Ringkasan Materi Kuliah

METODE-METODE DASAR PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa) fungsi yang takdiketahui. Meskipun persamaan seperti itu harusnya disebut “persamaan turunan”, namu istilah “persamaan diferensial” (*aequatio differentialis)* yang diperkenalkan oleh Leibniz dalam tahun 1676 sudah umum digunakan. Sebagai contoh,

$$y' + xy = 3 \tag{1}$$

$$y'' + 5y' + 6y = \cos x \tag{2}$$

$$y'' = (1 + y'^2)(x^2 + y^2) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{4}$$

adalah persamaan-persamaan diferensial. Dalam pers. (1) – (3) fungsi yang takdiketahui dinyatakan dengan y dan dianggap sebagai fungsi satu peubah bebas x, yaitu $y = y\ (x)$. Argumen x dalam $y\ (x)$ (dan turunan-turunannya) biasanya dihilangkan untuk penyederhanaan notasi. Lambang y' dan y'' dalam Pers. (1) – (3) berturut-turut menyatakan turunan pertama dan kedua dari fungsi $y\ (x)$ terhadap x. Dalam Pers. (4) fungsi yang takdiketahui u dianggap sebagai fungsi dua peubah bebas t dan x, yaitu $u = u\ (t,x)$, $\partial^2 u/\partial t^2$ dan $\partial^2 u/\partial x^2$ berturut-turut adalah turunan parsial kedua dari fungsi $u\ (t,x)$ terhadap t dan x. Persamaan (4) memuat turunan-turunan parsial dan disebut *persamaan diferensial parsial*. Persamaan-persamaan (1) – (3) memuat turunan biasa dan disebut *persamaan diferensial biasa*.

Di dalam buku ini kita lebih mengutamakan mempelajari persamaan diferensial biasa.

Definisi 1

Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (5)$$

Dimana $y, y', ..., y^{(n)}$ *semua ditentukan nilainya oleh x*

Peubah bebas *x* terletak dalam suatu selang *I* (*I* boleh berhingga atau tak terhingga), fungsi *F* diberikan, dan fungsi *y* = *y* (*x*) takdiketahui. Pada umumnya fungsi *F* dan *y* akan bernilai real. Jadi, Pers. (10) adalah suatu persamaan diferensial biasa orde 1 dan Pers. (2) dan (3) adalah persamaan diferensial orde 2.

Definisi 2

Suatu penyelesaian persamaan diferensial biasa (5) adalah suatu fungsi y (x) yang ditentukan pada suatu selang bagian J $\subset$ *I yang secara identik memenuhi Pers. (5) pada seluruh selang J.*

Jelaslah, setiap penyelesaian *y* (*x*) dari Pers. (5) mempunyai sifat-sifat berikut :

1. *y* harus mempunyai turunan paling sedikit sampai dengan turunan ke *n* dalam selang *J*.
2. Untuk setiap *x* di dalam *J* titik $(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))$ akan terletak di dalam daerah definisi (asal) fungsi *F*, yaitu *F* akan ditentukan pada titik ini.
3. $y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))$ untuk setiap *x* di dalam *J*.

Sebagai gambaran kita perhatikan bahwa fungsi $y(x) = e^x$ adalah suatu penyelesaian persamaan diferensial biasa orde dua $y'' - y = 0$. Nyatakanlah bahwa,

$$y''(x) - y(x) = (e^x)'' - e^x = e^x - e^x = 0.$$

Jelaslah, e^x untuk *x* dalam selang real $(-\infty, +\infty)$ adalah suatu penyelesaian dari $y'' - y = 0$. Sebagai contoh lain, fungsi *y* (*x*) = *cos x* adalah suatu penyelesaian dari $y'' + y = 0$ di seluruh selang $(-\infty, +\infty)$. Memang benar.

$$y''(x) = y(x) = (\cos x)'' + \cos x = -\cos x + \cos x = 0.$$

Dalam tiap-tiap contoh, penyelesaian itu berlaku sepanjang garis real $(-\infty, +\infty)$. Sebaliknya $y = \sqrt{x}$ adalah suatu penyelesaian persamaan diferensial biasa orde satu y' = ½ y yang berlaku hanya dalam selang $(0, +\infty)$ dan $y = \sqrt{x(1-x)}$ adalah suatu penyelesaian persamaan diferensial biasa orde satu $y' = (1-2x)/2y$ yang berlaku hanya dalam selang (0, 1).

