Drs. Karso Modul 9

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN DENGAN HARGA MUTLAK

PENDAHULUAN

Modul yang sekarang Anda pelajri ini adalah modul yang kesembilan dari mata kuliah Matematika Sekolah Dasar Lanjut. Adapun materi bahasannya terbagi menjadi dua bagian besar. Bagian pertama dari Kegiatan Pertama membahas tentang persamaan dengan harga mutlak. Dalam bagian ini dibahas mulai dari pengertian konsep harga mutlak, hubungan antara jarak dengan harga mutlak, persamaan dan kesamaan, sifat-sifat atau teorema-teorema harga mutlak sampai pada penerapannya dalam menyelesaikan persamaan dengan satu dan dua harga mutlak.

Kemudian dalam bagian kegiatan belajar yang kedua dibahas persoalan pertidaksamaan dengan harga mutlak. Topik-topik bahasannya meliputi pengertian konsep dasar pertidaksamaan, sifat-sifat pertidaksamaan, sifat-sifat pertidaksamaan harga mutlak, dan penyelesaian pertidaksamaan harga mutlak. Dalam membahas sifat-sifat atau teorema-teorema tentang persamaan harga mutlak dan pertidaksamaan harga mutlak dilengkapi pula dengan alternatif-alternatif pembuktiannya.

Materi-materi dalam modul ini ada yang menyangkut materi-materi dasar seperti konsep harga mutlak, persamaan, pertidaksamaan beserta sifat-sifatnya. Materi-materi ini merupakan materi-materi prasyarat dalam mempelajari matematika lainnya. Selain itu, dalam modul inipun banyak dimuat materi-materi pendalaman untuk menambah wawasan matematika sehingga akan memantapkan pemahaman matematika lanjut lainnya dan dalam menjalani pembelajaran di sekolah dasar.

Perlu pula diketahui bahwa untuk mempelajari materi-materi dalam modul ini tentunya akan mempermudah Anda dalam mempelajarinya, jika kita telah memahami materi-materi matematika sekolah. Selain itu tentunya pula akan sangat membantu Anda dalam memahami materi dalam modul ini jika kita telah memahami materi-materi dalam modul sebelumnya, termasuk materi-materi matematika dalam modul-modul program D2 PGSD.

Secara umum tujuan instruksional yang hendak dicapai modul ini adalah mengharapkan Anda untuk dapat menjelaskan konsep harga mutlak serta dapat menerapkannya untuk mencari solusi persamaan dan pertidaksamaan harga mutlak. Sedangkan secara khusus diharapkan Anda dapat

a. menjelaskan konsep harga mutlak;
b. menyimpulkan hubungan antara jarak dan harga mutlak;
c. menerapkan sifat-sifat harga mutlak pada penyelesaian masalah persamaan dengan satu harga mutlak;
d. menerapkan sifat-sifat harga mutlak untuk menyelesaikan persamaan dengan dua harga mutlak;
e. menjelaskan pertidaksamaan harga mutlak; dan
f. menentukan solusi pertidaksamaan dengan harga mutlak.

KEGIATAN BELAJAR 1

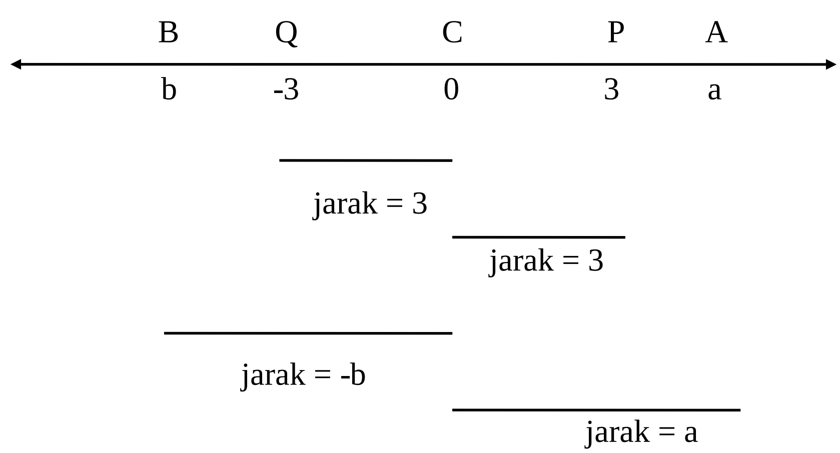
PERSAMAAN DENGAN HARGA MUTLAK

a. Harga Mutlak

Dalam kehidupan sehari-hari, seringkali kita diharapkan pada permasalahan yang berhubungan dengan jarak. Misalnya kita ingin menghitung jarak antara kota yang satu dengan kota yang lainya, atau jarak antara dua patok tertentu. Dalam kaitannya dengan pengukuran jarak antara dua tempat ini, timbulah sesuatu keistimewaan, bahwa jarak ini harganya selalu positif. Dengan kata lain pengukuran jarak antara dua tempat nilainya tidak pernah negatif.

Secara khusus, dalam matematika untuk memberikan jaminan bahea sesuatu itu nilainya selalu positif diberikanlah suatu pengertian yang sering kita namakan sebagai harga mutlak. Jadi, harga mutlak atau nilai mutlak adalah suatu konsep dalam matematika yang menyatakan selalu positif. Secara matematis pengertian harga mutlak dari setiap bilangan real x yang ditulis dengan simbol $|\,x\,|$, ialah nilai positif dari nilai x dan -x.

Untuk lebih jelasnya lagi, kita akan merancang konsep harga mutlak dari suatu bilangan real x hubungannya dengan konsep jarak secara geometri dari x ke 0. Sekarang kita perhatikan penjelasan untuk jarak pada garis bilangan seperti berikut ini



- Jarak dari titik P = 3 ke titik C = 0 adalah 3 - 0 = 3
- Jarak dari titik Q = -3 ke titik C = 0 adalah 0 - (-3) = 3
- Untuk a > 0, jarak dari titik A = a ke titik C = 0 adalah a - 0 = a
- Untuk b < 0, jarak dari titik B = a ke titik C = 0 adalah a - b = -b
- Untuk a > 0, jarak dari titik C = 0 ke titik C = 0 adalah 0.

Kesimpulan yang didapat :

Jarak x ke 0 = x, jika $x \geq 0$

= -x, jika $x \leq 0$.

Dari hubungan harga mutlak suatu bilangan real dengan konsep jarak sebagai arti geometri dari bilangan itu ke 0 adalah definisi tentang harga mutlak seperti berikut ini.

Definisi

Untuk setiap bilanga real x, harga mutlak dari x ditulis $|x|$ dan

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

Gambaran lebih jelasnya dapat kita perhatikan diagram seperti yang ditunjukkan oleh garis bilangan berikut ini

$x < 0$	0	$x \geq 0$
$|x| = -x$		$|x| = x$

Seperti telah disebutkan di atas, jelaslah bahwa arti geometri $|x|$ adalah jarak dari titik x ke titik 0.

Selanjutnya, sebelum kita membahas beberapa sifat atau teorema beserta bukti-buktinya yang berkaitan dengan harga mutlak (yang lebih banyak dalam bahasan pertidaksamaan harga mutlak dalam Kegiatan Belajar 2), terlebih dahulu kita jelaskan beberapa contoh berikut ini.

Contoh. 1 :

(a) $|3| = 3$ (b) $|-3| = -(-3) = 3$

(b) $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ (d) $|0| = 0$.

Contoh. 2 :

(a) $||-2|-|-6|| = |2-6| = |-4| = 4$

(b) $13 + |-1-4| - 3 - |-8| = 13 + |-5| - 3 - 8$

$= 13 + 5 - 3 - 8 = 7$

b. Persamaan dan Kesamaan

Sebelum kita membicarakan secara panjang lebar tentang persamaan yang berkaitan dengan harga mutlak, dan baru saja kita membahas konsep harga mutlaknya, maka pada kesempatan yang sekarang ini secara singkat kita akan mengingat kembali konsep persamaannya.

Sebagaimana kita ketahui bahwa persamaan (equation) adalah kalimat matematika terbuka yang menyatakan hubungan "sama dengan" (ditulis "=").

Contoh.3 :

(a). $2x - 7 = 3$

(b). $x^2 + x - 6 = 0$

(c). $|x+1| = 3$

Dari ketiga contoh di atas sebagai variabelnya adalah x dan suku-suku konstantanya atau konstanta adalah suku-suku yang tidak mengandung variabel. Pada persamaan (a) hanya berlaku untuk x = 5, dan pada persamaan (b) berlaku untuk x = 2 dan x = 3. Sedangkan untuk persamaan (c) berlaku untuk x = 2 dan x = -4 (akan dibahas kemudian, yaitu dalam contoh 7).

Sebaliknya, <u>kesamaan</u> (equality) adalah kalimat matematika tertutup yang menyatakan hubungan “sama dengan”, dan berlaku untuk setiap nilai pengganti variabelnya.

<u>Contoh.4</u> :

(a). $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

(b). $4x^3 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$

(c). $\left| |-3| + x \right| = |3 + x|$

Jelas bahwa untuk bentuk-bentuk kesamaan selalu berlaku untuk setiap pengganti variabelnya. Jadi kesamaan adalah kalimat matematika tertutup yang nilai kebenarannya selalu benar.

