Ringkasan Materi Kuliah

PEMETAAN LAPLACE

1. Pendahuluan

Disini kita sajikan metode lain untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear dengan koefisien konstanta.. Metode ini disebut metode pemetaan Laplace. Oleh metode ini suatu masalah nilai awal dipetakan ke suatu persamaan aljabar yang dapat diselesaikan dengan metode aljabar dan suatu tabel pemetaan Laplace.

Pemetaan Laplace dan Sifat-sifatnya

Andaikan fungsi g terdefinisi untuk $0 \le t < \infty$, terbatas dan terintegralkan di dalam setiap selang terhingga $0 \le t \le b$, maka menurut definisi

$$\int_0^\infty g(t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b g(t)dt.$$

Kita katakan bahwa *integral takwajar* di ruas kiri konvergen atau divergen sesuai dengan ada atau tidak adanya limit di ruas kanan. Sebagai contoh $\int_0^\infty e^{-3t}dt$ konvergen tetapi $\int_0^\infty e^{3t}dt$ divergen. Jelaslah,

$$\int_0^\infty e^{-3t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-3t}dt = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\Big|_0^b\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3b} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

tetapi

$$\int_0^\infty e^{3t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{3t}dt = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^b\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3}e^{3b} + \frac{1}{3}\right) = \infty.$$

Definisi 1

Misalkan bahwa fungsi f terdefinisi untuk $0 \le t < \infty$*. Pemetaan Laplace dari f, yang kita nyatakan dengan F atau* $\mathscr{L}[f]$*, didefinisikan oleh integral takwajar*

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt, \tag{1}$$

asalkan integral (1) ujud setiap s lebih besar atau sama dengan suatu nilai s_0*.*

Contoh 1

Hitung pemetaan Laplace dari $f(t) - 1$.

Penyelesaian

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty} - \left[\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^b\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-bs}}{s}\right].$$

Jika $s > 0$, limit di atas ujud dan kita peroleh

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Contoh 2

Hitung pemetaan Laplace dari $f(t) = e^{2t}$

Penyelesaian

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{2t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-2)t}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-2)t}\,dt = \lim_{b\to\infty} - \left[\frac{e^{-(s-2)t}}{s-2}\Big|_0^b\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{s-2} - \frac{e^{-(s-2)b}}{s-2}\right].$$

Limit ini ujud hanya jika $s > 2$. Karena itu,

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \frac{1}{s-2}, \quad s > 2.$$

Dalam contoh 1 dan 2 kita lihat bahwa pemetaan Lapalace merupakan fungsi dari *s*. Kita ambil *f* sebagai *balikan pemeraan Laplace dari F*. Untuk maksud cara penulisan bagi balikan pemetaan Laplace, kita perkenalkan lambang pengganti $\mathscr{L}$ [$f(t)$] =$F(s)$. Kita tuliskan juga $f(t)$= $\mathscr{L}^{-1}$ [$f(s)$]. Dari contoh 1 dan 2 kita lihat bahwa

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1 \text{ dan } \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]=e^{2t}.$$

Kita catat bahwa untuk suatu *f* yang diberikan, *F* yang berkaitan ditentykan secara tunggal (bila ini ada). Akan kita tuliskan Teorema 1, mengenai balikan pemetaan Laplace, tetapi sebelumnya akan kita berikan definisi berikut.

Definis 2

Suatu fungsi f dikatakan kontinu bagian demi bagian pada suatu selang I, jika I dapat dibagi menjadi jumlah berhingga selang-selang bagian, di dalam selang-selang bagian itu f kontunu dan mempunyai limit kiri dan kanan yang berhingga.

Definisi 3

Suatu fungsi f dikatakan berorde eksponensial α jika t menuju takberhingga ada bilangan M, α, dan T sehingga

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \text{ bila } t \geq T.$$

Atau, *f* dikatakan berorde eksponensial α jika ada suatu α demikian sehingga $\lim_{t\to\alpha}|f(t)|/e^{\alpha t} = L,$ dimana L = 0 dan L suatu bilangan positif berhingga.

Sekarang kita berikan suatu teorema yang menjamin kekonvergenan integral (1) tanpa bukti.

Teorema 1

Jika f kontinu bagian demi bagian pada setiap selang berhingga di dalam $(0,\infty)$, *dan jika f berorde eksponensial α dan t menuju takberhingga, integral 91) konvergen untuk s > α. Selanjutnya, jika f dan g adalah fungsi-fungsi kontinu bagian demi bagian yang pemetaan Laplace-nya ujud dan memenuhi* $\mathscr{L}$ [$f(t)$] =

$\mathscr{L}[g(t)]$, *maka f = g pada ttik-titik di mana f dan g kontinu. Jadi, F(s) mempunyai balikan yang kontinu, maka f adalah tunggal.*

Teorema berikut memberikan kepada kita alat-alat yang berguna untuk menghitung pemetaan Laplace. Bukti teorema pertama merupakan akibat sederhana dari definisi dan karena itu akan dihilangkan (lihat Latihan 60). Lambang-lambang c_1, c_2, dan k dalam teorema-teorema berikut ini menyatakan konstanta sebarang.

