SOLUSI DAN PERILAKU SISTEM SATU MASSA DENGAN PEREDAM VIBRASI YANG DIBERI GAYA EKSITASI PARAMETRIK MENGGUNAKAN METODE NUMERIK

Asep Syarif Hidayat[1,] hasyhi@yahoo.com
Willi Sutanto[2], wheels2elseiswise@gmail.com

[1]JURDIKMAT FPMIPA UPI
[2]ALUMNI JURDIKMAT FPMIPA UPI

ABSTRAK

Diberikan suatu model sistem massa yang terdiri dari sebuah benda yang memiliki massa *m* yang ditopang oleh sebuah pegas linear dengan konstanta k_1 dan sebuah damper linear dengan konstanta kelenturan c_1 sehingga massa *m* dapat bergerak ke atas dan ke bawah yang dinyatakan dengan variabel *x*. Massa *m* dikenai arus induksi dengan koefisien kecepatan dinyatakan dengan *U*. Arus induksi tersebut menyebabkan massa *m* bervibrasi. Pada massa *m* dipasangkan sebuah pegas linear lain dengan konstanta k_2, sehingga gaya yang ditimbulkan berlawanan dengan gaya yang ditimbulkan oleh arus induksi *U*. Arus induksi ini akan menimbulkan tekanan *self-exciting* yang berpengaruh pada massa. Tekanan *self-excitation* ini diasumsikan ke dalam tipe van der Pol $F_{SE} = c_0 U^2 \; 1-\gamma_0 x^2 \; \dot{x}$. Gaya-gaya yang bekerja pada massa *m* adalah gaya pegas $-k_1 x$ dan $-k_2 x$, gaya yang dihasilkan oleh redaman linear $-c_1\dot{x}$, serta gaya yang ditimbulkan oleh arus induksi *U* berupa *positif damping.*

Pada penelitian ini akan dipelajari pula ketika sistem tersebut digerakkan ke atas dan ke bawah sehingga muncul pengaruh gaya $-qx^n$ dan diberi gaya luar berupa eksitasi parametrik, yaitu $k\; t \; = -\; s\cos\omega t \; x$. Akan diambil untuk kasus $n = 3$. Untuk selanjutnya model sistem tersebut disebut *persamaan van der Pol yang tereksitasi parametrik dengan suku non linear berderajat tiga.*

Model matematik yang diperoleh tersebut merupakan model sistem satu massa yang telah dipelajari dinamikanya oleh Ratnapuri (2005) melalui metode analitik. Pada penelitian ini dipelajari model yang diperoleh dengan menggunakan metode numerik untuk menunjukkan bahwa dalam mempelajari model yang sama diperoleh kesimpulan yang sama. Dinamika model yang diperoleh dari hasil numerik kemudian dibandingkan dengan analisis dari hasil kerja Ratnapuri untuk menguji kebenaran hasil numerik. Metode yang dipakai adalah metode Runge-Kutta orde-4. Melalui metode tersebut diperoleh data numerik yang kemudian diplot ke dalam bentuk grafik dengan menggunakan software Microsoft Excel XP. Kemudian dengan melihat grafik dari data numerik yang diperoleh, dipelajari dinamika model sistem satu massa tersebut.

Hasil numerik menunjukkan bahwa pada titik kritis trivial persamaan *averaging* ditemukan bahwa titik kritis tersebut ada yang stabil dan tak stabil. Selain itu ditemukan pula bahwa ketakstabilan titik kritis tersebut akan menuju pada solusi periodiknya.

Kata kunci : persamaan van der Pol, eksitasi parametrik, metode Runge-Kutta orde-4.

1. Pendahuluan

Banyak permasalahan muncul pada bidang-bidang Biologi, Fisika, Teknik dan sebagainya yang dapat dinyatakan ke dalam model Matematika dalam bentuk persamaan diferensial, baik itu persamaan diferensial biasa maupun parsial. Contohnya pada bidang Teknik, persamaan van der Pol digunakan oleh Tondl (2000) dan Fatimah (2002) untuk mempelajari bagaimana mengurangi vibrasi yang terjadi pada suatu konstruksi. Pada bidang Fisika, persamaan Mathieu digunakan untuk mempelajari gerak pendulum sederhana. Model-model tersebut, dalam sistem massa, dipelajari menggunakan metode atau pendekatan matematika, baik yang bersifat analitik maupun numerik.

Banyak penelitian telah dilakukan untuk mempelajari sistem satu massa dan dua massa dengan cara analitik ataupun numerik. Untuk mengetahui pengaruh suatu gaya terhadap vibrasi yang terjadi pada massa. Sistem dengan dua massa pernah diteliti oleh Tondl (2000) maupun Fatimah (2002) secara analitik. Berdasarkan penelitian tersebut, diperoleh kesimpulan bahwa kombinasi peredam pada sistem tersebut efektif untuk mengurangi vibrasi yang ditimbulkan oleh arus induksi. Dipelajari pula perilaku solusi setimbang dan solusi periodik yang juga berkaitan erat dengan pengaruh gaya terhadap pengurangan vibrasi pada sistem tersebut. Sedangkan sistem dengan satu massa yang diberi gaya luar berupa eksitasi parametrik telah diteliti oleh Ratnapuri (2005) secara analitik. Berdasarkan penelitian tersebut diperoleh kesimpulan bahwa kombinasi antara eksitasi parametrik (*parametric-excitation)* dengan *self-excitation* mampu mengurangi vibrasi pada model sistem tersebut. Dalam aplikasinya sistem-sistem tersebut dipelajari untuk mengetahui bagaimana mengurangi vibrasi pada suatu konstruksi semisal kereta gantung, jembatan raksasa atau bangunan-bangunan pencakar langit (Ratnapuri, 2005). Hasil lainnya ditemukan bahwa keberadaan solusi setimbang dan periodik bergantung kepada nilai parameter-parameter tertentu.