Ada pula yang membedakan persamaan dengan kesamaan, yaitu dengan memakai lambang”=” untuk persamaan, dan lambang ”≡” untuk kesamaan. Jadi, untuk beberapa contoh kesamaan dalam contoh 4 di atas ada pula yang menulisnya seperti berikut.

(a). $(2x - 1)^2 \equiv 4x^2 - 4x + 1$

(b). $4x^2 - 9 \equiv (2x + 3)(2x - 3)$

(c). $\left| |-3| + x \right| \equiv |3 + x|$

Seperti sudah kita ketahui pula, bahwa jawaban atau penyelesaian sebuah persamaan (kadang-kadang disebut pula persamaan bersyarat) adalah nilai dari variabelnya yang memenuhi persamaan itu. Himpunan semua pengganti variabelnya disebut <u>himpunan jawaban</u> atau <u>himpunan penyelesaian</u> (disingkat HP atau HJ).

Persamaan-persamaan yang mempunyai penyelesaian yang sama dinamakan <u>persamaan yang ekivalen</u>.

<u>Contoh. 5</u> :

Persamaan-persamaan

$$2x - 7 = 3 \quad \text{dan} \quad 2x = 10$$

adalah persamaan-persamaan yang ekivalen, karena himpunan penyelesaiannya sama, yaitu { 5 }.

Sebuah persamaan yang diketahui dapat diubah menjadi persamaan yang ekivalen dengan persamaan yang diketahui dengan menggunakan pengerjaan-pengerjaan tertentu pada kedua ruasnya. Pengerjaan-pengerjaan itu diatur oleh dalil-dalil atau teorema-teorema atau sifat-sifat berikut :

Teorema 1

Jika P(x), Q(x), dan R(x) bentuk-bentuk akar dalam x, maka untuk setiap nilai x, yang mana P(x), Q(x) dan R(x) real, kalimat terbuka P(x) = R(x) adalah ekivalen dengan tiap-tiap dari yang berikut :

$$\left.\begin{array}{l} \text{A. } P(x) + R(x) = Q(x) + R(x) \\ \text{B. } P(x) \,.\, R(x) = Q(x) \,.\, R(x) \\ \text{C. } \dfrac{P(x)}{R(x)} = \dfrac{Q(x)}{R(x)} \end{array}\right\} \text{untuk } x \in \{\, x /\ R(x) \neq 0 \,\}$$

Bukti A

Misal r adalah jawab dari P(x) = Q(x), maka r memenuhi

P(r) = Q(r), diperoleh

P(r) + R(r) = Q(r) + R(r)

Ini berarti r adalah jawaban dari

P(x) + R(x) = Q(xr) + R(x)

Pembuktian bagian B dan C caranya sama saja dan dipersilakan kepada Anda untuk mencobanya sebagai latihan.

Penerapan tiap bagian dari teorema itu dinamakan Transformasi <u>elementer</u>. Sebuah trasformasi elementer selalu menghasilkan sebuah persamaan yang ekivalen. Namun dalam pemakaian bagian B dan C, kita harus hati-hati karena perkalian dengan nol atau pembagian dengan nol tidak diperkenankan.

Contoh. 5 :

Selesaikanlah persamaan :

$$\frac{x}{x - 2} = \frac{2}{x - 2} + |-3| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Sebelum Anda membaca penyelesaiannya, coba Anda kerjakan dahulu persamaan ini pada kertas lain, dan periksalah jawaban Anda memenuhi persamaan semula (1) atau tidak.

Penyelesaian :

Biasanya untuk memperoleh sebuah persamaan yang bebas dari pecahan, maka pemecahan persamaan (1) di atas dilaksanakan dengan mengalikan kedua ruasnya oleh (x - 2), sehingga kita dapatkan :

$$x - 2 . \frac{x}{x - 2} = (x - 2) . \frac{2}{x - 2} + (x - 2) . |-3|$$

$$= (x - 2) \frac{2}{x - 2} + (x - 2) . 3$$

$$x = 2 + 3x - 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$x = 2$$

Jadi, 2 adalah jawaban dari persamaan (2). Akan tetapi jika dalam persamaan (1), x diganti oleh 2, maka diperoleh

$$\frac{2}{0} = \frac{2}{0} + |-3|$$

yang merupakan bentuk tidak didefinisikan.

Untuk mendapatkan persamaan (2), persamaan (1) telah dikalikan dengan (x - 2), tetapi untuk x = 2 ternyata (x - 2) adalah nol, sehingga teorema 1 bagian B tidak dapat kita pakai.

Persamaan (2) tidak ekivalen dengan persamaan (1) untuk x = 2. Ternyata persamaan (1) tidak mempunyai penyelesaian atau himpunan penyelesaiannya adalah $\phi = \{ \}$.

Persamaan yang tidak mempunyai penyelesaian dinamakan <u>persamaan palsu</u>. Kepalsuan persamaan (1) akan nampak pula, jika persamaan (1) diselesaikan seperti berikut ini

$$\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2} + |-3| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2} + 3$$

Kedua ruasnya ditambah dengan $-\frac{2}{x-2} - 3$, diperoleh

$$\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2} - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2-3(x-2)}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+4}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(x-2)}{x-2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Dari persamaan (1) sudah dapat dilihat bahwa persamaan (1) tidak berlaku untuk x = 2. Akan tetapi untuk x ≠ 2, persamaan (1) menghasilkan pernyataan -2 = 0 yang salah.

Dalam menyelesaikan sebuah persamaan kita selalu dapat mengecek apakah jawaban yang kita peroleh dari hasil perhitungan itu benar atau salah dengan cara mensubstitusikan jawaban itu ke dalam persamaan yang diberikan. Jika pernyataan yang diperoleh benar, maka jawaban itu benar. Sebaliknya jika pernyataan yang diperoleh salah, maka jawaban kita itu salah.

Jika sebuah persamaan diselesaikan dengan menggunakan transformasi elementer, maka tujuan satu-satunya mengenai pengecekan tadi ialah untuk mengetahui apakah ada kesalahan hitung dalam proses penyelesaian tadi.

Sebaliknya, jika dalam suatu penyelesaian sebuah persamaan terdapat pengerjaan yang bukan sebuah transformasi elementer, maka pengecekan tadi adalah suatu keharusan. Keadaan semacam ini akan Anda jumpai dalam menyelesaikan pertidaksamaan dan persamaan irasional dalam kegiatan kita berikutnya.

Dalam menyelesaikan contoh soal di atas tadi nampaknya seperti kita menggunakan transformasi elementer bagian B, akan tetapi kita menjabarkan syarat bahwa $x - 2 \neq 0$ (ingat, pembagian dengan nol tidak didefinisikan).

c. Persamaan Harga Mutlak

Dalam kesempatan sekarang ini kita akan melihat bagaimana menerapkan sifat-sifat harga mutlak pada penyelesaian masalah persamaan. Sedangkan masalah konsep harga mutlak, pengertian persamaan dan teorema atau sifat persamaan baru saja kita pelajari. Namun sebelum kita menerapkanharga mutlak pada penyelesaian persamaan terlebih dahulu kita perlu memahami beberapa teorema atau sifat dalam harga mutlak itu sendiri. Beberapa sifat dari harga mutlak akan dibicarakan dalam kesempatan sekarang sekaligus dengan penerapannya dalam persamaan, tetapi sebagian besar dari sifat-sifat harga mutlak akan kita jumpai dalam membicarakan pertidaksamaan harga mutlak dalam kegiatan belajar berikutnya.

Sebagaimana telah kita ketahui dalam membahas fungsi rasional (modul 5), bahwa untuk setiap bilangan real x, bahwa $\sqrt{x^2}$ real dan tidak negatif, dan juga jika $x \geq 0$ maka $\sqrt{x^2} = x$ karena x adalah satu-satunya bilangan yang tidak negatif dan kuadratnya sama dengan x^2. Jika $x < 0$, maka $\sqrt{x^2} = -x$, karena $(-x) > 0$ dan $(-x)^2 = x^2$. Jadi untuk setiap bilangan real x

$$\sqrt{x^2} = |x| = x \text{ jika } x \geq 0$$

$$= -x \text{ jika } x < 0$$

(Ingat bentuk-bentuk akar dan bilangan berpangkat).

Selanjutnya dengan memperhatikan definisi harga mutlak dan kaitannya dengan penarikan akar di atas, kita akan melihat beberapa teorema harga mutlak, diantaranya :

Teorema 2

Untuk setiap bilangan real x berlaku

(a). $|x| = |-x|$

(b). $|x|^2 = |-x^2| = x^2$

<u>Bukti (a)</u>

$|x| = \sqrt{x^2}$

$= \sqrt{(-x)^2} = |-x|$

<u>Bukti (b)</u>

$|x|^2 = (\sqrt{x^2})^2 = (x)^2$ jika $x \geq 0$

$= (-x)^2$ jika $x < 0$

$= x^2$ ………………………………………………………………… (1)

$|x^2| = \sqrt{(x^2)^2} = (x^2)$ sebab $x^2 \geq 0$

$= x^2$ ………………………………………………………………… (2)

Dari (1) dan (2):

$|x|^2 |x^2| = x^2.$

<u>Teorema 3</u>

Untuk setiap $x \in R$ dan $y \in R$ (himpunan bilangan real), maka berlaku

(a). $|xy| = |x|.|y|$

(b) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

(c) $|x - y| = |y - x|$

<u>Bukti (a)</u> :

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} \quad \text{atau} \quad |x|.|y| = \sqrt{x^2}.\sqrt{y^2}$$

$$= \sqrt{x^2y^2} \qquad\qquad = \sqrt{x^2y^2}$$

$$= \sqrt{x^2}.\sqrt{y^2} \qquad\qquad = \sqrt{(xy)^2}$$

$$= |x|.|y| \qquad\qquad = |xy|$$

<u>Bukti (b) :</u>

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} \quad \text{atau} \quad \frac{|x|}{|y|} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} \qquad\qquad = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} \qquad\qquad = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

$$= \frac{|x|}{|y|} \qquad\qquad = \left|\frac{x}{y}\right|$$

Untuk membuktikan teorema 3 (c) dipersilakan kepada Anda untuk mencobanya sebagai latihan, dan jika Anda mengalami kesulitan atau keraguan dipersilakan untuk didiskusikan dengan teman Anda atau tutor Anda.