Teorema 2

$$\mathscr{L}\left[c_1 f(t) + c_2 g(t)\right] = c_1 F(s) + c_2 G(s)$$

Teorema 3

Jika $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, maka $F(s+k) = \mathscr{L}[e^{-kt} f(t)]$.

Contoh 3

Cari (a) $\mathscr{L}[t^2]$

Penyelesaian

(a) $\mathscr{L}[t^2] = \int_0^\infty t^2 e^{-st}\,dt = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^2 e^{-st}}{-s}\right] + \frac{2}{s}\int_0^\infty t e^{-st}\,dt$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^2 e^{-st}}{-s}\right] + \frac{2}{s}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{t e^{-st}}{s}\right] + \frac{2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\,dt$$

Jika $s > 0$, maka kedua limit di atas sama dengan nol seperti dapat dibuktikan dengan menggunakan aturan 1 hospital. Jadi,

$\mathscr{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$, $s > 0$.

Contoh 4

Cari $\mathscr{L}[e^{-t}t^2]$.

Penyelesaian Karena $\mathscr{L}[t^2] = \frac{2!}{S^3}$, menurut Teorema 3, kita perlu

$$\mathscr{L}[e^{-t}t^2] = \frac{2}{(s+7)^3}.$$

Tabel

	$F(s)$	$f(t)$
(i)	$\frac{1}{s},\ s>0$	1
(ii)	$\frac{1}{s^2},\ s>0$	t
(iii)	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$	t^n, n = 1, 2, 3, ...
(iv)	$\frac{1}{s-k},\ s>k$	e^{kt}
(v)	$\frac{n!}{(s-k)^{n-1}},\ s>k$	$e^{kt}\ t^n$, n = 1, 2, 3, ...
(vi)	$\frac{k}{s^2+k^2}, s>0$	sin kt
(vii)	$\frac{s}{s^2+k^2}, s>0$	cos kt
(viii)	$\frac{m}{(s-k)^2+m^2}, s>k$	$e^{kt}\sin mt$
(ix)	$\frac{s-k}{(s-k)^2+m^2}, s>k$	$e^{kt}\cos mt$
(x)	$\frac{s}{s^2+k^2}, s>k$	cosh kt
(xi)	$\frac{k}{s^2+k^2}, s>k$	sinh kt
(xii)	$\frac{k_1-k_2}{(s-k_1)(s-k_2)}, s>k_1,k_2$	$e^{k_1t}-e^{k_2t}$
(xiii)	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}, s>0$	t sin kt
(xiv)	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}, s>0$	t cos kt
(xv)	$c_1F(s)+c_2G(s)$	$c_1f(t)+c_2g(t)$

(xvi)	$F(s+k)$	$e^{-kt} f(t)$
(xvii)	$F(ks)$	$\frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right), k > 0$
(xviii)	$F^{(n)}(s)$	$(-t)^n f(t)$
(xix)	$G(s)F(s)$	$\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$
(xx)	$\frac{1}{s}F(s)$	$\int_0^t f(t)dt$
(xxi)	$\frac{1}{s^2}F(s)$	$\int_0^t \int_0^\tau f(u)du\ d\tau$
(xxii)	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0)$ $- s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$	$f^{(n)}(t)$

.

Contoh 6 Buktikan bahwa

$$\mathscr{L}\left[e^{k_1 t} - e^{k_1 t}\right] = \frac{k_1 - k_2}{(s-k_1)(s-k_2)}$$

Penyelesaian Dengan menggunakan rumus (XV) dari Tabel 4.1, kita dapatkan

$$\mathscr{L}\left[e^{k_1 t} - e^{k_1 t}\right] = \mathscr{L}\left[e^{k_1 t}\right] - \mathscr{L}\left[e^{k_1 t}\right].$$

Kemudian kita gunakan (IV) untuk memperoleh

$$\mathscr{L}\left[e^{k_1 t} - e^{k_1 t}\right] = \frac{1}{s-k_1} - \frac{1}{s-k_2} = \frac{s-k_2-(s-k_1)}{(s-k_1)(s-k_2)} = \frac{k_1-k_2}{(s-k_1)(s-k_2)}$$

Contoh 7 Buktikan bahwa

$$\mathscr{L}[t \sin kt] = \frac{2ks}{(s^2-k^2)^2}.$$

Penyelesaian Dari rumus (VI) kita tahu bahwa

$$\mathscr{L}[t \sin kt] = \frac{k}{s^2+k^2}. \qquad (3)s$$

Gunakan rumus (XVIII) pada Persamaan (3) dengan $n = 1$:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right) = \mathscr{L}[-t\sin kt] = - \mathscr{L}[-t\sin kt].$$