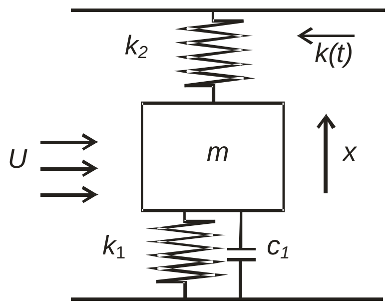
Pada penelitian ini dipelajari model sistem satu massa yang dibahas dalam Ratnapuri (2005). Model persamaan yang diperoleh, yaitu

$$\ddot{x} + px - \beta\left(1 - x^2\right)\dot{x} = qx^n + \left(s\cos\omega t\right)x \qquad (1)$$

dengan $p > 0, \beta > 0, q > 0, s > 0$, dan $p, \beta, q, s \in \Re$. Ratnapuri (2005) menyebutnya dengan nama persamaan van der Pol dengan eksitasi parametrik. (Selanjutnya persamaan (1) disebut persamaan van der Pol yang tereksitasi parametrik dengan suku non linear berderajat *n*). Model tersebut telah dipelajari olehnya secara analitik. Ratnapuri menggunakan program jadi yang terdapat dalam software Maple versi 8.0 untuk memperoleh simulasi numerik. Sedangkan dalam penelitian ini akan dibahas simulasi numerik menggunakan program numerik vdPEkspar yang disusun dengan menggunakan software bernama Turbo Pascal versi 7.0 dan berdasarkan algoritma Runge-Kutta orde-4 untuk memperoleh data numerik yang selanjutnya data numerik tersebut diplot menggunakan software Microsoft Excel XP. Selain itu penelitian ini bertujuan untuk mempelajari keunggulan metode numerik sebagai metode alternatif dalam memecahkan suatu permasalahan persamaan diferensial non linear yang terkadang tidak mudah untuk dipecahkan secara analitik.

Pada penelitian ini dibahas mengenai keberadaan solusi periodik, keperiodikan solusi eksplisit yang diperoleh Ratnapuri (2005) secara numerik, perilaku lokal dan global, solusi setimbang dan solusi periodik. Selain itu dibahas pula analisa pengaruh parameter tekanan *self-excitation*, koefisien suku non linear, dan koefisien eksitasi parametrik dalam meredam vibrasi pada sistem massa secara numerik yang selanjutnya dibandingkan hasilnya dengan hasil analitik Ratnapuri (2005).

2. Rumusan Masalah



Gambar 1
Sistem satu massa dengan peredam vibrasi
yang diberi gaya luar berupa gaya eksitasi parametrik dan gaya non linear

Diberikan model sistem pada Gambar 1. Model tersebut terdiri dari benda yang memiliki massa *m* (selanjutnya disebut massa *m*) yang ditopang oleh sebuah pegas linear dengan konstanta k_1 dan sebuah damper linear dengan konstanta kelenturan c_1 sehingga massa *m* dapat bergerak ke atas dan ke bawah yang dinyatakan dengan variabel *x*. Massa *m* dikenai arus induksi dengan koefisien kecepatan dinyatakan dengan *U*. Arus induksi menyebabkan massa *m* bervibrasi. Pada massa *m* dipasangkan sebuah pegas linear lain dengan konstanta k_2 sehingga gaya yang ditimbulkan berlawanan dengan gaya yang ditimbulkan oleh arus induksi *U*.

Jika sistem tersebut diberi gaya luar berupa eksitasi parametrik $k(t) = -(s\cos\omega t)x$, maka diperoleh persamaan van der Pol yang tereksitasi parametrik. Kemudian jika sistem digerakkan ke atas dan ke bawah, maka akan muncul pengaruh gaya non linear $-qx^n$ pada sistem tersebut dan diperoleh persamaan van der Pol dengan suku non linear. Kemudian jika pada waktu bersamaan sistem tersebut digerakkan ke atas dan ke bawah dan diberi gaya luar berupa eksitasi parametrik, maka akan diperoleh persamaan van der Pol yang tereksitasi parametrik dengan suku non linear berderajat *n*.

Pada penelitian ini, dari model persamaan yang diperoleh selanjutnya dicari solusinya secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 untuk $n = 3$. Kemudian melalui solusi numerik yang diperoleh akan dipelajari perilaku solusi tersebut dan pengaruh gaya-gaya yang bekerja pada sistem terhadap vibrasi yang terjadi pada sistem massa. Selanjutnya hasil numerik tersebut akan dibandingkan dengan hasil analitik penelitian Ratnapuri (2005).

3. Tujuan Penulisan

Penulisan penelitian ini bertujuan selain untuk mendapatkan gambaran bagaimana solusi persamaan van der Pol yang tereksitasi secara parametrik dengan suku non linear berderajat tiga secara numerik, juga untuk menganalisis keberadaan solusi periodik dan gambaran perilaku global dari solusi persamaan yang dipelajari, dan pengaruh tekanan *self-excitation* β, koefisien suku non linear *q*, dan koefisien eksitasi parametrik *s* dalam meredam vibrasi sistem massa secara numerik. Selain itu, diharapkan penelitian ini mampu pula melengkapi pengetahuan yang telah ada tentang model sistem tersebut, memberi gambaran cara-cara mempelajari model sistem tersebut kepada pengguna model secara numerik, dan terutama sebagai penambah wawasan bagi penulis mengenai salah satu permasalahan persamaan diferensial dan metode numerik.