<u>Contoh. 6</u> :

Carilah himpunan penyelesaian dari

$$|y+1| = 2y - 3$$

<u>Penyelesaian</u> :

Cara I : $|y+1|^2 = (2y-3)^2$ (kedua ruas dikuadratkan)

$(y + 1)^2 = (2y - 3)^2$ (teorema 2 (b))

Cara II : $\sqrt{(y+1)^2} = 2y - 3$ (definisi)

$(y + 1)^2 = (2y - 3)^2$ (kedua ruas dikuadratkan)

$(y + 1)^2 - (2y - 3)^2 = 0$

$\{(y + 1) - (2y - 3)\}\{(y + 1) + (2y - 3)\} = 0$ $(a^2 - b^2 = (a - b)(a + b))$

$(y - 1 - 2y + 3)(y + 1 + 2y - 3) = 0$

$(-y + 4)(3y - 2) = 0$

$\begin{cases} -y + 4 = 0 \\ 3y - 2 = 0 \end{cases}$ $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ atau $b = 0$

$y = 4$ atau $y = \frac{2}{3}$

Perlu diketahui, bahwa langkah pertama, yaitu "kedua ruas dikuadratkan" bukanlah sebuah transformasi elementer, karenanya kita perlu melakukan pengecekan untuk mengetahui jangan-jangan ada kesalahan hitung dalam proses penyelesaian tadi.

Untuk $y = 4$ maka $|4 + 1| = 2 . 4 - 3$

$|5| = 5$

$5 = 5$ (untuk nilai $y = 4$ memenuhi)

Untuk $y = \frac{2}{3}$ maka $\left|\frac{2}{3} + 1\right| = 2 . \frac{2}{3} - 3$

$\left|\frac{5}{3}\right| = \frac{4}{3} - 3$

$\frac{5}{3} \neq -\frac{5}{3}$ (untuk $y = \frac{2}{3}$ tidak memenuhi)

Jadi, HP = $\{ y / y = 4 \}$

<u>Catatan</u> :

Dari contoh. 6 di atas dapat memetik suatu pengalaman yang sangat berharga, yaitu pada waktu kita mengkuadratkan kedua ruas dari persamaan tersebut. Hal ini tentunya kita masih ingat, bahwa untuk mencari himpunan penyelesaian dari persamaan yang variabelnya di bawah tanda akar, diperlukan teorema berikut :

"Jika U(x) dan V(x) ungkapan-ungkapan dalam x, maka himpunan penyelesaian dari U(x) = V(x) adalah himpunan bagian dari himpunan penyelesaian $\{u(x)\}^n = \{ V(x) \}^n$ untuk tiap-tiap $x \in N$ (himpunan bilangan asli)".

Persamaan yang kedua ini biasanya mempunyai kelebihan jawab dari persamaan yang pertama. Kelebihan jawab atau kelebihan penyelesaian ini disebut "penyelesaian yang termasuk" dan bukan penyelesaian dari persamaan yang pertama.

Jika a = b maka $a^2 = b^2$. Namun sebaliknya, jika $a^2 = b^2$, maka belum tentu a = b. Sebagai contoh

$$3^2 = (-3)^2, \text{ tetapi } \quad 3 \neq -3$$

Jika x = 3 maka $x^2 = 9$. Persamaan $x^2 = 9$ mempunyai penyelesaian 3 dan -3. Penyelesaian yang kedua ini bukanlah penyelesaian dari x = 3.

Karena persamaan yang kedua dalam teorema di atas tidak ekivalen dengan persamaan yang pertama, maka penyelesaian dari persamaan yang kedua harus diisikan dalam persamaan yang pertama untuk mengecek penyelesaian itu memenuhi persamaan pertama atau tidak. Penggunaan teorema itu bukanlah sebuah transformasi elementer.

Contoh 7 :

Carilah himpunan penyelesaian dari persamaan berikut $|x+1| = 3$

Penyelesaian :

Cara I. $|x+1| = 3$

mengingatkan bahawa (menurut definisi)

$x + 1 = 3$ jika $x + 1 \geq 0$

dan

$-(x + 1) = 3$ jika $x + 1 < 0$

yang ekivalen dengan

$x = 2$ jika $x \geq -1$

dan $x = -4$ jika $x < -1$

Jadi : $x = 2$ dan $x = -4$

Berarti himpunan penyelesaiannya atau

HP = { 2 , -4 }

<u>Penyelesaian</u> :

Cara II. $|x+1| = 3$ .... (1)

$\sqrt{(x+1)^2} = 3$ (definisi)

$(x + 1)^2 = 9$ (kedua ruas dikuadratkan)

$x^2 + 2x + 1 = 9$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x - 2)(x + 4) = 0$

$x = 2$ atau $x = -4$

Karena kedua jawaban ini memenuhi persamaan (1), maka HP = { 2 , -4 }.

Selanjutnya untuk lebih memantapkan pemahaman Anda tentang materi kegiatan belajar ini, cobalah Anda kerjakan soal-soal latihan 1 berikut ini.

1. Hitunglah $-\,|13 - (4 - 7) - |13 - 3||$
2. Carilah himpunan penyelesaian $|3x + 2| = 5$
3. Carilah himpunan penyelesaian $|x| + |x - 5| = 5$
4. Buktikanlah, bahwa untuk setiap bilangan real x dan y berlaku $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$
5. Carilah himpunan penyelesaian $|2x - 1| = |4x + 3|$.

Setelah Anda mencoba menyelesaikan soal-soal latihan di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk alternatif jawaban berikut.

1. $|13 - (4 - 7) - |13 - 3|| = -|13 - (-3) - |10||$

$= -|13 + 3 - 10|$

$= |6|$

2. $|3x + 2| = 5$

dengan menggunakan definisi harga mutlak :

$\Leftrightarrow$ 3x + 2 = 5 jika 3x + 2 $\geq$ 0

dan -(3x + 2) = 5 jika 3x + 2 < 0

$\Leftrightarrow$ x = 1 jika x $\geq -\frac{2}{3}$

dan x = $-\frac{7}{3}$ jika x < $-\frac{2}{3}$

Jadi, x = 1 atau x = $-\frac{7}{3}$, atau

HP = { 1 , $-\frac{7}{3}$ }.

3. $|x| + |x - 5| = 5$

(1) Jika x $\geq$ 0 dan x - 5 $\geq$ 0 atau x $\geq$ 5

maka x + x - 5 = 5

2x = 10

x = 5

atau

(2). Jika x $\geq$ 0 dan x - 5 < 0 atau x < 5

maka x - (x - 5) = 5

0 = 0

banyak jawab { 0 $\leq$ x < 5 }.

Atau

(3). Jika x < 0 dan x - 5 $\geq$ 0 atau x $\geq$ 5

-x + (x - 5) = 5

-5 = 5

tidak ada jawab.

Atau

(4). Jika x < 0 dan x - 5 $\leq$ 0 atau x $\leq$ 5

- x - (x - 5) = 5

-2x = 0

$x = 0$

Jadi $x = 5$ atau $0 \le x < 5$ atau $x = 0$

HP = $\{ x \,/\, 0 \le x < 5 \}$ (dalam hal ini tentunya $x \in R$).

4. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$

<u>Bukti</u> :

(i) $\rightarrow$ Diketahui $|x| = |y|$

Buktikan : $x = \pm y$

Bukti : $|x| = |y|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$

$\Leftrightarrow x^2 = y^2$

$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{y^2}$

$\Leftrightarrow x = \pm y$

(ii) $\leftarrow$ Diketahui $x = \pm y$

Buktikan : $|x| = |y|$

Bukti : $x = \pm y$

$\Leftrightarrow x^2 = y^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$

$\Leftrightarrow |x| = |y|$

Jdi : $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$

5. $|2x - 1| = |4x + 3|$.

(1) Jika $2x - 1 \ge 0$ dan $4x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$ dan $x \ge -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x \ge -\frac{3}{4}$

maka

$2x - 1 = 4x + 3$

$-2x = 4$

$x = -2$

HP = ϕ.

Atau

(2). Jika $2x - 1 \geq 0$ dan $4x + 3 < 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ dan $x < -\frac{3}{4}$

maka $2x - 1 = -(4x + 3)$

$2x - 1 = -4x - 3$

$6x = -2$

$x = -\frac{1}{3}$

HP = ϕ.

Atau

(3). Jika $2x - 1 < 0$ dan $4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$ dan $x \geq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq x < \frac{1}{2}$

maka $-(2x - 2) = 4x + 3$

$-2x + 1 = 4x + 3$

$-6x = 2$

$x = -\frac{1}{3}$

HP= $\{ x / x = -\frac{1}{3} \}$.