Jadi,

$$-\frac{k(2s)}{\left(s^2+k^2\right)^2} = -\mathscr{L}[-t\sin kt]$$

$$\Rightarrow \frac{k(2s)}{\left(s^2+k^2\right)^2} = \mathscr{L}[-t\sin kt]$$

Contoh 8.Tentukan $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5s^2+6s+4}{(s+4)\left(s^2+4\right)}\right]$

Penyelesaian Dengan menggunakan dekomposisi pecahan bagian (lihat Apendiks B), kita punyai

$$\frac{5s^2+6s+4}{(s+4)\left(s^2+4\right)} = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+4}+\frac{2s-2}{s^2+4}\right].$$

$$= 3\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+4}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]$$

$$= 3\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] + 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]$$

$$= 3e^{-4t} + 2\cos 2t - \sin 2t.$$

Teorema 5

Jika f(t) suatu fungsi periodik dengan periode T, maka

$$\mathscr{L}\,[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

4.3 Penerapan Pemetaan Laplace pada Persamaan Diferensial

Teorema 1

$$\mathscr{L}\,[f'(t)] = sF(s) - f(0).$$

jadi

$$\mathscr{L}\,[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)dt.$$

Ambil $u = e^{-st}, dv = f'(t)dt$, maka $du = -se^{-st}dt$, dan $v = f(t)$. Jadi, dengan pengintegralan parsial

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right] = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f'(t)\left(-se^{-st}dt\right)$$

$$= -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$
$$= sF(s) - f(0).$$

Dalam suku batas, $e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty$, karena f berorde eksponensial, maka $\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0.$

Teorema 2

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Contoh 1

Selesaikan masalah nilai awal

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0. \tag{2}$$

Penyelesaian

Dengan mengambil pemetaan Laplace dari Persamaan (1), kita dapatkan

$$\mathscr{L}\left[\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y\right] = \mathscr{L}\left[0\right]$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left[\ddot{y}\right] - 3\,\mathscr{L}\left[\dot{y}\right] + 2\,\mathscr{L}\left[y\right] = 0$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = 0.$$

Ingat bahwa kita gunakan $Y(s)$ untuk menyatakan $\mathscr{L}\left[y(t)\right]$. Dengan mensubstitusikan nilai awal (2), kita dapatkan

$$s^2Y(s) - s(1) - 0 - 3\left(sY(s) - 1\right) + 2Y(s) = 0$$
$$s^2Y(s) - s - 3sY(s) + 3 + 2Y(s) = 0$$
$$\left(s^2 - 3s + 2\right)Y(s) = s - 3$$
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s-3}{s^2 - 3s + 2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2 - 3s + 2}\right].$$

Jadi, kita telah menyelesaikan MNA itu jika kita dapat menentukan balikan pemetaan Laplace yang tertera di atas. Barangkali ada beberapa cara untuk yang terakhir ini, tetapi yang paling mudah ialah dengan menggunakan penguraian beberapa pecahan bagian. Kita lakukan sebagai berikut (lihat Apendiks B) :

$$\frac{s-3}{s^2-3s+2}=\frac{s-3}{(s-2)(s-1)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-1}.$$

Sekarang,

$$A=\frac{s-3}{s-1}\Big|_{s=2}=-1 \text{ dan } B=\frac{s-3}{s-2}\Big|_{s=1}=2.$$

Jadi,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-2)(s-1)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s-2}+\frac{2}{s-1}\right]=-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]+2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

$$=-e^{2t}+2e^{t}.$$

Karena itu, penyelesaian MNA (1) – (2) adalah

$$y(t)=2e^{t}-e^{2t}.$$

Contoh 2 Selesaikan MNA

$$\ddot{y}-5\dot{y}+6y=te^{2t}+e^{3t}$$
$$y(0)=0,\ \dot{y}(0)=1.$$

Penyelesaian

$$\mathcal{L}[\ddot{y}-5\dot{y}+6y]=\mathcal{L}[te^{2t}+e^{3t}]$$

$$\Rightarrow\mathcal{L}[\ddot{y}]-5\mathcal{L}[\dot{y}]+6\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[te^{2t}]+\mathcal{L}[e^{3t}]$$

$$\Rightarrow s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)-5[sY(s)-y(0)]+6Y(s)=\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{1}{s-3}$$

$$(s^2-5s+6)Y(s)-1=\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{1}{s-3}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s^2-5S+6)(s-2)^2}+\frac{1}{(s^2-5S+6)(s-3)}+\frac{1}{s^2-5s+6}$$

$$=\frac{1}{(s-2)^3(s-3)}+\frac{1}{(s-2)(s-3)^2}+\frac{1}{(s-2)(s-3)}$$

$$\Rightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^3(s-3)}+\frac{1}{(s-2)(s-3)^2}+\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^3(s-3)}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-3)^2}\right]$$

$$+ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right].$$

Sekarang,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3-2}{(s-2)(s-3)}\right] = e^{3t} - e^{2t}.$$