Seperti telah kita ketahui, $y = e^x$ adalah suatu penyelesaian persamaan diferensial biasa $y'' - y = 0$. Kita lihat lebih lanjut bahwa $y = e^{-x}$ juga suatu penyelesaian dan selain itu $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ adalah suatu penyelesaian persamaan ini untuk sebarang nilai konstanta c_1 dan c_2. Akan diperlihatkan di Bab 2 bahwa $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ adalah "penyelesaian umum" persamaan diferensial biasa $y'' - y = 0$. Yang dimaksud dengan penyelesaian umum adalah penyelesaian yang yang bersifat bahwa setiap penyelesaian dari $y'' - y = 0$ dapat diperoleh dari fungsi $c_1e^x + c_2e^{-x}$ untuk nilai-nilai tertentu konstanta c_1 dan c_2. Dalam bab 2 juga akan diperlihatkan, bahwa penyelesaian umum persamaan diferensial biasa $y'' + y = 0$ berbentuk $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, untuk sebarang nilai konstanta c_1 dan c_2.

Dalam bab ini kami sajikan metode-metode dasar untuk mencari penyelesaian beberapa persamaan diferensial biasa orde satu, yaitu, persamaan yang berbentuk

$$y' = F(x, y) \tag{6}$$

dan beberapa penerapannya yang menarik.

Diferensial fungsi $y = y\ (x)$ menurut definisi adalah $dy = y'\,dx$. Dengan ketentuan ini, persamaan diferensial (6) kadang-kadang akan ditulis dalam bentuk diferensial $dy = F(x, y)\,dx$ atau dalam bentuk padanan aljabar. Sebagai contoh, persamaan diferensial

$$y' = \frac{3x^2}{x^3 + 1}(y + 1)$$

dapat ditulis dalam bentuk

$$dy = \left[\frac{3x^2}{x^3+1}(y+1) \right] dx \text{ atau } y' - \frac{3x^2}{x^3+1} y = \frac{3x^2}{x^3+1}$$

Ada beberapa tipe persamaan diferensial biasa orde satu yang penyelesaiannya dapat dicari secara eksplisit atau implisit dengan pengintegralan. Dari semua tipe persamaan diferensial biasa orde satu yang mudah diselesaikan, dua perlu mendapat perhatian : *persamaan diferensial peubah terpisah*, yaitu, persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$y' = \frac{P(x)}{Q(y)} \text{ atau } P(x)\,dx = Q(y)\,dy,$$

dan *persamaan linear*, yaitu, persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$y' + a(x)\,y = b(x).$$

Keduanya sering muncul dalam penerapan, dan banyak tipe-tipe persamaan diferensial lain yang dapat direduksi/menjadi salah satu dari kedua tipe ini, dengan menggunakan pemetaan sederhana.

Teorema 1

Perhatikan MNA :

$$y' = F(x, y),\; y(x_0) = y_0$$

Misalkan fungsi-fungsi F dan $\frac{\partial F}{\partial y}$ *kontinu di dalam daerah persegi panjang*

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} |x - x_0| \le A \\ |y - y_0| \le B \end{array} \right\},\; A > 0,\; B > 0$$

Yang melingkungi titik (x_0, y_0)*, maka ada bilangan positif* $h \le A$ *demikian sehingga MNA mempunyai satu dan hanya satu penyelesaian dalam selang* $|x - x_0| \le h$.

Jadi, dalam notasi definisi 1 dari bagian 1.1

$$I = \{x : |x - x_0| \le A\} \text{ dan } J = \{x : |x - x_o| \le h\}$$

Beberapa contoh berikut melukiskan penggunaan teorema di atas.

Contoh 1 Buktikan bahwa MNA

$$y' = x^2 + y^2 \tag{3}$$

$$y(0) = 0 \tag{4}$$

mempunyai penyelesaian tunggal dalam selang $-h \le x \le h.$

Bukti Disini $F(x, y) = x^2 + y^2$ dan $\partial F/\partial y = 2y$ kontinu di dalam persefi panjang yang melingkungi (0,0). Menurut teorema 1, ada bilangan positif h demikian sehingga MNA 93) – (4) mempunyai penyelesaian tunggal di dalam selang $|x - 0| \le h atau - h\ atau - h \le x \le h.$

Contoh 2 Jika koefisien-koefisien a (*xi) dan b* (x) dari persamaan diferensial

$$y' = a(x)y = b(x) \tag{5}$$

Kontinu di suatu selang buka I, buktikan bahwa Pers. 95) mempunyai tunggal melalui sebarang titik (x_0, y_0) dimana $x_0 \in I$.