Atau

(4). Jika $2x - 1 < 0$ dan $4x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ dan $x < -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

maka $-(2x - 1) = -(4x + 3)$

$-2x + 1 = -4x - 3$

$2x = -4$

$x = -2$

HP = $\{ x / x = -2 \}$.

Dari berbagai kemungkinan (1), (2), (3) atau (4), kita dapatkan x = $-\frac{1}{3}$ dan x = -2.

Jadi : HP { $-\frac{1}{3}$, -2 }.

Setelah Anda mempelajari kegiatan belajar yang pertama dari buku materi pokok ini, buatlah rangkumannya kemudian bandingkan dengan alternatif rangkuman berikut.

Rangkuman

1. Untuk setiap bilangan x (x $\in$ R), harga mutlak dari x ditulis $|x|$ dan

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

2. Persamaan adalah kalimat matematika terbuka yang memuat tanda sama dengan ("="), sedangkan kesamaan adalah kalimat matematika tertutup yang memuat tanda sama dengan ("=").
3. Jika P(x), Q(x), dan R(x) bentuk-bentuk akar dalam x, maka kalimat terbuka P(x) = R(x) adalah ekivalen dengan tiap-tiap dari yang berikut :

   A. $P(x) + R(x) = Q(x) + R(x)$

   B. $P(x) \cdot R(x) = Q(x) \cdot R(x)$

   C. $\frac{P(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{R(x)}$

4. Untuk setiap x $\in$ R berlaku $\sqrt{x^2} = |x|$.
5. "Jika U(x) dan V(x) ungkapan-ungkapan dalam x, maka himpunan penyelesaian dari U(x) = V(x) adalah himpunan bagian dari himpunan penyelesaian $\{u(x)\}^n = \{V(x)\}^n$ untuk tiap-tiap x $\in$ N (himpunan bilangan asli)".
6. Untuk setiap x $\in$ R dan y $\in$ R berlaku

   (a). $|x| = |-x|$

   (b). $|x|^2 = |-x^2| = x^2$

   (c). $|xy| = |x| \cdot |y|$

(d). $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

(e). $|x - y| = |y - x|$

(f). $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$

TES FORMATIF 1

Untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda, kerjakanlah soal-soal Tes Formatif 1 berikut dengan memberi tanda silang (X) di muka pernyataan yang benar.

1. $|2 - \sqrt{3}| =$

A. 2 - $\sqrt{3}$	B. -2 + $\sqrt{3}$
B. 2 + $\sqrt{3}$	D. -2 - $\sqrt{3}$

2. Jika x < 1, maka $|x - 1| =$

A. x - 1	B. 1 - x
C. x + 1	D -x - 1

3. $||-3| - |2(3-5)|| =$

A. 7	B. 4
C. 3	D. 1

4. 13 + $|-1-4| - 3 - |-8| =$

A. 13	B. 11
C. 7	D. 5

5. Untuk setiap x $\in$ R, berlaku $|-x| =$

A. x

B. -x

C. ± x

D. A, B dan C salah

6. Untuk setiap a, b $\in$ R berlaku $|a - b| =$

A. $|a + b| =$

B. $|b - a| =$

C. $|-a - b| =$

D. A, B dan C salah

7. Himpunan penyelesaian dari persamaan $|5x + 1| = 3$

A. $\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$

B. $\left\{\frac{-2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$

C. $\left\{\frac{2}{5}, \frac{-4}{5}\right\}$

D. $\left\{\frac{-2}{5}, \frac{-4}{5}\right\}$

8. Himpunan penyelesaian dari persamaan $|3x + 4| = -5$

A. $\left\{\frac{1}{3}, -3\right\}$

B. $\left\{-\frac{1}{3}, -3\right\}$

C. $\left\{-\frac{1}{3}, 3\right\}$

D. ϕ

9. Himpunan penyelesaian dari persamaan $|1 + 2(x - 1)| = |3x + 7|$

A. { 6 }

B. { 6 , $\frac{8}{6}$ }

C. { $\frac{8}{6}$ }

D. ϕ

10. Himpunan penyelesaian dari persamaan $|3x - 3| = |3x + 5|$

A. { - $\frac{1}{4}$, 4 }

B. { $\frac{1}{4}$, -4 }

C. { - $\frac{1}{4}$, -4

D. { $\frac{1}{4}$, 4 }

Selanjutnya cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir Materi Pokok ini. Hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar. Kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai :

90% - 100% = Baik sekali

80% - 89% = Baik

70% - 79% = Cukup

≤ 70% = Kurang.

Kalau Anda mencapai tingkat penguasaan 80% ke atas, Anda dapat meneruskannya pada Kegiatan Belajar kedua. **Bagus !** Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai. Selamat belajar, semoga berhasil.

KEGIATAN BELAJAR 2

PERTIDAKSAMAAN DENGAN HARGA MUTLAK

a. <u>Pertidaksamaan</u>

Pertidaksamaan merupakan topik yang sangat penting baik dalam teori maupun dalam pengerjaan soal-soal matematika, termasuk hubungannya dengan harga mutlak. Oleh karena itu sifat-sifat dan aplikasinya perlu kita pelajari dengan baik.

Sebelum kita mempelajari pertidaksamaan dengan harga mutlak yang merupakan kelanjutan dari kegiatan belajar pertama (Persamaan dengan Harga Mutlak), maka terlebih dahulu kita mengingat kembali konsep-konsep dasar pertidaksamaannya. Seperti telah kita ketahui, bahwa pertidaksamaan adalah kalimat matematika terbuka yang memuat ungkapan "tidak sama dengan", "lebih dari" (lebih besar dari), "lebih dari atau sama dengan", "kurang dari" (lebih kecil dari), "kurang dari atau sama dengan".

Contoh. 1

(a) $x \neq y$

(b) $x < y$

(c) $2x \geq 5$

(d) $x^2 - 5 + 6 \leq 6$

(e) $|x - 1| > 2$, dan sebagainya

untuk setiap $x, y \in R$ (himpunan bilangan real).

Seperti pada persamaan dalam pertidaksamaan tidak berlaku untuk setiap pengganti variabelnya. Nilai-nilai variabel yang memenuhi pertidaksamaan disebut penyelesaian, dan himpunan semua pengganti variabel yang menyebabkan pertidaksamaan itu menjadi kalimat tertutup yang benar disebut himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan.

Sebaliknya, suatu pertidaksamaan mutlak atau pertidaksamaan absolut adalah suatu pertidaksamaan yang selalu benar untuk setiap nilai pengganti variabelnya. Pertidaksamaan mutlak ini sering pula disebut ketidaksamaan dan tentunya ketidaksamaan ini merupakan kalimat matematika tertutup.

Contoh :

(1). $(x - 1)^2 \geq 0$

(2). $X + 2 > x + 1$

(3). $-3x^2 - 7x - 6 < 0$

(4). $-(x - 1)^2 \leq 0$

(5). $|3x - 4| > -|-1|$

Selain itu ada pula suatu pertidaksamaan yang selalu salah untuk setiap pengganti variabelnya yang disebut <u>pertidaksamaan palsu</u>.

<u>Contoh</u> :

(1). $X^2 + 2 \leq 0$

(2). $X + 2 \geq x + 3$

(3). $(x - 2)^2 < 0$

(4). $|2x - 3| > -|-x|$

b. <u>Sifat-sifat Pertidaksamaan</u>

Seperti halnya dalam persamaan, untuk menyelesaikan suatu pertidaksamaan kita memerlukan sifat-sifat berikut yang lazim disebut dalil atau teorema.

<u>Teorema 4</u>

Jika P(x), Q(x), dan R(x) adalah ungkapan-ungkapan dalam x, maka untuk semua harga-harga x, P(x), Q(x), dan R(x) yang real, kalimat terbuka P(x) < Q(x) adalah ekivalen dengan tiap-tiap dari yang berikut :

A. P(x) + R(x) < Q(x) + R(x)

B. P(x) . R(x) < Q(x) . R(x)

$$\left.\begin{array}{l} \text{B. } P(x).\,R(x) < Q(x).\,R(x) \\ \text{C. } \dfrac{P(x)}{R(x)} < \dfrac{Q(x)}{R(x)} \end{array}\right\} \text{ untuk } x \in \{\, x \,/\, R(x) > 0 \,\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{D. } P(x).\,R(x) > Q(x).\,R(x) \\ \text{E. } \dfrac{P(x)}{R(x)} > \dfrac{Q(x)}{R(x)} \end{array}\right\} \text{ untuk } x \in \{\, x \,/\, R(x) < 0 \,\}$$

demikian pula untuk kalimat terbuka $P(x) \leq Q(x)$ adalah ekivalen dengan kalimat-kalimat terbuka dari bentuk A sampai bentuk E dengan mengganti $<$ (atau $>$) dengan $\leq$ (atau $\geq$) dengan syarat yang sama pula, yaitu $R(x) > 0$ dan $R(x) < 0$ seperti di atas.

Sekarang akan kita buktikan bagian D, yang lainnya diserahkan kepada Anda sebagai latihan.

