar real, maka diantara pernyataan berikut yang terdefinisikan (mempunyai arti)

A. $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$

C. k(**u** + **v**)

B. (**u . v**) + **w**

D. (**u . v**) + k

5. Untuk setiap $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, maka $\frac{1}{|\mathbf{v}|} \cdot \mathbf{v}$ mempunyai panjang

A. 2

C. 0

B. 1

D. -1

6. Jika titik P(4 , 7 , 0), Q(6 ,10 , -6), dan titik R(1 , 9 , 0) maka ukuran sudut QPR =

A. 30^o

C. 60^o

B. 45^o

D. 90^o

7. Proyeksi ortogonal dari vektor **u** = $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ pada vektor **v** = $\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

A. [0 , 1]

C. [1 , 0]

B. [1 , 1]

D. [0 , 0]

8. Komponen vektor **u** = $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ yang ortogonal pada vektor **v** = $\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

A. [-9 , 3]

C. [3 , -9]

B. [6 , 2]

D. [2 , 6]

9. Proyeksi ortogonal vektor p = **I** + 3**j** + 4**k** pada vektor q = 10**I** + 11**j** - 2**k**

A. $\frac{70}{3}\mathbf{i} + \frac{77}{3}\mathbf{j} - \frac{14}{3}\mathbf{k}$

C. $\frac{77}{3}\mathbf{i} + \frac{70}{3}\mathbf{j} - \frac{14}{3}\mathbf{k}$

B. $\frac{7}{3}\mathbf{i} + \frac{7}{3}\mathbf{j} - \frac{7}{3}\mathbf{k}$

D. $\frac{14}{3}\mathbf{i} + \frac{77}{3}\mathbf{j} - \frac{70}{3}\mathbf{k}$

10. Panjang proyeksi vektor **a** = 2**i** - 6**j** + 3**k** pada vektor **b** = 4**i** + 2**j** - 4**k**

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{4}{2}$

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

---

1. A $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

   $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 6$

   Karena **u . v** > 0, maka $\angle$ (**u , v**) = lancip

2. B Karena **u** $\perp$ **v** berarti

   $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

   $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

   $\Leftrightarrow -6 + 5k = 0$

   $\Leftrightarrow k = \left(\frac{6}{5}\right)$

3. C $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| . |\mathbf{v}| . \text{Cos } \theta = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

   $= \sqrt{1}.\sqrt{25}.\text{Cos}\theta = 3 + 0 + 0$

   $= 5 \text{ Cos } \theta = 3$

   $\text{Cos}\theta = \frac{3}{5}$

4. D Sebab (**u . v**) + k diawali oleh **u . v** yang hasilnya skalar dan ditambah skalar k hasilnya tentu berupa skalar lagi. Sedangkan pernyataan lainnya semuanya tidak mempunyai arti (tidak didefinikan dalam vektor).

5. B Untuk setiap $\mathbf{v}$ di R^2 atau di R^3 panjang $\dfrac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \left|\dfrac{\mathbf{1}}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}\right|$

$$= \left|\frac{1}{|\mathbf{v}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}.|\mathbf{v}|$$

$$= 1$$

6. D Misal $\overrightarrow{PQ}$ wakil dari **a**, $\overrightarrow{PR}$ wakil dari **b**, dan θ adalah sudut QPR, maka :

$\mathbf{a} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$, dan

$\mathbf{b} = \mathbf{r} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dengan menggunakan $\mathbf{a.b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 + 6 + 0$

sehingga Cos θ = $\dfrac{\mathbf{a}\ .\ \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ .\ |\mathbf{b}|}$ = 0, maka θ = 90^o

7. D Proyeksi ortogonal **u** = [2 , 6] pada **v** = [-9 , 3] adalah

$\mathbf{w}_1 = \dfrac{\mathbf{u}\ .\ \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\ \mathbf{v} = \dfrac{2\ .\ (-9)\ +\ 6\ .\ (3)}{(\sqrt{81}\ +\ 9)^2}$ [-9 , 3]

$= \dfrac{0}{90}$ [-9 , 3] = [0 , 0]

8. D Karena $\mathbf{w}_1$ = [0 , 0], dari soal nomor 7 di atas, maka komponen dari **u** yang ortogonal pada **v** adalah

$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$ = [2 , 6] – [0 , 0] = [2 , 6]

9. A Proyeksi ortogonal **p = i +** 3**j** + **4k** pada vektor q = **10i** + **11j** – 2**k** adalah

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^2}\,\mathbf{q} = \frac{(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\cdot(10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k})}{(\sqrt{10^2 + 11^2 + (-2)^2})^2}(10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k})$$

$$= \frac{10 + 33 - 8}{15}(10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

$$= \frac{7}{3}\,(10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

$$= \frac{70}{3}\mathbf{i} + \frac{77}{3}\mathbf{j} - \frac{14}{3}\mathbf{k}$$

10. C Panjang proyeksi vektor **a** pada vektor **b**

$$\left|\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\,\mathbf{b}\right| = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}|\,\mathbf{b}\,| = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\,\mathbf{b}\,|}$$

$$= \frac{(2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k})\cdot(4\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 4\mathbf{k})}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{4}{3}$$

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank, JR.Ph.D, (1982). *Theory and Problems of Matrices*, Singapore: Schaum's Outline, Mc-Graw Hill Book Company.

Anton Howard, (1987), *Elementary Linear Algebra*, 5th Edition New York: John Wiley & Sons.

Larry Smith. (1998). *Linear* Algebra. Gottingen: Springer.

Raisinghania & Aggarwal, R.S, (1980), *Matrices*, New Delhi: S.Chan & Company Ltd.

Roman Steven (1992). *Advanced Linear Algebra*, New York, Berlin, Herdelberg, London, Paris, Tokyo, Hongkong, Barcelona, Budapest: Springer-Velag.

Seymour Lipschutz. (1981). *Linear Algebra*, Singapore: Schaum's Outline, Mc-Graw Hill Book Company.