4. Metode Penelitian

Pandang kembali persamaan (1). Persamaan tersebut disebut dengan *persamaan van der Pol yang tereksitasi parametrik dengan suku non linear berderajat n.*

Jika diambil nilai-nilai $p=1$, dan $n=3$ maka mengacu pada penelitian Ratnapuri (2005), ketiga persamaan di atas, (2), (3), (4), berturut-turut menjadi

$$\ddot{x}+x-\beta\left(1-x^2\right)\dot{x}=0 \qquad (2)$$

$$\ddot{x}+x-\beta\left(1-x^2\right)\dot{x}-qx^3=0 \qquad (3)$$

$$\ddot{x}+x-\beta\left(1-x^2\right)\dot{x}-qx^3=\left(s\cos\omega t\right)x. \qquad (4)$$

Selanjutnya, ketiga persamaan tersebut berturut-turut disebut dengan persamaan van der Pol tanpa suku non linear, persamaan van der Pol dengan suku non linear berderajat tiga, dan persamaan van der Pol yang tereksitasi parametrik dengan suku non linear berderajat tiga. Ketiga persamaan inilah yang akan dicari solusi numeriknya dan dipelajari perilaku solusinya. Kemudian, dibandingkan hasilnya dengan hasil analitik Ratnapuri untuk menguji validasinya.

Setelah diketahui penurunan model masalah yang dibahas, berikut ini akan dibahas cara memperoleh solusinya menggunakan metode numerik.

Pandang kembali persamaan (1), yaitu

$$\ddot{x}+px-\beta\left(1-x^2\right)\dot{x}-qx^n=\left(s\cos\left(\omega t\right)\right)x.$$

Untuk $n=3$, maka persamaan tersebut menjadi

$$\ddot{x}+px-\beta\left(1-x^2\right)\dot{x}-qx^3=\left(s\cos\left(\omega t\right)\right)x. \qquad (5)$$

Dimisalkan $y=x$, $z=\dot{x}$ maka persamaan (4.1.1) menjadi

$$\dot{y}=z,\qquad \dot{z}=\beta\left(1-y^2\right)z-py+qy^3+\left(s\cos\left(\omega t\right)\right)y \qquad (6)$$

dengan $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$, dan $\dot{z}=\frac{dz}{dt}$. Dalam menyelesaikan persamaan (6) secara numerik, parameter-parameter $p=1-\bar{p}\varepsilon, \beta=\bar{\beta}\varepsilon, q=\bar{q}\varepsilon,\ s=\bar{s}\varepsilon$ dan $0<\varepsilon<1$ akan digunakan untuk disesuaikan dengan penggunaan parameter-parameter tersebut ketika metode *averaging* dipakai pada persamaan (5) untuk mencari solusi analitiknya. Sehingga persamaan (6) menjadi

$$\dot{y}=z,\qquad \dot{z}=\bar{\beta}\varepsilon\left(1-y^2\right)z-(1-\bar{p}\varepsilon)y+\bar{q}\varepsilon y^3+\left(s\bar{\varepsilon}\cos\left(\omega t\right)\right)y. \qquad (7)$$

Untuk memudahkan pembuatan program digunakan parameter-parameter $S=\varepsilon, b=\bar{\beta}, c=\bar{p}, d=\bar{q},$ dan $e=\bar{s}$ pada persamaan (7), sehingga persamaan (7) menjadi

$$\dot{y}=z,\qquad \dot{z}=bS\left(1-y^2\right)z-(1-cS)y+dSy^3+\left(eS\cos\left(\omega t\right)\right)y. \qquad (8)$$

Karena persamaan di atas akan diselesaikan menggunakan metode numerik maka semua parameter yang muncul pada persamaan tersebut untuk $t=0$ perlu ditetapkan dan persamaan tersebut harus dinyatakan sebagai masalah nilai awal terlebih dulu. Selanjutnya, persamaan tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dy}{dt}=f\left(t,y,z\right),\qquad \frac{dz}{dt}=g\left(t,y,z\right), \qquad (9)$$

dengan nilai awal $y\left(t_0\right)=y_{0,}$ dan $z\left(t_0\right)=z_{0,}$

Untuk menentukan solusi numerik dari persamaan (9) dalam interval $t_0\le t\le t_m$, dituliskan persamaan (9) sebagai

$$dy = f(t, y, z)\,dt \text{ dan } dz = g(t, y, z)\,dt \tag{10}$$

dan menyatakan

$$dt = t_{j+1} - t_j,\ dy = y_{j+1} - y_j \text{ dan } dz = z_{j+1} - z_j. \tag{11}$$

Selanjutnya, persamaan (11) disubstitusikan ke persamaan (10) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} y_{j+1} - y_j &= f(t_j, y_j, z_j)(t_{j+1} - t_j) \\ z_{j+1} - z_j &= g(t_j, y_j, z_j)(t_{j+1} - t_j) \end{aligned} \tag{12}$$

untuk $j = 0, 1, ..., m-1$.

Cara menentukan solusi numerik dengan menggunakan rumus berulang (12) dikenal sebagai metode Euler. Namun metode ini kurang baik untuk digunakan. Oleh karena itu, untuk mendapatkan solusi numerik yang lebih baik digunakan metode Runge-Kutta orde-4 yang rumus berulangnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + h(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)/6 \\ z_{j+1} &= z_j + h(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4)/6 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t_j, y_j, z_j) \\ f_2 &= f(t_j + h/2, y_j + hf_1/2, z_j + hg_1/2) \\ f_3 &= f(t_j + h/2, y_j + hf_2/2, z_j + hg_2/2) \\ f_4 &= f(t_j + h, y_j + hf_3, z_j + hg_3) \\ g_1 &= g(t_j, y_j, z_j) \\ g_2 &= g(t_j + h/2, y_j + hf_1/2, z_j + hg_1/2) \\ g_3 &= g(t_j + h/2, y_j + hf_2/2, z_j + hg_2/2) \\ g_4 &= g(t_j + h, y_j + hf_3, z_j + hg_3) \end{aligned} \tag{13}$$