Penyelesaian Pilih suatu bilangan A demikian sehingga $|x - x_0| \le A$ terletak pada selang I, maka $F(x, y) = b(x) - a(x)y\ dan\ F_y(x, y) = -a(x)$ kontinu di

Menurut Teorema 1,Pers. (5) mempunyai penyelesaian tunggal yang mempunyai syarat awal $y\ (x_0) = y_0$.

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} |x - x_0| \le A \\ -\infty < y < +\infty \end{array} \right\}$$

dengan perkataan lain, melalui titik (x_0, y_0), untuk sebarang bilangan real y_0.

2. Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

Suatu persamaan diferensial linear orde satu adalah suatu persamaan yang berbentuk

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Kita selalu memisalkan bahwa koefisien-koefisien $a_1(x), a_0(x)$ dan fungsi $f(x)$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu pada satu selang I dan bahwa koefisien

$a_1(x) \neq 0$ untuk semua x di dalam I. Jika kita bagi kedua ruas oleh $a_1(x)$ dan menetapkan $a(x) = a_0(x)/a_1(x)$ dan $b(x) = f(x)/a_1(x)$ kita peroleh persamaan diferensial yang sepadan.

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{1}$$

Dimana $a(x)$ dan $b(x)$ fungsi-fungsi x yang kontinu pada selang I. Penyelesaian umum Pers. (1) dapat dicari secara eksplisit dengan memperhatikan bahwa peubahan peubah

$$w = ye^{\int a(x)dx} \tag{2}$$

Memetakan Pers. (1) ke dalam persamaan diferensial terpisah. Jadi, (dengan mengingat $(d/dx)\left[\int a(x)dx\right] = a(x)$),

$$w' = y'e^{\int a(x)dx} + ya(x)e^{\int a(x)dx}$$

$$= [y' + a(x)y]e^{\int a(x)dx}$$

$$= b(x)e^{\int a(x)dx}$$

Ini adalah persamaan diferensial terpisah dengan penyelesaian umum

$$w(x) = c + \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$$

$$\Rightarrow ye^{\int a(x)dx} = c + \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int a(x)dx}\left[c + \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx\right].$$

Kita sarikan hasil kita dalam suatu teorema.

Teorema 1

Jika a(x) dan b(x) adalah fungsi-fungsi kontinu pada selang I, maka penyelesaian umum persamaan diferensial

$$y' + a(x)y = b(x)$$

akan berbentuk

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left[c + \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx\right]. \tag{4}$$

3. Persamaan Diferensial Eksak

Suatu persamaan diferensial dengan bentuk

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

Disebut persamaan diferensial *eksak*, jika ada suatu fungsi $f\,(x,y)$ yang diferensial totalnya sama dengan $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$, (dengan meniadakan lambang x dan y)

$$df = M\,dx + N\,dy. \qquad (2)$$

(Ingat kembali bahwa diferensial total f adalah $df = f_x dx + f_y dy$, asalkan turunan-turunan parsial f menurut x dan y ada).

Jika Persamaan (1) eksak, maka karena (2) dan (1), persamaan ini sepadan dengan

$$Df = 0.$$

Jadi, fungsi $f\,(x,y)$ adalah konstan dan penyelesaian umum Persamaan (1) diberikan oleh

$$f\,(x,y) = c. \qquad (3)$$

sebagai contoh, persamaan diferensial

$$(2x - y)\,dx + (-x + 4y)\,dy = 0 \qquad (4)$$

Adalah eksak, sebab

$$d(x^2 - xy + 2y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - xy + 2y^2)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - xy + 2y^2)\,dy$$

$$= (2x - y)\,dx + (-x + 4y)\,dy.$$

Jadi penyelesaian umum Persamaan (4) berbentuk (secara implisit)

$$x^2 - xy + 2y^2 = c. \qquad (5)$$

Berikut ini ada dua pertanyaan di benak kita.

Pertanyaan 1 Adakah suatu cara sistematik untuk memeriksa apakah persamaan diferensial (1) eksak ?

Pertanyaan 2 Jika kita tahu bahwa persamaan diferensial (1) eksak, apakah ada suatu cara sistematik untuk menyelesaikannya ?