<u>Bukti D</u> :

Misalkan r adalah jawab dari $P(x) < Q(x)$ dengan $R(x) < 0$ maka :

$$P(r) < Q(r)$$

adalah benar untuk bilangan-bilangan real P(r) dan Q(r). Karena R(r) semua bilangan real negatif, maka menurut dalil dalam bilangan real (jika $a < b$ dan $c < 0$, maka $ac > bc$) mengatakan bahwa

$$P(r) \,.\, R(r) > Q(r) \,.\, R(r)$$

Ini menunjukkan bahwa r adalah jawab dari

$$P(r) \,.\, R(r) > Q(r) \,.\, R(r)$$

Sebaliknya, jika r adalah jawab dari $R(r) < 0$, maka menurut dalil dalam bilangan real seperti di atas tadi menyatakan bahwa :

$$\frac{1}{R(r)} \,.\, P(r) \,.\, R(r) < \frac{1}{R(r)} \,.\, Q(r) \,.\, R(r)$$

yang ekivalen dengan

$$P(r) < Q(r)$$

Ini menyatakan bahwa r adalah jawab dari $P(x) < Q(x)$. Karena tiap jawab dari $P(x) < Q(x)$ adalah jawab dari $P(x) \,.\, R(rx) > Q(x) \,.\, R(x)$ dengan syarat $R(x) < 0$ dan sebaliknya, maka kedua bentuk kalimat ini adalah ekivalen.

Teorema 4 di atas dapat kita artikan sebagai berikut :

A. Jika kedua ruas suatu pertidaksamaan ditambah dengan bilangan yang sama, maka diperoleh sebuah pertidaksamaan baru yang ekivalen dengan pertidaksamaan semula.

B dan C. Jika kedua ruas suatu pertidaksamaan dikalikan dengan atau dibagi oleh sebuah bilangan positif yang sama, maka diperoleh sebuah pertidaksamaan baru yang ekivalen dengan pertidaksamaan semula.

D dan E. Jika kedua ruas suatu pertidaksamaan dikalikan dengan atau dibagi oleh sebuah bilangan negatif yang sama, maka diperoleh sebuah pertidaksamaan baru yang ekivalen dengan pertidaksamaan semula tetapi tanda pertidaksamaan yang baru harus dibalik..

c. Pertidaksamaan Harga Mutlak

Dalam kesempatan sekarang ini, kita akan mempelajari bagaimana menerapkan sifat-sifat harga mutlak untuk menyelesaikan masalah pertidaksamaan yang memuat harga mutlak. Karenanya sebelum kita menggunakan sifat-sifat harga mutlak tersebut terlebih dahulu kita harus memahami sifat-sifat harga mutlaknya.

Sebelum membahas sifat-sifat, teorema-teorema atau dalil-dalil harga mutlak, tentunya kita masih ingat konsep awal yang telah diuraikan secara rinci dalam kegiatan belajar pertama. Dalam uraian tersebut didefinisikan, bahwa untu setiap $x \in R$, harga mutlak (nilai mutlak) dari x ditulis $|x|$, dan

$$|x| = x, \text{ jika } x \geq 0$$
$$= -x, \text{ jika } x < 0.$$

Selain itu kita pun telah memahmi pula, bahwa untuk setiap $x \in R$ ternyata $\sqrt{x^2} = |x|$ (lihat materi bahasan kegiatan belajar pertama dalam modul ini).

Berdasarkan konsep-konsep dasar harga mutlak tersebut kita telah pula menurunkan beberapa teorema baik yang berkaitan langsung dengan harga mutlak maupun dengan konsep-konsep persamaan dan pertidaksamaan (Teorema 1 sampai dengan teorema 4). Khusus dalam kesempatan sekarang ini, kita akan melihat beberapa teorema harga mutlak berikut ini yang terkait dengan konsep-konsep pertidaksamaan, dan tentunya berangkat dari konsep-konsep awal yang telah kita sebutkan di atas.

Teorema 5

Jika $x \in R$, $a \in R$, dan $a > 0$, maka $|x| < a$, jika dan hanya jika $-a < x < a$.

Untuk membuktikan teorema ini harus dibuktikan dua bagian, yaitu :

(1). Jika $|x| < a$, maka $-a < x < a$.

(2). Jika $-a < x < a$, maka $|x| < a$.

<u>Bukti 1</u> :

Untuk tiap $x \in R$, $|x| \geq 0$.

Karena $a > 0$, maka $-a < 0$

Jadi untuk tiap x, $-a < |x|$.

Sekarang kita pandang dulu untuk $x \geq 0$.

Dalam hal ini, $|x| = x$.

Karena $-a < |x|$, $|x| = x$, dan $|x| < a$, maka $-a < x < a$ (terbukti).

Sekarang kita pandang untuk $x < 0$

Dalam hal ini $|x| = -x$.

Karena $-a < |x|$, $|x| = -x$, dan $|x| < a$, maka $-a < -x < a$.

Kalikan dengan (-1), diperoleh

$a > x > -a$ atau $-a < x < a$ (terbukti).

<u>Bukti 2</u> :

Karena $-a < x < a$, maka ini berarti $-a < x$ dan $x < a$.

Kita pandang untuk $x \geq 0$.

Akibatnya $|x| = x$, sedangkan $x < a$

Jadi, $|x| < a$ (terbukti).

Sekarang kita pandang untuk $x < 0$.

Akibatnya $|x| = -x$ atau $-|x| = x$., atau $x = -|x|$.

Dari $x = -|x|$ dan $-a < x$ didapatkan $-a < -|x|$.

Kalikan dengan (-1) diperoleh :

$a > |x|$ atau $|x| < a$ (terbukti).

Teorema 6

Jika $x \in R$, $a \in R$, dan $a > 0$, maka $|x| > a$, jika dan hanya jika $x < -a$ atau $x > a$.

Buktinya dipersilakan kepada para pembaca yang mempelajarinya untuk mencobanya.

Contoh 2 :

Carilah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x+1| < 3$.

Penyelesaian :

Menurut teorema 5,

$|x+1| < 3$

Jika dan hanya jika

$-3 < x + 1 < 3$

Tiap ruas ditambah dengan -1, didapat $-4 < x < 2$

Jadi himpunan penyelesaiannya

$\{ x / -4 < x < 2 \}$

Himpunan penyelesaian dapat pula ditulis dengan menggunakan simbul irisan :

$$\{ x / x > -4 \} \cap \{ x / x < 2 \}.$$

Contoh 3 :

Cari himpunan penyelesaian dari $|x+1| \geq 3$.

Penyelesaian :

Menurut teorema 6 :

$|x+1| \geq 3$

Jika dan hanya jika

$x + 1 \leq -3$ atau $x + 1 \geq 3$.

Dua pertidaksamaan ini menghasilkan

$x \leq -4$ atau $x \geq 2$.

Jadi himpunan penyelesaiannya

$\{ x / x \leq -4$ atau $x \geq 2\}$.

Himpunan penyelesaiannya dapat pula distulis dengan menggunakan simbul gabungan

$$\{ x / x \leq -4 \} \cup \{x / x \geq 2\}.$$

Cara lain dalam menyelesaikan soal-soal seperti di atas ini dan yang banyak dipakai di sekolah lanjutan ialah dengan cara menguadratkan kedua ruasnya. Hal ini disebabkan kedua teorema di atas (teorema 5 dan teorema 6) pada umumnya tidak diberikan di sekolah lanjutan.

<u>Teorema 7</u>

Untuk setiap $\in$ R, $x \leq |x|$.

<u>Bukti</u> : Jika $x \geq 0$, maka $x = |x|$ (definisi)

Jika $x < 0$, maka $x < |x|$, sebab $|x| \geq 0$

Jadi dalam hal ini $x \leq |x|$.

<u>Teorema 8</u>

Jika $x \in R$, $y \in R$, maka

(1). $|x - y| \leq |x| + |y|$

(2). $|x + y| \leq |x| + |y|$

Bukti :

Menurut teorema 7 di atas

$x \leq |x|$ dan $-x \leq |-x| = |x|$.

Juga

$-y \leq |-y| = |y|$ dan $y \leq |y|$

dengan menjumlahkan didapat :

$x - y \leq |x| + |y|$ dan $(-x + y) = -(x - y) \leq |x| + |y|$

Menurut teorema 8 bagian1.

$|x - y| \leq |x| + |y|$ (terbukti)

Bukti 2 :

Menurut teorema 8 bagian 2

$|x + y| = |x - (-y)| \leq |x| + |-y|$

menurut teorema 2(a) : $|y| = |-y|$, maka

$|x + y| \leq |x| + |y|$. (terbukti)

Akibat dari dalil ini, ada beberapa dalil berikut ini :

(a). $|x - y| \geq \big|\,|x| - |y|\,\big|$

(b). $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

buktinya diserahkan kepada pembaca untuk mencobanya sebagai latihan.

Perlu pula diketahui, bahwa cara-cara pembuktiannya dapat berbeda-beda, yang penting dapat diperlihatkan langkah pembuktiannya berdasarkan definisi atau teorema-teorema yang lainnya.