Pada persamaan di atas, h adalah panjang langkah pengintegralan, $t_0 < t_1 < ... < t_n = t_m$, dan $t_{j+1} = t_j + h$ untuk $j = 0, 1, ..., n-1$. Selanjutnya, y_{j+1} dan z_{j+1} adalah nilai pendekatan untuk y dan z saat $t = t_{j+1}$. Metode di atas diimplementasikan dalam bentuk program Pascal, program buatan yang diberi nama *vdPEkspar*, yang selanjutnya digunakan untuk menyelesaikan persamaan (2), (3), dan (4). Algoritma program dan listing program dapat dilihat pada bagian lampiran.

5. Hasil dan Pembahasan

Setelah membandingkan hasil numerik berupa grafik dengan hasil analisa Ratnapuri (2005), diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Metode numerik dapat digunakan untuk mempelajari solusi dan perilaku dari sistem satu massa dengan peredam vibrasi yang diberi gaya eksitasi parametrik.

   Contoh (Keberadaan Solusi Periodik)

   Pandang kembali persamaan (5), yaitu

$$\ddot{x} + px - \beta(1 - x^2)\dot{x} - qx^3 = s(\cos\omega t)x$$

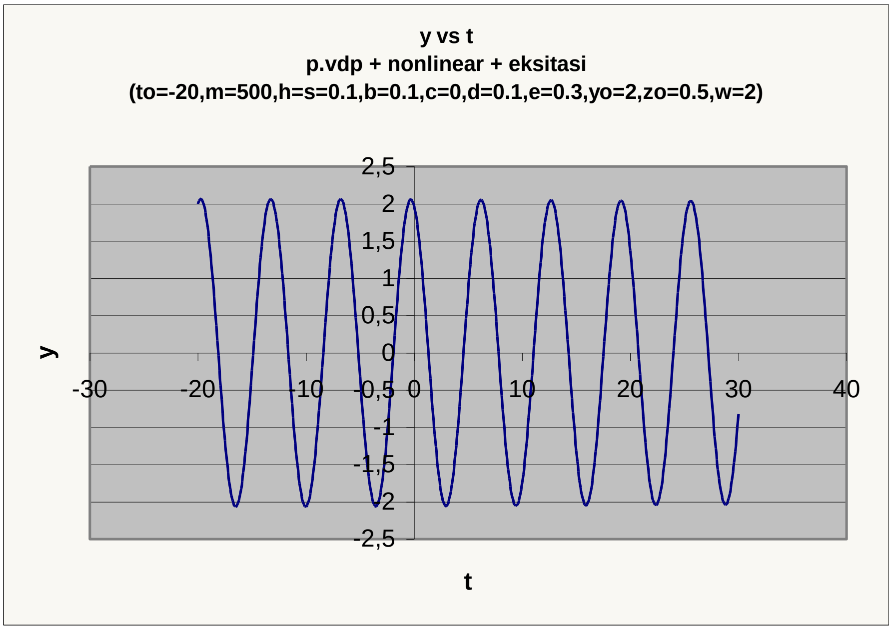
Dimisalkan,

$$f\left(\dot{x}(t)\right) = -\beta\left(1-x^2\right)\dot{x}\,,$$

dan

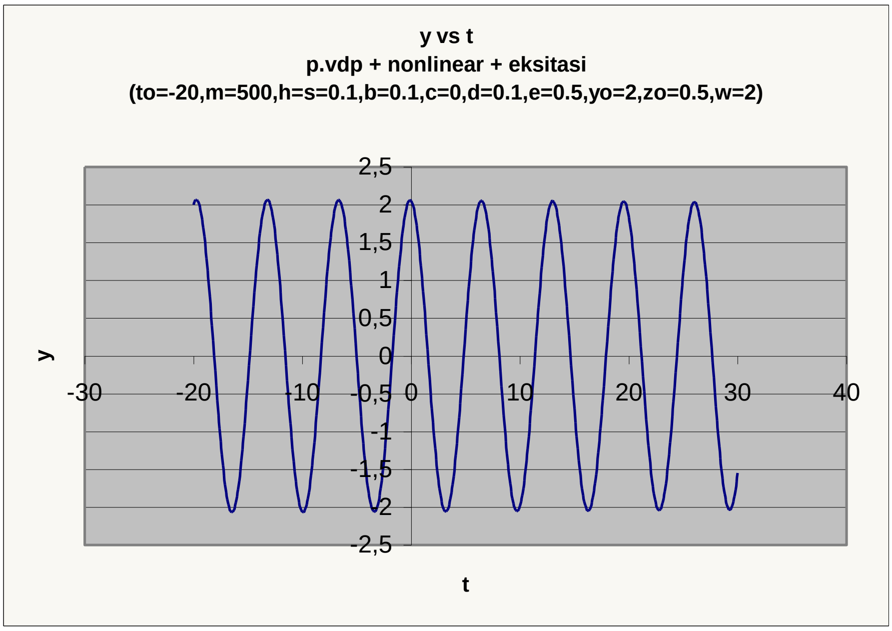
$$h\left(t, x(t)\right) = -qx^3 - s\left(\cos\left(\omega t\right)\right)x\,.$$

Secara analitik, berdasarkan Yan dan Wang (1998), keberadaan solusi periodik persamaan (5) dapat dibuktikan dengan cara-cara yang dapat dilihat pada (Deimling, 1985) dan (Mawhin J.L. dan Gaines R.E, 1977). Sedangkan secara numerik, dengan menggunakan program *vdPEkspar* diperoleh hasil yang sama, bahwa persamaan tersebut memiliki solusi periodik. Hal tersebut dibuktikan dengan grafik di bawah ini.



