Ringkasan Materi Kuliah

MASALAH NILAI BATAS

Pendahuluan

Perhatikan persamaan diferensial linear orde-dua berikut

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \quad dan \quad y'(x_0) = y_1 \tag{2}$$

Dengan koefisien-koefisien $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$, dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu di dalam suatu selang $a \le x \le b$ dengan $a_2(x) \ne 0$ di dalam selang ini. Persamaan diferensial (1), bersama-sama dengan syarat awal (2), disebut suatu masalah nilai awal (MNA). Kita ingin mencari suatu penyelesaian $y(x)$ dari persamaan diferensial (1) yang memenuhi syarat pada titik akhir dari selang $a \le x \le b$.

Sebagai contoh,

$$y(a) = A \quad dan \quad y(b) = B, \tag{3}$$

Dengan A dan B dua buah konstanta. Syarat (3) yang diberikan pada titik akhir (atau titik batas) dari selang $a \le x \le b$ disebut *syarat batas*. Persamaan diferensial (1), bersama-sama dengan syarat batas (3), disebut suatu *masalah nilai batas (MNB)*. Suatu MNB dapat mempunyai tepat satu penyelesaian, takberhingga penyelesaian, atau takmempunyai penyelesaian.

Contoh 1

Selesaikan MNB

$$y'' + y = x \; untuk \; 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

$$y(0) = 2, \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \tag{5}$$

Penyelesaian

Penyelesaian homogen (4) berbentuk $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$ Dengan menggunakan metode koefisien taktentu, kita dapatkan bahwa penyelesaian khusus dari persamaan diferensial (4) berbentuk $y_p = Ax + B.$ Jadi, penyelesaian umum dari persamaan diferensial (4) berbentuk

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x. \tag{6}$$

Dengan menggunakan syarat batas (5), kita dapatkan bahwa

$$y(0) = 2 \Rightarrow c_1 = 2$$

dan

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow c_2 + \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow c_2 = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

Jadi, MNB (4) – (5) mempunyai penyelesaian *tunggal*

$$y(x) = 2\cos x + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\sin x + x. \tag{7}$$

Contoh 2

Selesaikan MNB

$$y'' + y = x \textit{ untuk } 0 \le x \le \pi \tag{8}$$

$$y(0) = 2, \;\; y(\pi) = 1. \tag{9}$$

Penyelesaian

Penyelesaian umum dari persamaan diferensial (8) telah dihitung dalam Contoh 1 dan berbentuk

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x.$$

Selanjutnya, kita cari nilai-nilai konstanta c_1 dan c_2 yang memenuhi syarat batas (9). Kita dapatkan

$$y(0) = 2 \Rightarrow c_1 = 2$$

dan

$$y(\pi) = 1 \Rightarrow -c_1 + \pi = 1 \Rightarrow c_1 = \pi - 1.$$

Jelaslah, syarat-syarat ini tidak cocok, karena syarat-syarat ini mengakibatkan c_1 mempunyai dua nilai 2 dan π-1 bersama-sama. Jadi, kita simpulkan bahwa dalam hal ini MNB (8) – (9) *tidak mempunyai* penyelesaian.

Contoh 3

Selesaikan MNB

$$y'' + y = x \text{ } untuk \text{ } 0 \le x \le \pi \tag{10}$$

$$y(0) = 2, \ \ y(\pi) = \pi - 2. \tag{11}$$

Penyelesaian

Penyelesaian umum dari persamaan diferensial (10) berbentuk

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x.$$

Sekarang,

$$y(0) = 2 \Rightarrow c_1 = 2$$

dan

$$y(\pi) = \pi - 2 \Rightarrow -c_1 + \pi = \pi - 2 \Rightarrow c_1 = 2.$$

Jadi, c_1 = 2 sedang c_2 tetap sebarang. Dalam hal ini, MNB (10) – (11) mempunyai *takberhingga banyaknya* penyelesaian :

$$y(x) = 2\cos x + c_2 \sin x + x. \tag{12}$$

Syarat batas pada titik akhir *a* dan *b* tidak perlu selalu berbentuk yang digambarkan dalam contoh-contoh di atas. Syarat batas itu dapat terdiri dari kombinasi dari *y* dan turunannya pada titik-titik *a* dan *b*. Kita sajikan contoh yang sederhana.

Contoh 4

Selesaikan MNB

$$y'' + 4y = 0 \ \ untuk \ \ 0 \le x \le \pi \tag{13}$$

$$y(0) - 2y'(0) = -2. \tag{14}$$

$$y(\pi) + 3y'(\pi) = 3. \tag{15}$$

Penyelesaian

Penyelesaian umum dari persamaan diferensial (13) berbentuk

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

$$y'(x) = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x,$$

dengan menggunakan syarat batas, kita dapatkan bahwa

$$y(0) - 2y'(0) = -2 \Rightarrow c_1 - 4c_2 = -2 \text{ dan}$$

$$y(\pi) + 3y'(\pi) = 3 \Rightarrow c_1 + 6c_2 = 3.$$

Dengan menyelesaikan sistem ini kita peroleh $c_1 = 0$ dan $c_2 = \frac{1}{2}$. Karena itu, MNB (13) – (14) mempunyai penyelesaian tunggal.

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Tentu saja, penting untuk mengetahui atas dasar syarat-syarat apa suatu MNB mempunyai penyelesaian tunggal. Tidak mempunyai penyelesaian, atau mempunyai takberhingga banyaknya penyelesaian.

Teorema 1

Andaikan bahwa y_1 (x) dan y_2 (x) dua buah penyelesaian yang bebas linear dari persamaan diferensial homogen pautan dari persamaan diferensial (1) dan andaikan y_p (x) suatu penyelesaian khusus dari persamaan diferensial (1). Maka, berlakulah pernyataan berikut :

(a) Jika

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{21}$$

MNB (1) dan (3) mempunyai satu dan hanya satu penyelesaian di dalam selang $a \le x \le b$.

(b) Jika determinan dalam (21) sama dengan nol, MNB (1) dan (3) tidak mempunyai penyelesaian atau mempunyai takberhingga banyaknya peyelesaian di dalam selang $a \le x \le b$, tergantung pada determinan

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & A - y_p(a) \\ y_1(b) & B - y_p(b) \end{vmatrix} \tag{22}$$

Berturut-turur tidak nol atau sama dengan nol.

Akan kita terapkan Teorema 1 pada MNB-MNB dalam contoh-contoh 1, 2, dan 3, dimana $y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = \sin x, dan\, y_p(x) = x.$ MNB (4) – (5) mempunyai penyelesaian tunggal karena

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

MNB (8) – (9) tidak mempunyai penyelesaian, karena

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos\pi & \sin\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dan

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & A - y_p(a) \\ y_1(b) & B - y_p(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 0 & 2-0 \\ \cos\pi & 1-\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1-\pi \end{vmatrix} \neq 0.$$

Akhirnya, MNB (10) – (11) mempunyai takberhingga banyaknya penyelesaian, karena

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos\pi & \sin\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dan

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & A - y_p(a) \\ y_1(b) & B - y_p(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 0 & 2-0 \\ \cos\pi & \pi-2-\pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sumber Bacaan:

Santoso, Widiarti. (1998). *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern edisi 2*. Jakarta: Erlangga