Jawab 1 Persamaan diferensial (1) adalah eksak jika hanya jika

$$M_y = N_x. \qquad (6)$$

Yaitu, jika turunan parsial *M* menurut y sama dengan tutunan parsial *N* menurut *x*, maka Persamaan (1) adalah eksak; sebaliknya, jika Persamaan (1) ekask, maka (6) berlaku.

Jawab 2 Pilih sebarang titik (x_0, y_0) pada daerah dimana fungsi-fungsi *M*, *N* dan turunan-turunan parsialnya M_y dan N_x kontinu, maka

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy=c \qquad (7)$$

Menghasilkan (secara implisit) penyelesaian umum persamaan diferensial (1).

Untuk memastikan jawab di atas, cukup kita buktkan bahwa

$M_y = N_x$ berarti bahwa $df = Mdx + Ndy,$

Di mana f adalah jumlah kedua integral dalam (7) dan sebaliknya jika Persamaan (1) eksak, maka (6) berlaku. Jelas dari Persamaan (7) kita dapatkan

$$f_x = M(x,y_0)+\int_{y_0}^{y} N_x(x,y)\,dy = M(x,y_0)+\int_{y_0}^{y} M_y(x,y)\,dy$$

$$= M(x,y_0)+M(x,y)\Big|_{y_0}^{y} = M(x,y)$$

dan dengan cara serupa $f_y = N(x,y)$. Karena itu, $df = f_x dx + f_y dy = Mdx + Ndy,$ yang membuktikan bagian "jika" dari jawab 1. Untuk membuktikan kebalikannya, perhatikan bahwa, karena Persamaan (1) eksak, maka ada suatu fungsi f sedemikian sehingga $df = Mdx + Ndy \Rightarrow f_y = N \Rightarrow f_{xy} = M_y$ dan $f_{xy} = N_x$, dan karena $f_{yx} = f_{xy}$, kita dapatkan $M_y = N_x$.

Catatan 1 Titik (x_0,y_0) dalam Persamaan (7) dapat dipilih secara bijaksana dengan maksud menyederhakan $M(x_0,y_0)$ dalam integral pertama dari (7) dan perhitungan kedua integral itu pada batas bawah pengintegralan.

Catatan 2 Bentuk Persamaan (7) yang tepat adalah

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(t,y_0)\,dt+\int_{y_0}^{y} N(x,s)\,ds=c, \qquad (7`)$$

dan pemisalannya harus dibuat sehngga segmen (x_0,y_0) ke (x,y_0) dan dari (x,y_0) ke (x,y) terletak pada daerah keujudan dan kekontinuan fungsi-fungsi M, N, dan M_y, N_x.

Catatan 3 Seperti terlihat, Persamaan (7) berguna untuk menentukan keujudan fungsi f dan juga untuk membuktikan keeksakan, yaitu, Persamaan (6). Kadang-kadang siswa mendapatkan adanya titik (x_0,y_0) yang "sebarang" dan pilihan nilai-nilai x_0 dan y_0 secara bijaksana, ini membingungkan. Berikut ini ada pilihan metode yang sistematik untuk menentukan f yang diberikan dalam contoh 3 dan 4.

Contoh 1 Selesaikan persamaan diferensial

$$\left(3x^2+4xy^2\right)dx+\left(2y-3y^2+4x^2y\right)dy=0.$$

Penyelesaian Disini

$$M(x,y)=3x^2+4xy^2 \;\; dan \;\; N(x,y)=2y-3y^2+4x^2y$$

$$\Rightarrow M_y=8xy \;\; dan \;\; N_x=8xy$$

$$\Rightarrow M_y=N_x.$$

Jadi, persamaan diferensial itu adalah eksak dan dari Persamaan (7) dengan (x_0,y_0) = (0,0) penyelesaian umum diberikan secara implisit oleh

$$\int_0^x 3x^2dx+\int_0^y\left(2y-3y^2+4x^2y\right)dy=c.$$

$$\Rightarrow x^3+y^2-y^3+2x^2y^2=c.$$

Contoh 2 Selesaikan MNA

$$\left[\cos x\ln(2y-8)+\frac{1}{x}\right]dx+\frac{\sin x}{y-4}dy=0 \qquad (8)$$

$$y(0)=\frac{9}{2}. \qquad (0)$$

Penyelesaian Di sini

$$M(x,y)=\cos x\ln(2y-8)+\frac{1}{x} \;\; dan \;\; N(x,y)=\frac{\sin x}{y-4}$$

$$M_y=\cos x\frac{2}{2y-8}=\frac{\cos x}{y-4} \qquad dan \;\; N_x=\frac{\cos x}{y-4}$$

$$\Rightarrow M_y = N_x.$$

Jadi, persamaan diferensial ini eksask dan dari Persamaan (7) penyelesaian diberikan oleh