Gambar 2

Grafik *y* terhadap *t* persamaan van der Pol (6) pada bidang *yt* untuk $\beta = 0.01, q = 0.01,$ dan $s = 0.03$



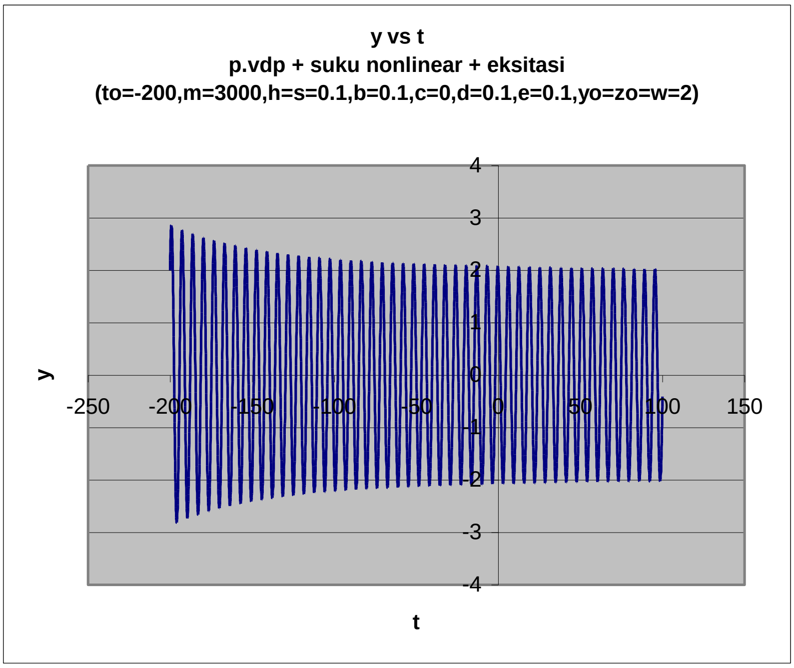
Gambar 3

Grafik *y* terhadap *t* persamaan van der Pol (6) pada bidang *yt* untuk $\beta = 0.01, q = 0.01,$ dan $s = 0.05$

Gambar 2 dan **Gambar 3** diperoleh dengan mengambil nilai awal β dan p sama sedangkan nilai q berbeda. Pada **Gambar 2**, $\beta = 0.01$, $p = 0.01$ dan q = 0,03, sedangkan pada **Gambar 3**, $\beta = 0.01$, $p = 0.01$ dan q = 0,05. Kedua gambar tersebut menunjukkan bahwa, dengan mengambil nilai awal β dan p sama sedangkan nilai q berbeda diperoleh grafik yang periodik. Artinya, persamaan (5) memiliki solusi periodik.

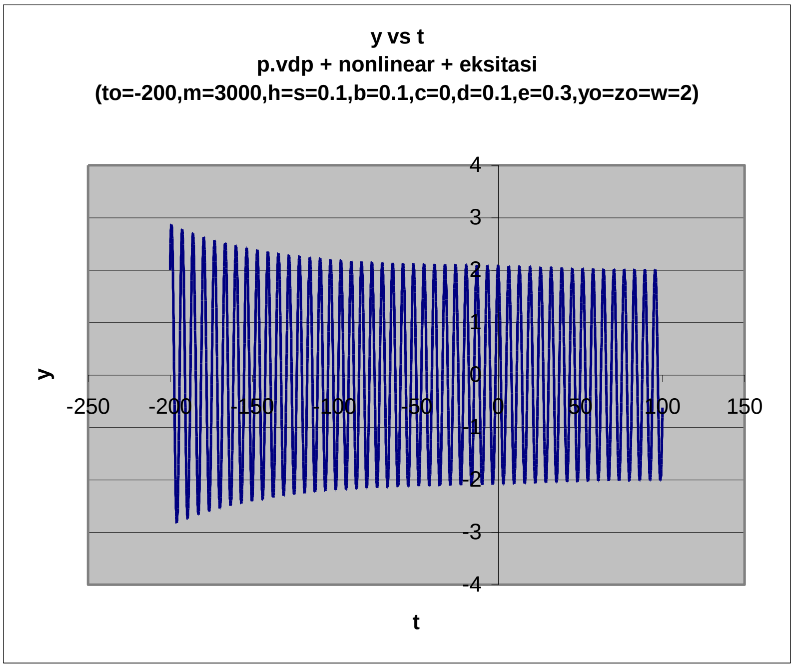
2. Pada sistem satu massa yang diberi gaya luar berupa eksitasi parametrik dan fungsi non linear berderajat tiga ternyata kedua gaya luar tersebut tidak mempengaruhi keperiodikan solusi tetapi mampu mengubah kestabilan solusi, dan mampu mengurangi vibrasi yang terjadi pada sistem tersebut.

Contoh.
Secara analitik, Ratnapuri telah menunjukkan kebenaran kesimpulan nomor 2. Dengan menggunakan program *vdPEkspar* ternyata diperoleh hasil yang sama. Hal tersebut dibuktikan dengan grafik di bawah ini.