Contoh 4

Selesaikanlah $|x + 3| < 2 - x$

Penyelesaian Cara I

$|x + 3| < 2 - x$

$\Leftrightarrow$ -(2 - x) < x + 3 < 2 - x (teorema 5)

$\Leftrightarrow$ x - 2 < x + 3 < 2 - x

$\Leftrightarrow$ -2< 3 dan 2x < -1

$\Leftrightarrow$ { semua x } $\cap$ { x / x < - $\frac{1}{2}$ }

HP = { x / x < - $\frac{1}{2}$ }

<u>Penyelesaian Cara II</u>

$|x+3| < 2 - x$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2}$

$\Leftrightarrow (x + 3)^2 < (2 - x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 < 4 + x^2 - 21x$

$\Leftrightarrow$ 10x < -5

$\Leftrightarrow$ x < - $\frac{1}{2}$

HP = { x / x < - $\frac{1}{2}$ }

<u>Penyelesaian Cara III</u>

$|x+3| < 2 - x$

(1). X + 3 < 2 - x jika x + 3 $\geq$ 0

$\Leftrightarrow$ atau (definisi)

(2) -(x + 3) < 2 - x jika x + 3 < 0

$\Leftrightarrow$ (1). X < - $\frac{1}{2}$ jika x $\geq$ -3, atau

(2). -3 < 2 jika x < -3

$\Leftrightarrow$ (1).-3 $\leq$ x $\leq$ - $\frac{1}{2}$ atau

(2). X < -3

$\Leftrightarrow$ $\{ x \,/\, -3 \leq x \leq -\frac{1}{2} \} \cup \{ x \,/\, x < -3 \}$

atau $\{ x \,/ \leq -\frac{1}{2} \}$

<u>Contoh 5</u>

Selesaikanlah $|3x + 7| > |4x - 8|$

<u>Penyelesaian Cara 1</u>

$|3x + 7| > |4x - 8|$

(1). $3x + 7 > |4x - 8|$

atau (teorema 6)

(2) $3x + 7 < - |4x - 8|$

(1).$3x + 7 > |4x - 8|$

$\Leftrightarrow$ $|4x - 8| < 3x + 7$

$\Leftrightarrow$ $-3x - 7 < 4x - 8 < 3x + 7$

$\Leftrightarrow$ $-3x - 7 < 4x - 8$ dan $4x - 8 < 3x + 7$

$\Leftrightarrow$ $x > \frac{1}{7}$ dan $x < 15$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{7} < x < 15$

(2). $3x + 7 > - |4x - 8|$

$\Leftrightarrow$ $|4x - 8| < -(3x + 7)$

$\Leftrightarrow$ $3x + 7 < 4x - 8 < -(3 + 7)$

$\Leftrightarrow$ $3x + 7 < 4x - 8$ dan $4x - 8 < -3x - 7$

$\Leftrightarrow$ $-x < -15$ dan $7x < 1$

$\Leftrightarrow$ $-x > 15$ dan $x < \frac{1}{7}$

Himpunan penyelesaiannya adalah

(1) atau (2)

$\Leftrightarrow$ (1) $\cup$ (2)

$\Leftrightarrow \{ \frac{1}{7} < x < 15 \} \cup \phi$

Penyelesaian Cara II

$|3x+7| > |4x-8|$

$\Leftrightarrow (3x + 7)^2 > (4x - 8)^2$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 42x + 49 > 16x^2 - 64x + 64$

$\Leftrightarrow -7x^2 + 106x - 15 > 0$

$\Leftrightarrow 7x^2 - 106x + 15 < 0$

$\Leftrightarrow (7x - 1)(x - 15) < 0$

Kemungkinannya

(1). $7x - 1 > 0$ dan $x - 15 < 0$

(2). $7x - 1 < 0$ dan $x - 15 > 0$

(1). $7x - 1 > 0$ dan $x - 15 < 0$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{7} \cap x < 15$

$\Leftrightarrow \frac{1}{7} < x < 15$

(2). $7x - 1 < 0$ dan $x - 15 > 0$

$\Leftrightarrow x < \frac{1}{7} \cap x > 15$

$\Leftrightarrow \phi$

Himpunan penyelesaiannya (1) $\cup$ (2), yaitu $\{ x / \frac{1}{7} < x < 15 \}$

Selanjutnya untuk lebih memahami materi-materi pertidaksamaan harga mutlak ini, silakan Anda mencoba mengerjakan soal-soal dalam latihan berikut ini.

1. Carilah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan harga mutlak $|x - 5| \leq 4$.

2. Carilah himpunan penyelesaian $|x^2 - 10| < 6$

3. Buktikanlah, bahwa untuk setiap x, y, z $\in$ R berlaku $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

4. Selesaikanlah $|3x + 2| > 5$.

5. Selesaikanlah $|3x + 5| < |2x - 1|$.

Setelah Anda mencoba mengerjakan soal-soal latihan 2 di atas, bandingkanlah jawabannya dengan petunjuk alternatif jawaban berikut.

1. $|x - 5| \leq 4$

Penyelesaian Cara I : Menurut Teorema 5

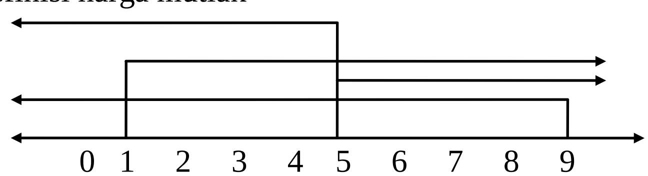
$|x - 5| \leq 4$ jika dan hanya jika $-4 \leq x - 5 \leq 4$

$1 \leq x \leq 9$ (kedua ruas ditambah dengan 5)

HP = { x / $1 \leq x \leq 9$ }

Penyelesaian Cara II : Menurut definisi harga mutlak

$|x - 5| \leq 4$



(1) $x - 5 \leq 4$ jika $x - 5 > 0$

dan

(2) $-(x - 5) \leq 4$ jika $x - 5 < 0$

(1) $x \leq 9$ jika $x > 5$

dan

(2) $x \leq 1$ jika $x < 5$

Jadi $x \leq 9$ dan $x \geq 1$, atau $1 \leq x \leq 9$, atau

HP = { { x / $1 \leq x \leq 9$ }.

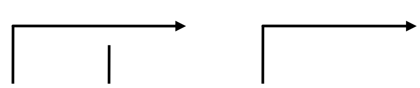
2. $|x^2 - 10| < 6$

Penyelesaian Cara I : Menurut Teorema 5

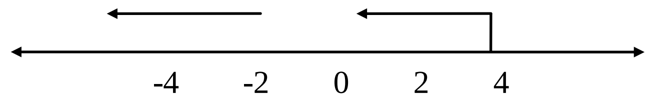
$-6 < x^2 - 10 < 6$

$\Leftrightarrow 4 < x^2 < 16$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1).\ 2 < x < 4, \text{ jika } x > 0 \\ \qquad\qquad \text{atau} \\ (2).\ 2 < -x < 4, \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1).\, 2 < x < 4\,,\ \text{jika}\ \ x > 0 \\ \qquad\qquad \text{atau} \\ (2).\, -4 < x < -2,\ \text{jika}\ \ x < 0 \end{cases}$$



HP = $\{ x \,/\, 2 < x < 4 \} \cup \{ x \,/\, -4 < x < -2 \}$

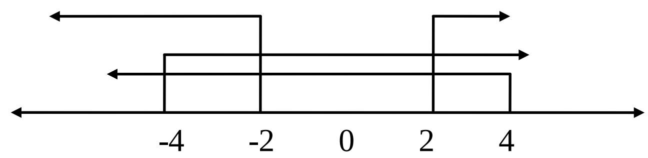
<u>Penyelesaian Cara II</u> : Menurut teorema 5

$-6 < x^2 - 10 < 6$

$\Leftrightarrow 4 < x^2 < 16$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1).\, x^2 < 16 \\ \quad \text{dan} \\ (2).\ \ x^2 > 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1).\, -4 < x < 4 \\ \qquad \text{dan} \\ (2).\, x > 2\ \text{atau}\ x < -2 \end{cases}$$



$\Leftrightarrow 2 < x < 4$ atau $-4 < x < -2$

HP = $\{ x \,/\, 2 < x < 4 \} \cup \{ x \,/\, -4 < x < -2 \}$.

3. $|\, x - y \,| = |\, x + z - z - y \,|$ (Ditambah z - z = 0)

$= |\, (x - z) + (z - y) \,|$ (assosiatif)

$\le |\, x - z \,| + |\, z - y \,|$ (Teorema 8)

atau : $|\, x - z \,| + |\, z - y \,| \ge |\, x + z - z - y \,|$ (Teorema 8)

$\ge |\, x - y \,|$

$|\, x - y \,| \le |\, x + z - z - y \,|$

4. Menurut teorema 6

$|\, 3x + 2 \,| > 5.$

Jika dan hanya jika

$3x + 2 < -5$ atau $3x + 2 > 5$

$\Leftrightarrow x < -\dfrac{7}{3}$ atau $x > 1$

HP = $\{ x \,/ < -\dfrac{7}{3} \} \cup \{ x \,/\, x < 1 \}$.

5. $|\, 3x + 5 \,| < |\, 2x - 1 \,|.$

<u>Penyelesaian Cara I</u>

$|\, 3x + 5 \,| < |\, 2x - 1 \,|.$

$-|2x-1| < 3x+5 < |2x-1|$. (Teorema 5)

$\Leftrightarrow$ (1). $-|2x-1| < 3x+5$

dan

(2). $3x+5 < |2x-1|$.

(1). $-|2x-1| < 3x+5$

$\Leftrightarrow -|2x-1| > -(3x+5)$

$\Leftrightarrow$ 2x - 1 > -3x - 5 atau 2x - 1 < 3x + 5

$\Leftrightarrow x > -\frac{4}{5}$ atau x > -6

HP = { x / x > -6 }

(2). $3x+5 < |2x-1|$.