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} \left[\cos x \ln(y_0 - 8) + \frac{1}{x} \right] dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\sin x}{y - 4} dy = c,$$

Di mana x_0 sebarang bilangan $\neq 0$ dan y_0 ? 4. Kita ambil pilihan $x_0 = 1$ dan $y_0 = \frac{9}{2}$ secara bijaksana, maka

$$f(x, y) = \ln x + \sin x \ln(y - 4) + \sin x \ln 2 = c.$$

Dengan menggunakan syarat awal (9), kita dapatkan bahwa c = o. Jadi, penyelesaian MNA diberikan secara implisit oleh

$$\ln x + \sin x \ln 2(y - 4) = 0.$$

Dengan menyelesaikan y, kita dapatkan

$$y = 4 + \tfrac{1}{2} e^{-\ln x / \sin x}$$

Catatan 4 Dalam persamaan diferensial di atas, selang terbesar untuk keujudan penyelesaian yang melalui $(1, \tfrac{9}{2})$ adalah $(0, \pi)$ (menurut teorema keujudan dan ketunggalan, Teorema 1 dari Bagian 1.2), dan dengan demikian kita misalkan bahwa $x > 0$.

Catatan 5 Kadang-kadang lebih mudah menyelesaikan persamaan diferensial eksak dengan mengelompokkan suku-suku menjadi dua kelompok suku-suku – satu kelompok suku-suku dari bentuk $p(x)dk$ dan $q(y)dy$ dan lainnya adalah suku-suku sisanya – dan mengetahui bahwa masing-masing kelompok (menurut kenyataan) adalah suatu diferensial total dari suatu fungsi.

Contoh 3 Selesaikan persamaan diferensial

$$(3x^2 + 4xy^2)dx + (2y - 3y^2 + 4x^2 y)dy = 0.$$

Penyelesaian Dari contoh 1 kita tahu bahwa persamaan ini adalah eksak. Dengan mengelompokkan suku-sukunya sesuai dengan Catatan 5, kita peroleh

$$\left[3x^2 dx + (2y - 3y^2)dy\right] + (4xy^2 dx + 4x^2 dy) = 0$$

$$\Rightarrow d\left(x^3 + y^2 - y^3\right) + d\left(2x^2y^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow d\left(x^3 + y^2 - y^3\right) + d\left(2x^2y^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + y^2 - y^3 + 2x^2y^2 = c.$$

Contoh 4 Selesaikan persamaan dferensial

$$\left(3x^2 + 4xy^2\right)dx + \left(2y - 3y^2 + 4x^2y\right)dy = 0.$$

Penyelesaian Dari contoh 1 kita tahu bahwa persamaan diferensial ini adalah eksak, dan karena itu ada suatu fungsi sedemikian sehingga $f_x = M$ dan $f_y = N$. Perhatikan

$$f_x = M = 3x^2 + 4xy^2.$$

Dengan mengintegralkan menurut x, kita peroleh

$$f = x^3 + 2x^2y^2 + h(y).$$

Dengan membuat ini sama dengan $N\left(N = 2y - 3y^2 + 4x^2y\right)$ kita dapatkan

$$h'(y) = 2y - 3y^2 \Rightarrow h(y) = y^2 - y^3.$$

Jadi,

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y^2 + y^2 - y^3 = c.$$

Perlu dicatat bahwa penyelesaian untuk $h(y)$ tanpa konstanta pengintegralan yang biasanya muncul. Pelenyapan ini dimungkinkan karena sebenarnya konstanta ini sudah tergabung dengan konstanta c pada waktu membuat $f = c$.

Sebagai pilihan pembuatan penyelesaian, kita dapat melakukan pengintegralan pernyataan $f_y = N$ menurut y. Dalam hal ini konstanta pengintegralannya adalah fungsi x, katakan $g(x)$ dan $g(x)$ akan ditentukan dengan membuat $f_x = M$.