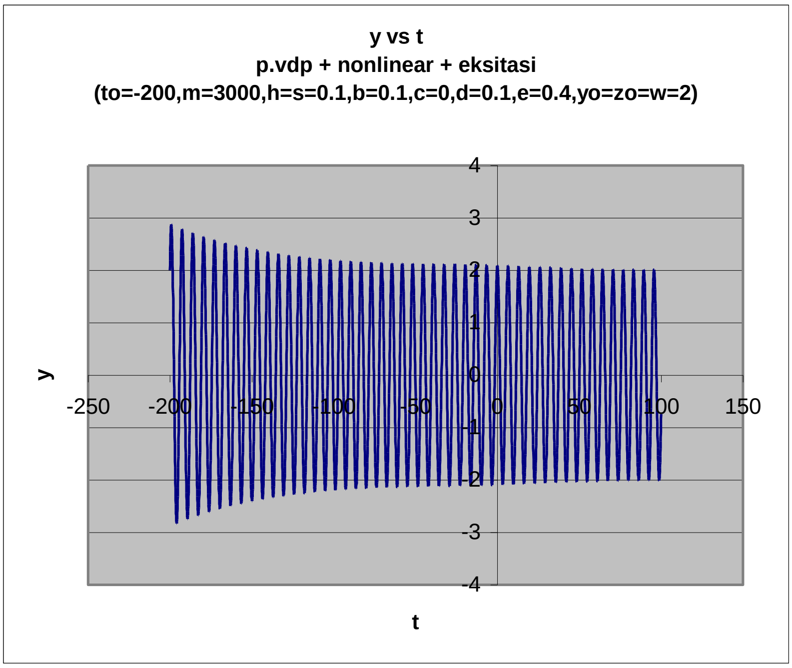
Gambar 4

Grafik *y* terhadap *t* persamaan van der Pol (6) pada bidang *yt* untuk $\beta = 0{,}01$, $p = 1$, $q = 0.01$ dan $s = 0{,}01$



Gambar 5

Grafik *y* terhadap *t* persamaan van der Pol (6) pada bidang *yt* untuk $\beta = 0{,}01$, $p = 1$, $q = 0.01$ dan $s = 0{,}03$



Gambar 6
Grafik y terhadap t persamaan van der Pol yang tereksitasi parametrik dengan suku non linear berderajat tiga (6) pada bidang yt untuk $\beta = 0{,}01$, $p = 1$, $q = 0.01$ dan $s = 0{,}04$

Perubahan amplitudo vibrasi sangat jelas terlihat ketika kita menambahkan gaya luar berupa tekanan eksitasi parametrik. Pada nilai s yang lebih besar, selang waktu dimana terjadinya pengurangan vibrasi semakin luas. Hal ini terlihat dari **Gambar 4**, **Gambar 5**, dan **Gambar 6**. Ini menunjukkan penambahan tekanan eksitasi parametrik pada sistem mampu mengurangi vibrasi yang terjadi.

3. Hasil analisa menunjukkan bahwa persamaan van der Pol tanpa suku non linear hanya memiliki satu titik trivial yang berjenis *focus* tak stabil. Ketika fungsi non linear ditambahkan pada persamaan tersebut terjadi perubahan muncul dua titik kritis semitrivial $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{q}},0\right)$. Untuk titik kritis trivial tidak terjadi perubahan dan titik kritis semi-trivial berjenis *saddle*. Dengan metode numerik pun ditemukan kesimpulan serupa.
4. Dari hasil analisa ditemukan bahwa titik kritis trivial pada persamaan *averaging* ada yang stabil juga tidak stabil untuk parameter-parameter yang ditetapkan. Dengan menggunakan metode numerik selain ditemukan hal serupa juga ditemukan bahwa ketika titik kritis trivial tidak stabil maka ditemukan solusi periodik yang stabil. Ketakstabilan dari titik kritis akan menuju pada solusi periodik tersebut.

6. Rekomendasi

Dalam penelitian ini perilaku solusi dari persamaan van der Pol yang tereksitasi parametrik dengan suku non linear berderajat tiga dipelajari dengan metode numerik. Kemudian, program yang digunakan untuk memperoleh gambaran perilaku solusi dari persamaan tersebut masih menggunakan gabungan tiga buah program, yaitu Turbo Pascal v 7.0, Microsoft Word XP, dan Microsoft Excel XP. Hasil simulasi numerik persamaan tersebut masih terbatas pada perilaku lokal titik (0,0) yang ditemukan pada persamaan *averaging*, sedangkan untuk titik-titik lainnya perlu dipelajari lebih lanjut. Selanjutnya, untuk membuat sebuah simulasi numerik dengan menggunakan ketiga program tersebut dibutuhkan waktu yang cukup lama. Untuk penelitian lebih lanjut, program semisal Delphi atau Visual Basic dapat digunakan untuk membuat simulasi numerik dengan mudah dan singkat.

Referensi

Boyce, W.E. dan Diprima, R.C. (2001). *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*. Singapore: John Wiley&Sons, Inc.

Cartwright, J. (1995). *Convergence of Runge-Kutta Methods.*[Online]. Tersedia: http://lec.ugr.es/~julyan/papers/rkpaper/node13.html [19 July, 2006]

Demling, K. (1985). *Nonlinear Functional Analysis.* Berlin, New York: Springer-Verlag.

Fatimah, S. dan Verhults, F. (2002). *Suspressing Flow-Induced Vibration by Parametric Excitation*. Nonlinear Dynamics Journal. *31, 275-278.*

Fatimah, S., dkk. (2004). *Redaman Vibrasi Arus Induksi dan Dinamika pada Persamaan van der Pol Tereksitasi Parametrik. Penelitian didanai Proyek SP4.*

Gaines, R.E., dan Mawhin, J.L. (1977). *Coincidence Degree, and Nonlinear Differential Equations.* Lecture Notes in Mathematics, vol.568. Berlin, New York: Springer-Verlag.

Hartono, J.(1999). *Pengenalan Komputer*. Yogyakarta: ANDI Yogyakarta.

Herdiana, H., Sukasno, dan Kusmana, E. (2002). *Persamaan Differensial.* Bandung: Pustaka Setia.