$\Leftrightarrow |2x-1| > 3x+5$

$\Leftrightarrow$ 2x - 1 > 3x + 5 atau 2x - 1 < -3x - 5

$\Leftrightarrow$ -x > 6 atau 5x < -4

$\Leftrightarrow$ x < -6 atau $x < -\frac{4}{5}$

HP = { x / < $-\frac{4}{5}$ }.

Dari (1) dan (2) :

{ x / x > -6 } $\cap$ { x / x < $-\frac{4}{5}$ }

atau

{ x / -6 < x < < $-\frac{4}{5}$ }.

<u>Penyelesaian Cara II</u>

$|3x+5| < |2x-1|$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+5)^2} < \sqrt{(2x-1)^2}$

$\Leftrightarrow (3x + 5)^2 < (3x - 1)^2$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 30x + 25 < 4x^2 - 4x + 1$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 34x + 24 < 0$

$\Leftrightarrow (5x + 4)(x + 6) < 0$

Kemungkinannya :

(1). 5x + 4 > 0 dan x + 6 < 0

atau

(2). 5x + 4 < 0 dan x + 6 > 0

(1). 5x + 4 > 0 dan x + 6 < 0

$\Leftrightarrow x > -\frac{4}{5}$ dan x < -6

$\Leftrightarrow \phi$

(2). $5x + 4 < 0$ dan $x + 6 > 0$

$\Leftrightarrow x < -\frac{4}{5}$ dan $x > -6$

$\Leftrightarrow -6 < x < -\frac{4}{5}$

Dari (1) dan (2)

ϕ atau $\{ x \,/\, -6\ x < -\frac{4}{5} \}$

$\phi \cup \{ x \,/\, -6\ x < -\frac{4}{5} \}$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{ x \,/\, -6\ x < -\frac{4}{5} \}$

Untuk menyelesaikan dengan cara yang ketiga dengan menggunakan definisi harga mutlak, dipersilakan kepada para pembaca untuk mencobanya.

Setelah Anda mempelajari kegiatan belajar yang kedua dari buku materi pokok ini, buatlah rangkumannya kemudian bandingkan dengan alternatif rangkuman berikut.

Rangkuman

1. Pertidaksamaan adalah kalimat matematika terbuka yang memuat ungkapan >, ≥, <, atau ≤. Sedangkan ketidaksamaan atau pertidaksamaan mutlak (absolut) adalah pertidaksamaan yang selalu benar untuk setiap nilai pengganti variabelnya. Suatu pertidaksamaan yang selalu salah untuk setiap pengganti variabelnya disebut pertidaksamaan palsu.

2. Jika P(x), Q(x), dan R(x) adalah ungkapan-ungkapan dalam x, maka untuk semua harga-harga x, P(x), Q(x), dan R(x) yang real, kalimat terbuka P(x) < Q(x) adalah ekivalen dengan tiap-tiap dari yang berikut :

A. $P(x) + R(x) < Q(x) + R(x)$

B. $P(x) \,.\, R(x) < Q(x) \,.\, R(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{B. } P(x).\,R(x) < Q(x).\,R(x) \\ \text{C. } \dfrac{P(x)}{R(x)} < \dfrac{Q(x)}{R(x)} \end{array}\right\} \text{untuk } x \in \{ x \,/\, R(x) > 0 \}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{D. } P(x).\,R(x) > Q(x).\,R(x) \\ \text{E. } \dfrac{P(x)}{R(x)} > \dfrac{Q(x)}{R(x)} \end{array}\right\} \text{untuk } x \in \{ x \,/\, R(x) < 0 \}$$

demikian pula untuk kalimat terbuka $P(x) \leq Q(x)$ adalah ekivalen dengan kalimat-kalimat terbuka dari bentuk A sampai bentuk E dengan mengganti < (atau >) dengan $\leq$ (atau $\geq$) dengan syarat yang sama pula, yaitu $R(x) > 0$ dan $R(x) < 0$ seperti di atas.

3. Jika $x \in R$, $a \in R$, dan $a > 0$, maka

(a). Jika $|x| < a$, jika dan hanya jika $-a < x < a$.

(b). Jika $-a < x < a$, jika dan hanya jika $x < -a$ atau $x > a$.

4. Untuk setiap $x \in R$, $x < |x|$.

5. Jika $x \in R$, $y \in R$, maka

(a). $|x - y| \leq |x| + |y|$

(b). $|x + y| \leq |x| + |y|$

(c). $|x - y| \geq ||x| - |y||$

(d). $|x - y| \geq |x - z| + |y - z|$

TES FORMATIF 2

Untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda, kerjakanlah soal-soal Tes formatif 2 berikut dengan memberi tanda silang (X) di muka pernyataan yang benar.

1. Untuk setiap Untuk setiap $a \in R$, maka $|a|$

A. > 0 B. < 0
C. ≥ 0 D. ≤ 0

2. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan mutlak $|2x - 7| - |-1|$

A. $\{ x / x \geq 0 \}$ B. $\{ x / x \in R \}$
B. $\{ x / x \leq 0 \}$ D. ϕ

3. Himpunan penyelesaian $|4x - 3| < -|-x|$

A. $\{ x / x > \frac{3}{4} \}$ B. $\{ x / x < \frac{3}{4} \}$
C. $\{ x / x \in R \}$ D. ϕ

4. Himpunan penyelesaian $|4x+3|>1$

A. { x / -2 ≤ x ≤ 4 }
B. { x / 2 ≤ x ≤ 4 }
C. { x / -4 ≤ x ≤ -2 }
D. { x / -2 ≤ x ≤ -4 }

5. Himpunan penyelesaian $|x+1|<2$

A. { x / -5 < x < -1 }
B. { x / x > -1 } ∪ { x / x < -5 }
B. { x / 1 < x < 5 }
D. { x / x > 5 } ∪ { x / x < 1 }

6. Untuk setiap a, b ∈ R berlaku $|a - b|$

A. $||a|-|b||$
B. $||b|-|a||$
C. $||a|+|b||$
D. A, b, dan C salah.

7. Himpunan penyelesaian $|x+3|<x-2$

A. { x / x > $\frac{1}{2}$ }
B. { / x = 0 }
C. { x / x < - $\frac{1}{2}$ }
D. ϕ

8. Himpunan penyelesaian $|x+3|>|x-2|$

A. { x / x < $\frac{1}{2}$ }
B. { x / x > $\frac{1}{2}$ }
C. { x / x < -$\frac{1}{2}$ }
D. { x / x > -$\frac{1}{2}$ }

9. Himpunan penyelesaian $|9-2x|\geq|4x|$

A. { x / -4$\frac{1}{2}$ ≤ x ≤ 1$\frac{1}{2}$ }
B. { x / x ≥ $\frac{1}{2}$ } ∪ { x / x ≤ -4$\frac{1}{2}$ }
C. { x / -1$\frac{1}{2}$ ≤ x ≤ 4$\frac{1}{2}$ }
D. ϕ

10. Himpunan penyelesaian $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right|<4$

A. { x / x < -2 ∪ x > $\frac{10}{9}$ }
B. { x / x < 2 ∪ x > $\frac{10}{9}$ }
C. { x / x < $\frac{10}{9}$ ∪ x > 2 }
D. { x / x < -$\frac{10}{9}$ ∪ x > 2 }

Selanjutnya cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir Materi Pokok ini. Hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar. Kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai :

90% - 100% = Baik sekali

80% - 89% = Baik

70% - 79% = Cukup

≤ 70% = Kurang.

Kalau Anda mencapai tingkat penguasaan 80% ke atas, Anda dapat meneruskannya pada modul yang lainnya. **Bagus !** Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum Anda kuasai. Selamat belajar, semoga berhasil.

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

Modul 9

Tes Formatif 1

1. A $\left|2-\sqrt{3}\right|$ sebab $2-\sqrt{3} > 0$.
2. B Dengan menggunakan definisi harga mutlak

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & , x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & , x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-1 & , x \geq 1 \\ 1-x & , x < 1 \end{cases}$$

3.D $\left|\,|-3| - |2(3-5)|\,\right| = \left|-(-3) - |2(-2)|\,\right|$

$= \left|3 - |-4|\,\right|$

$= |3-4|$

$= |-1|$

$= 1$

4. C $13 + |-1-4| - 3 - |-8| = 13 + |-5| - 3 - 8$

$= 13 + 5 - 11$

$= 7$

5. B $|-x| = \sqrt{(-x)^2} = (-x)$, sebab $(-x)^2 \geq 0$ untuk setiap $x \in R$

6. B $|a-b| = \sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{(b-a)^2} = |b-a|$

7. C $|5x+1| = 3$

Menurut definisi harga mutlak, menyimpulkan bahwa :

$5x + 1 = 3$ jika $5x + 1 \geq 0$

dan

$-(5x + 1) = 3$ jika $5x + 1 < 0$

ekivalen dengan :

$x = \frac{2}{5}$ jika $x \geq -\frac{1}{5}$ (memenuhi)

dan

$x = -\frac{4}{5}$ jika $x < -\frac{1}{5}$ (memenuhi)

Jadi $x = \frac{2}{5}$ dan $x = -\frac{4}{5}$

HP = { $\frac{2}{5}$, $-\frac{4}{5}$ }.