4. Persamaan Homogen

Suatu persamaan diferensial homogen adalah suatu persamaan dari bentuk

$$y' = \frac{g(x, y)}{h(x, y)} \qquad (1)$$

di mana fungsi *g* dan *h* adalah fungsi-fungsi homogen dengan derajat yang sama. Ingat kembali bahwa suatu fungsi $g(x,y)$ disebut *homogen berderajat n* jika $g(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n g(x, y)$. Sebagai contoh, fungsi-fungsi

$$x/y, \sin x/y, x-y, x+y+\sqrt{x^2+y^2}, x^2+\sqrt{x^4+y^4}, x^3+y^3+xy^2$$

adalah homogen. Berturut-turut dengan derajat nol, 1, 1, 2, dan 3. Berikut ini adalah contoh-contoh persamaan diferensial homogen:

$$y' = \frac{x-y}{x+y}, \qquad y' = \frac{x^2+y^2}{x^2+3xy-y^2}, \qquad y' = \sin\frac{x}{y},$$

$$y' = \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{x-\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial (1), ambil $y = wx$ dan amatilah bahwa substitusi ini mereduksi Persamaan (1) menjadi persamaan diferensial terpisah. Nyatalah,

$$(wx)' = \frac{g(x, wx)}{h(x, wx)} \Rightarrow w'x + w = \frac{x^n g(1, w)}{x^n h(1, w)},$$

di mana *n* adalah derajat fungsi homogen *g* dan *h*. Jadi,

$$w'x = \frac{g(1, w)}{h(1, w)} - w,$$

yang dapat dengan mudah dikenali sebagai suatu persamaan diferensial terpisah.

Contoh 1 Selesaikan persamaan diferensial

$$y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2} \tag{2}$$

Penyelesaian Di sini $g(x, y) = x^3 + y^3$ dan $h(x, y) = xy^2$ adalah homogen berderajat 3. [$\log(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x)^3 + (\alpha y)^3 = \alpha^3 (x^3 + y^3) = \alpha^3 g(x, y)$ dan $h(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x)(\alpha y)^2 = \alpha^3 xy^2 = \alpha^3 h(x, y)$.] Jadi, persamaan (2) adalah suatu persamaan diferensial homogen. Ambil $y = wx$, maka dari persamaan (2)

$$(wx)' = \frac{x^3 + w^3x^3}{xw^2x^2} \Rightarrow w'x + w = \frac{1+w^3}{w^2} = \frac{1}{w^2} + w$$

$$\Rightarrow w'x = \frac{1}{w^2} \Rightarrow w^2 dw = \frac{1}{x} dx \text{ (terpisah)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} w^3 = \ln|x| + c \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{y^3}{x^3} = \ln|x| + c.$$

Jadi,

$$y = x\left(3\ln|x| + c\right)^{1/3}.$$

Contoh 2 Selesaikan MNA

$$\left(x^2 + y^2\right) dx + 2xy\ dy = 0 \qquad (3)$$

$$y(1) = -1 \qquad (4)$$

penyelesaian Persamaan diferensial (3) dapat ditulis dalam bentuk

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, \qquad (5)$$

yang jelas homogen. Pembaca dapat memeriksa bahwa syarat-syarat teorema keujudan. Teorema 1 Bagian 1.2, dipenuhi oleh MNA (3) – (4). Juga, kita sedang mencari suatu penyelesaian melalui titik (1,-1), dan dengan demikian pembagian oleh $2xy$ dalam persamaan (5) dapat dilakukan sebuah persegi persegi panjang kecil yang melingkupi titik (1, -1). Ambil $y = wx$ dalam persamaan (5), kita peroleh

$$\left(wx\right)' = \frac{x^2 + w^2x^2}{2xwx} \Rightarrow w'x + w = -\frac{1+w^2}{2w} \Rightarrow w'x = -\frac{1+3w^2}{2w}$$

$$\Rightarrow \frac{2w}{1+3w^2} dw + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\ln\left(1+3w^2\right) + \ln|\ln| = c.$$

$$\Rightarrow \ln\left[\left(1+3w^2\right)|x|^3\right] = c \Rightarrow \left(1+3\frac{y^2}{x^2}\right)x^3 = c.$$

Dari syarat awal (4), kita dapatkan bahwa $c = 4$

$$\Rightarrow \left(1+3\frac{y^2}{x^2}\right)x^3 = 4 \Rightarrow y^2 = \frac{4-x^3}{3x} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{4-x^3}{3x}}.$$