Juga, dengan menggunakan dekomposisi pecahan parsial (lihat Apendiks B),

$$\frac{1}{(s-2)^3(s-3)} = \frac{A}{(s-2)^3} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s-3}$$

dan

$$\frac{1}{(s-2)(s-3)^2} = \frac{E}{s-2} + \frac{F}{s-3} + \frac{G}{(s-3)^2}.$$

Kita peroleh,

$$A = \frac{1}{s-3}\Big|_{s=2} = -1, \qquad D = \frac{1}{(s-2)^3}\Big|_{s=3} = 1$$

$$E = \frac{1}{(s-3)^2}\Big|_{s=2} = 1, \qquad G = \frac{1}{s-2}\Big|_{s=3} = 1$$

dan

$$C + D = 0 \Rightarrow C = -D = -1$$

$$-3A + 6B - 12C - 8D = 1 \Rightarrow B = \frac{1 + 12C + 8D + 3A}{6} = -1,$$

$$E + F = 0 \Rightarrow F = -E = -1.$$

Karena itu,

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s-2)^3}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s-2)^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s-2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s-3}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s-3}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2}\right] + e^{3t} - e^{2t}$$

$$= \frac{-e^{2t}t^2}{2!} + (-1)e^{2t}t + (-1)e^{2t} + e^{3t} + e^{2t} - e^{3t} + e^{3t}t + e^{3t} - e^{2t}$$

$$= e^{2t}\left(-\frac{t^2}{2} - t - 1\right) + e^{3t}(t+1).$$

Contoh berikut menggambarkan bahwa metode pemetaan Laplace masih tetap dapat digunakan meskipun nilai awalnya pada sebuah tirik lain dari $t = 0$.

Contoh 3

Selesaikan MNA

$$\dot{y} + 3y = 0 \tag{3}$$

$$y(3) = 1. \tag{4}$$

Penyelesaian

Kita ingat bahwa mula-mula MNA itu dapat dipecahkan dengan membuat perubahan dari peubah $\tau = t - 3$, jadi kita memperoleh masalah yang sepadan dengan nilai awal yang diberikan pada $\tau = 0$. Tetapi, kita juga dapat mengerjakan secara langsung sebagai berikut,

$$\mathcal{L}[\dot{y} + 3y] = \mathcal{L}[0]$$

$$\Rightarrow sY(s) - y(0) + 3Y(s) = 0$$

$$(s+3)Y(s) = y(0)$$

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s+3}$$

$$\Rightarrow y(t) = y(0)e^{-3t}$$

$$y(3) = 1 \Rightarrow 1 = y(0)e^{-3(3)} \Rightarrow y(0) = e^9$$

$$y(t) = e^9 e^{-3t} = e^{9-3t}.$$

Contoh 4 Selesaikan MNA

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + 4x_2 \tag{5}$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 \tag{6}$$

$$x_1(0) = -1,\ x_2(0) = 3. \tag{7}$$

Penyelesaian Dengan mengambil pemetaan Laplace untuk Persamaan (5), kita dapatkan

$$sX_1(s) - x_1(0) = -3X_1(s) + 4X_2(s). \tag{8}$$

Dengan mengambil pemetaan Laplace dari Persamaan (6) kita dapatkan

$$sX_2(s) - x_2(0) = -2X_1(s) + 3X_2(s). \tag{9}$$

Dengan menggunakan syarat awal (7), kita dapat menuliskan kembali Persamaan (8) dan (9) sebagai berikut :

$$(s+3)X_1(s) - 4X_2(s) = -1 \tag{10}$$

$$2X_1(s) + (s - 3X_2(s) = 3.$$

Sistem (9) merupakan sistem linear untuk $X_1(s), X_2(s)$. Penyelesaian menghasilkan

$$X_1(s) = \frac{-s+15}{s^2-1} = -\frac{s}{s^2-1} + \frac{15}{s^2-1}$$

$$X_2(s) = \frac{s+11}{s^2-1} = 3\frac{s}{s^2-1} + \frac{11}{s^2-1}.$$

Jadi,

$$x_1(t) = -\cosh t + 15\sinh t$$

$$x_2(t) = -3\cosh t + 11\sinh t,$$

atau

$$x_1(t) = 7e^t - 8e^t$$

$$x_2(t) = 7e^t - 4e^{-t}.$$

Sumber Bacaan:

Santoso, Widiarti. (1998). *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern edisi 2*. Jakarta: Erlangga