8. D Karena harga mutlak suatu bilangan tidak pernah negatif, maka persamaan tersebut tidak mempunyai penyelesaian.

9. B $|1+2(x-1)| = |3x-7|$

<u>Cara I</u> kedua ruas dikuadratkan

$|1+2(x-1)|^2 = |3x-7|^2$

$(1 + 2(x - 1)^2 = (3x - 7)^2$ (menurut teorema 2b)

<u>Cara II</u> dengan memperhatikan definisi akar

$\sqrt{(1+2(x-1)^2} = \sqrt{(3x-7)^2}$

$(1 + 2(x - 1)^2 = (3x - 7)^2$ (kedua ruas dikuadratkan)

$\Leftrightarrow (1 + 2x - 2)^2 = ((3x - 7)^2$

$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 - (3x - 7)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \{ (2x - 1) + (3x - 7)\} \{(2x - 1) - (3x - 7)\} = 0$

$\Leftrightarrow (5x - 8)(-x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow 5x - 8 = 0$

atau $-x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$ atau $x = 6$

HP = { $\frac{8}{5}$, 6 } (silakan diperiksa dengan mensubstitusikan pada persa-

maan semula, dan ternyata kedua-duanya memenuhi).

10. A $\left|5x-3\right|=\left|3x+5\right|$

$\left|5x-3\right|^2=\left|3x+5\right|^2$ (Teorema 2)

$(5x - 3)^2 = (3x + 5)^2$

$(5x - 3)^2 - (3x + 5)^2 = 0$

$(5x - 3 + 3x + 5) - (5x -3 - 3x - 5) = 0$

$(8x + 2)(2x - 8) = 0$

$8x + 2 = 0$ atau $2x - 8 = 0$

$x = \frac{1}{4}$ atau $x = 4$

HP = { $\frac{1}{4}$, 4 }

Silakan untuk diperiksa dengan mensubstitusikan $x = \frac{1}{4}$ dan $x = 4$ pada persamaan yang diketahui, dan hasilnya tentunya akan memenuhi.

Tes Formatif 2

1. C $\left|a\right| \geq 0$

Bukti :

Kasus 1. Jika $a \geq 0$, maka $\left|a\right| = a \geq 0$ (definisi)

Kasus 2. Jika $a < 0$, maka $\left|a\right| = -a \geq 0$ (definisi)

Dari kedua kasus di atas berarti : $\left|a\right| \geq 0$ (terbukti).

2. B $\left|2x-7\right| > -\left|-1\right|$

$\left|2x-7\right| > -1$

Syarat harga mutlak $\left|2x-7\right| \geq 0$

sedangkan : $-\left|-1\right| = -1 < 0$

Jadi HP = { $x / x \in R$ }.

Atau :

$\left|2x-7\right| > -\left|-1\right|$

$\left|2x-7\right| > -1$

$2x - 7 > -1$ atau $2x - 7 < 1$

$x > 3$ atau $x < 4$

HP = { $x > 3 \cup x < 4$ } = { $x / x \in R$ }.

3. D $\left|4x-3\right| > -\left|-x\right|$

(1). $4x - 3 \geq 0$ (syarat harga mutlak ≥ 0)

(2). $-|-x| < 0$ (negatif harga mutlak < 0)

Karena (1) dan (2) bertentangan, maka himpunan penyelesaiannya tidak ada atau HP = ϕ.

4. D $|x+3| \geq 1$

$\Leftrightarrow x + 3 \geq 1$ atau $x + 3 \leq -1$ (teorema 6)

$\Leftrightarrow x \geq -2 \cup x \leq -4$

HP = $\{ x / -2 \leq x \leq 4 \}$.

5. A. $|x+1| < 2$

$\Leftrightarrow -2 < x + 1 < 2$ (teorema 5)

$\Leftrightarrow -5 < x < -1$

HP $\{ x / -5 < x < -1 \}$.

6. A. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

<u>Bukti</u> :

$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$ (Teorema 8.2)

$\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$.......................... (1) (dikurangi $|b|$)

$|b| = |(b-a)+a| \leq |b-a| + |a|$ (Teorema 8.2)

$\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |b - a|$ (dikurangi $|a|$)

$\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |a - b|$ (Teorema3.c)

$\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$ (dikalikan -1)

Dari (1) dan (2) :

$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$

$\Leftrightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$ (Teorema 5)

$\Leftrightarrow |a - b| \geq ||a| - |b||$. (terbukti)

7. D $|x+3| < x - 2$

$\Leftrightarrow 2$

$- x < x + 3 < x - 2$ (Teorema)

$\Leftrightarrow 2 - x < x + 3$ dan $x + 3 < x - 2$

$\Leftrightarrow -2x < 1$ dan $3 < -2$

$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \cap \phi$

$\Leftrightarrow \phi$

8. B $|x+3| > |x-2|$.

$\Leftrightarrow x + 3 > |x-2|$ atau $x + 3 < -|x-2|$ (Teorema)

$\Leftrightarrow |x-2| < x + 3$ atau $|x-2| < -(x + 3)$

$\Leftrightarrow -x - 3 < x - 2 < x + 3$ atau $x + 3 < x - 2 < -x - 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-3 < x-2 \text{ dan } x-2 < x+3 \\ \text{atau} \\ x+3 < x-2 \text{ dan } x-2 < -x-3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ dan ϕ atau ϕ dan $x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \cap \phi$ atau $\phi \cap x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ atau ϕ

$\Leftrightarrow \{ x / x > \frac{1}{2} \}$.

9. A $|9-2x| \geq |4x|$

(1). $9 - 2x \geq |4x|$

atau

(2). $9 - 2x \leq -|4x|$ (dalil 2)

(1). $9 - 2x \geq |4x|$

$\Leftrightarrow |4x| \leq 9 - 2x$

$\Leftrightarrow 2x - 9 \leq 4x \leq 9 - 2x$

$\Leftrightarrow 2x - 9 \leq 4x$ dan $4x \leq 9 - 2x$

$\Leftrightarrow x \geq -4\frac{1}{2} \cap x \leq 1\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -4\frac{1}{2} \leq x \leq 1\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \phi$

Jadi penyelesaiannya adalah

(1) atau (2) = $\phi \cup \{ -4\frac{1}{2} \leq x \leq 1\frac{1}{2} \}$

HP = $\{ x / -4\frac{1}{2} \leq x \leq 1\frac{1}{2} \}$.

10. C $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 4$

$\Leftrightarrow$ $-4 < \frac{x+2}{2x-3} < 4$

$\Leftrightarrow$ (1). $\frac{x+2}{2x-3} < 4$

dan

(2). $-4 < \frac{x+2}{2x-3}$

(1). $\frac{x+2}{2x-3} < 4$

Kedua ruas dikalikan (2x - 3) dengan mengingat ada kemungkinan $2x - 3 > 0$ dan $2x - 3 < 0$ jika $x \neq 2$.

Jika $2x - 3 > 0$ atau $x > 1\frac{1}{2}$, maka :

$x + 2 < 4(2x - 3)$

$\Leftrightarrow$ $x > 2$

$x > 2 \cap x > 1\frac{1}{2} = x > 2$ ……………………… I

Jika $2x - 3 < 0$ atau $x < 1\frac{1}{2}$, maka

$x + 2 > 4(2x - 3)$

$\Leftrightarrow$ $x < 2$

$x < 2 \cap x < 1\frac{1}{2}$ ……………………………… II

$I \cup II = \{ x / x < 1\frac{1}{2} \cup x > 2 \}$.

(2). $-4 < \frac{x+2}{2x-3}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{x+2}{2x-3} > -4$

Jika $(2x - 3) > 0$ atau $x > 1\frac{1}{2}$, maka

$x + 2 > -4(2x - 3)$

$x > \frac{10}{9}$

$x > \frac{10}{9} \cap x > 1\frac{1}{2} = x > 1\frac{1}{2}$ ………………….. III

Jika $2x - 3 < 0$ atau $x < 1\frac{1}{2}$, maka

$x + 2 < -4(2x - 3)$

$x < \frac{10}{9}$

$x < \frac{10}{9} \cap \; x < 1\frac{1}{2} = x < \frac{10}{9}$ …………………… IV

$III \cup IV = \{ x \,/\, x < \frac{10}{9} \cup x > 2 \}$

Penyelesaiannya adalah (1) dan (2) atau $(1) \cap (2) = \{ x \,/\, x < \frac{10}{9} \cup x > 2 \}$.

DAFTAR PUSTAKA

Bunarso. T. (1973). Matematika Unit Bilangan, Relasi dan Fungsi, Bandung : Sulita.

Karso. (1997). Buku Materi Pokok 3 : Telaah Materi Persamaan, Pertidaksamaan dan Program Linear (Telaah Materi Kurikulum Matematika SMU), Jakarta : Depdikbud, FKIP - UT.

K. Martono. (1992). Kalkulus I Sistem Bilangan Real dan Fungsi. Bandung : Jurusan Matematika FMIPA - ITB.

Louis Leothold. (1976). The Calculus With Analytic Geometry, Third Edition, New York, Hagerstown, San Francisco, London : Harper & Row, Publisher.

Walter Fleming and Dell Verberg. (1980). Algebra and Trigonometry, New Jrsey : Prentice Hal Inc.

Walter Van Stigt. (1978). Success in Mathematics, London : Jhon Murray Publisher Ltd.