Jelaslah, salah satu tanda itu tidak berlaku. Dalam contoh ini yang benar adalah tanda yang negatif, karena $y(1) = -1$. Jadi penyelesaiannya berbentuk

$$y = -\sqrt{\frac{4 - x^3}{3x}}.$$

5. Persamaan Diferensial yang Tereduksi ke Orde Satu

Dalam bagian ini kita mempelajari tipe persamaan diferensial biasa orde lebih tinggi yang dapat direduksi menjadi persamaan orde satu dengan menggunakan pemetaan sederhana.

A. Persamaan berbentuk

$$y^{(n)} = F(x, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

yang hanya memuat dua turunan yang berurutan $y^{(n)}$ dan $y^{(n-1)}$ dapat direduksi menjadi persamaan orde satu dengan menggunakan pemetaan

$$w = y^{(n-1)}. \tag{2}$$

Nyatalah, dengan menurunkan kedua ruas Persamaan (2) menurut x, kita dapatkan $w' = y^{(n)}$, dan dengan menggunakan (1) kita peroleh

$$w' = F(x, w).$$

Contoh 1 Cari penyelesaian umum persamaan diferensial

$$y''' - \frac{1}{x} y'' = 0. \tag{3}$$

Penyelesaian Ambil $w = y''$, persamaan (3) menjadi

$$w' = \frac{1}{x} w = 0. \tag{4}$$

Persamaan (4) adalah terpisah)dan linear) dengan penyelesaian umum

$$w(x) = c_1 x.$$

Jadi, $y'' = c_1 x$. Dengan mengintegralkan menurut x, kita peroleh $y' = \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2$. Pengintegralan berikutnya menghasilkan $y' = \frac{1}{6} c_1 x^3 + c_2 x + c_3$. Karena c_1 konstanta sebarang, penyelesaian umum persamaan (3) menjadi

$$y(x) = c_1 x^3 + c_2 x + c_3. \tag{5}$$

Catatan 1 Penyelesaian umum suatu persamaan diferensial biasa orde *n* memuat *n* konstanta sebarang. Sebagai contoh, Persamaan (3) berorde 3, dan seperti telah kita lihat, penyelesaian umum (5) memuat tiga konstanta sebarang c_1, c_2, dan c_3.

6. Persamaan diferensial orde dua yang berbentuk

$$y'' = F(y, y') \tag{6}$$

(tidak memuat *x*) dapat direduksi menjadi orde satu dengan menggunakan pemetaan

$$w = y' \tag{7}$$

Nyatalah, dari (7) kita peroleh (dengan menggunakan aturan rantai)

$$y'' = \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy}.\frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dy}w.$$

Jadi, Persamaan (6) menjadi

$$w\frac{dw}{dy} = F(y, w)$$

yang berorde satu dengan peubah bebas *y* dan fungsi yakdiketahui *w*. Kadang-kadang persamaan terakhir ini dapat diselesaikan dengan salah satu metode terdahulu.

Contoh 2 Selesaikan MNA

$$y'' = (y' + y) \tag{8}$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = -1.$$

Penyelesaian Di sini persamaan diferensial (8) tidak memuat *x* dan karena itu dapat direduksi menjadi persamaan diferensial orde satu dengan menggunakan pemetaan $w = y'$. Nyatalah, Pers. (8) menjadi

$$\frac{dw}{dy} - w = y, \tag{9}$$

yang linear. Dengan mengalikan kedua ruas (9) dengan e^{-y} kita peroleh (d/dy) ($we^{-y)}$. Dengan mengintegralkan menurut y, kita dapatkan $we^{-y} = -ye^{-y} - e^{-y} + c_1$, dan dengan demikian

$$y'(x) = w = -y - 1 + c_1 e^{y}.$$

Dengan menggunakan syarat awal, kita dapatkan bahwa $c_1 = 0$. Jadi,

$$y' = y - 1$$

dan $y(x) = -1 + ce^{-x}$. Dengan menggunakan syarat awal, kita dapatkan $c = 1$, dan penyelesaian umum Persamaan (8) berbentuk

$$y(x) = -1 + e^{-x}.$$

Sumber Bacaan:

Santoso, Widiarti. (1998). *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern edisi 2*. Jakarta: Erlangga