Munir, R. (2001). *Algoritma dan Pemrograman dalam bahasa Pascal dan C.* Bandung: INFORMATIKA.

Nustika, S. (2004) *Penyelesaian Model Interaksi Mangsa Dengan Pemangsa Dengan Menggunakan Metode Numerik.* Karya Ilmiah. Universitas Pendidikan Indonesia.

Raharjo, B. (2005). *Teknik Pemrograman Pascal*. Bandung: INFORMATIKA.

Ratnapuri, V. (2005). *Dinamika Persamaan van der Pol dengan Eksitasi Parametrik*. Penelitian. Universitas Pendidikan Indonesia.

Tonld, A. and Ecker, H. (2000). *Investigation of Parameter-and Self-Excited Systems-Some Computational Aspects.* Makalah pada Colloquoium Dynamics of Machines 2000. Institute of Thermodynamics ASCR, Prague.

Verhults, F. (1991). *Nonlinear Differential Equation and Dynamical System.* Second edition. Berlin: Springer-Verlag.

Yan, J. dan Wang, G. (2000). *On Existence of Periodic Solutions of the Rayleigh Equation of Retarded Type.* International Journal of Mathematics and Mathematics Science [Online], Vol. 23 , No. 1, hal 65-68. Tersedia: http://www.hindawi.com/GetArticle.aspx?doi=10.1155/s0161171200001836&e=CTA [19 July, 2006]

LAMPIRAN 1

ALGORITMA PROGRAM vdPEkspar

Program vdPEkspar

kamus
<u>const</u> stop=1E-8
m: <u>integer</u>
h,S,,b,c,d,e,w,f1,f2,f3,f4,g1,g2,g3,g4:<u>real</u>
t,y,z : array [0..3000] of <u>real</u>

algoritma
{memasukkan nilai-nilai yang diperlukan untuk diproses}
1. <u>Input</u> (m) {integer}
2. <u>Input</u> (t[0],h,S,,b,c,d,e,y[0],z[0],w) {real}

{nilai-nilai yang diinput diproses}
3. ah ← h/2
4. untuk j ← 0 sampai m-1 ulangi langkah 5 sampai 17
5. f1 ← z[j]
6. g1 ← (b*S*(1-(y[j]*y[j]))*z[j])-((1-c*S)*y[j])+(d*S*y[j]*y[j]*y[j])
   +(e*S*cos(w*t[j]/(180/pi))*y[j])
7. f2 ← z[j]+(ah*g1)
8. g2 ← (b*S*(1-((y[j]+(ah*f1))*(y[j]+(ah*f1))))*(z[j]+(ah*g1)))
   -((1-c*S)*(y[j]+(ah*f1)))+(d*S*(y[j]+(ah*f1))*(y[j]+(ah*f1))*(y[j]+(ah*f1)))
   +(e*S*cos((w*(t[j]+ah))/(180/pi))*(y[j]+(ah*f1)))
9. f3 ← z[j]+(ah*g2)
10. g3 ← (b*S*(1-((y[j]+(ah*f2))*(y[j]+(ah*f2))))*(z[j]+(ah*g2)))
   -((1-c*S)*(y[j]+(ah*f2)))+(d*S*(y[j]+(ah*f2))*(y[j]+(ah*f2))*(y[j]+(ah*f2)))
   +(e*S*cos((w*(t[j]+ah))/(180/pi))*(y[j]+(ah*f2)))
11. f4 ← z[j]+(h*g3)
12. g4 ← (b*S*(1-((y[j]+(h*f3))*(y[j]+(h*f3))))*(z[j]+(h*g3)))
   -((1-c*S)*(y[j]+(h*f3)))+(d*S*(y[j]+(h*f3))*(y[j]+(h*f3))*(y[j]+(h*f3)))
   +(e*S*cos((w*(t[j]+h))/(180/pi))*(y[j]+(h*f3)))
13. t[j+1] ← t[j]+h
14. y[j+1] ← y[j]+((h/6)*(f1+(2*f2)+(2*f3)+f4))
15. z[j+1] ← z[j]+((h/6)*(g1+(2*g2)+(2*g3)+g4))

{kondisi ketika iterasi dihentikan}
16. jika (abs((y[j+1]-y[j])/y[j+1])<=stop) atau (abs((z[j+1]-z[j])/z[j+1])<=stop) maka
17. program berhenti

{menampilkan nilai-nilai hasil iterasi}
19. <u>Output</u> (t[j],y[j],z[j]) {real}

LAMPIRAN 2

LISTING PROGRAM vdPEkspar

```
Program vdPEkspar;
Uses  crt;
label 10,11,12;
const stop=1E-8;
var t,y,z:array[0..3000] of real;
   j,m,hasil:integer;
   lagi:char;
   ah,f1,f2,f3,f4,g1,g2,g3,g4,S,w,b,c,d,e,h:real;
begin
10:  clrscr;
    {header}
    gotoxy(22,1);writeln('Program Metode Rungge Kutta Orde-4');
    gotoxy(1,2);
writeln('==============================================================
=============');
    gotoxy(30,3);writeln('Masalahnya adalah');
    gotoxy(12,4);writeln('dy/dt = z');
    gotoxy(12,5);writeln('dz/dt = b*S*(1 - y*y)*z -(1-c*S)*y + d*S*y*y*y + e*S*cos(w*t)*y');

writeln('==============================================================
=============');
    {memasukkan nilai-nilai yang diketahui}
    {memasukkan nilai to}
    repeat
         {$I-}
         gotoxy(1,7);write('to='); readln(t[0]);
         {$I+}
         hasil := IOresult;
         if hasil <>0 then
            gotoxy(4,7);clreol;
    until hasil =0;
    {memasukkan nilai m}
    repeat
         {$I-}
         gotoxy(1,8);write('jumlah sub interval (m)=');readln(m);
         {$I+}
         hasil := IOresult;
         if hasil <>0 then
         gotoxy(25,8);clreol;
    until hasil =0;
    {memasukkan nilai epsilon}
    repeat
         {$I-}
         gotoxy(1,9);write('epsilon=S='); readln(S);
         {$I+}
         hasil := IOresult;
         if hasil <>0 then
         gotoxy(11,9);clreol;
    until hasil =0;
    {memasukkan nilai step size h}
```

```
repeat
    {$I-}
    gotoxy(1,10);write('step size h='); readln(h);
    {$I+}
    hasil := IOresult;
    if hasil <>0 then
    gotoxy(13,10);clreol;
until hasil =0;
{memasukkan nilai konstanta beta b}
repeat
    {$I-}
    gotoxy(1,11);write('koefisien b='); readln(b);
    {$I+}
    hasil := IOresult;
    if hasil <>0 then
    gotoxy(13,11);clreol;
until hasil =0;
{memasukkan nilai konstanta c}
repeat
    {$I-}
    gotoxy(1,12);write('koefisien c='); readln(c);
    {$I+}
    hasil := IOresult;
    if hasil <>0 then
    gotoxy(13,12);clreol;
until hasil =0;
{memasukkan nilai konstanta suku nonlinear d}
repeat
    {$I-}
    gotoxy(1,13);write('koefisien d='); readln(d);
    {$I+}
    hasil := IOresult;
    if hasil <>0 then
    gotoxy(13,13);clreol;
until hasil =0;
{memasukkan nilai konstanta eksitasi parametrik e}
repeat
    {$I-}
    gotoxy(1,14);write('koefisien e='); readln(e);
    {$I+}
    hasil := IOresult;
    if hasil <>0 then
    gotoxy(13,14);clreol;
until hasil =0;
{memasukkan nilai awal yo}
repeat
    {$I-}
    gotoxy(1,15);write('nilai awal(yo)='); readln(y[0]);
    {$I+}
    hasil := IOresult;
    if hasil <>0 then
    gotoxy(16,15);clreol;
until hasil =0;
{memasukkan nilai awal zo}
repeat
```

```
          {$I-}
          gotoxy(1,16);write('nilai awal(zo)='); readln(z[0]);
          {$I+}
          hasil := IOresult;
          if hasil <>0 then
          gotoxy(16,16);clreol;
     until hasil =0;
     {memasukkan nilai w}
     repeat
          {$I-}
          gotoxy(1,17);write('masukkan nilai w='); readln(w);
          {$I+}
          hasil := IOresult;
          if hasil <>0 then
          gotoxy(18,17);clreol;
     until hasil =0;

{nilai-nilai yang diinput diproses}
     ah:=h/2;
     for j:=0 to m-1 do
     begin
       f1 := z[j];
       g1 := (b*S*(1-(y[j]*y[j]))*z[j])-((1-c*S)*y[j])+(d*S*y[j]*y[j]*y[j])
+(e*S*cos(w*t[j]/(180/pi))*y[j]);
       f2 := z[j]+(ah*g1);
       g2 := (b*S*(1-((y[j]+(ah*f1))*(y[j]+(ah*f1))))*(z[j]+(ah*g1)))
-((1-c*S)*(y[j]+(ah*f1)))+(d*S*(y[j]+(ah*f1))*(y[j]+(ah*f1))*(y[j]+(ah*f1)))
+(e*S*cos((w*(t[j]+ah))/(180/pi))*(y[j]+(ah*f1)));
       f3 := z[j]+(ah*g2);
       g3 := (b*S*(1-((y[j]+(ah*f2))*(y[j]+(ah*f2))))*(z[j]+(ah*g2)))
-((1-c*S)*(y[j]+(ah*f2)))+(d*S*(y[j]+(ah*f2))*(y[j]+(ah*f2))*(y[j]+(ah*f2)))
+(e*S*cos((w*(t[j]+ah))/(180/pi))*(y[j]+(ah*f2)));
       f4 := z[j]+(h*g3);
       g4 := (b*S*(1-((y[j]+(h*f3))*(y[j]+(h*f3))))*(z[j]+(h*g3)))
-((1-c*S)*(y[j]+(h*f3)))+(d*S*(y[j]+(h*f3))*(y[j]+(h*f3))*(y[j]+(h*f3)))
+(e*S*cos((w*(t[j]+h))/(180/pi))*(y[j]+(h*f3)));
       t[j+1]:=t[j]+h;
       y[j+1]:=y[j]+((h/6)*(f1+(2*f2)+(2*f3)+f4));
       z[j+1]:=z[j]+((h/6)*(g1+(2*g2)+(2*g3)+g4));
{kondisi ketika iterasi dihentikan}
         if (abs((y[j+1]-y[j])/y[j+1])<=stop)or(abs((z[j+1]-z[j])/z[j+1])<=stop) then
          goto 11;
       end;
       {mencetak nilai j, t[j], y[j], z[j]}
11:    writeln;
       writeln('Berikut ini hasil iterasinya');writeln;
       writeln('=========================================');
       writeln ('j    t[j]     y[j]        z[j]');
       writeln('=========================================');
       for j:=0 to m do
       begin
          write (j,'    ',t[j]:2:2,'    ',y[j]:7:7,'     ',z[j]:7:7,'   ');
          readln;
       end;
     {kembali ke awal proses}
```

```
12:  writeln;
     gotoxy(57,23);write('Ulang proses ? (Y/T)'); readln(lagi);
     if (lagi='Y')or(lagi='y') then goto 10
       else
           if (lagi='T')or (lagi='t') then exit
              else goto 12;readln;
end.
```