Ringkasan Materi Kuliah

PENYELESAIAN DERET UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE-DUA

1. Pendahuluan

Disini akan kita bicarakan suatu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier orde-dua dengan koefisien peubah dengan menggunakan deret tak berhingga. Cara ini disebut metode *penyelesaian dengan deret*. Di sini kita pusatkan perhatian kita pada deret sebagai penyelesaian persamaan diferensial linear orde-dua dengan koefisien peubah..

Persamaan diferensial linear orde-dua sering muncul dalam matematika terapan, terutama dalam proses penyelesaian beberapa persamaan diferensial parsial yang kuno dalam fisika matematika.

2. Tinjauan Mengenai Deret Kuasa

Suatu deret dengan bentuk

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$$

Disebut *deret kuasa* dalam bentuk kuasa dari $(x - x_0)$ dan dinyatakan oleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad (1)$$

Bilangan-bilangan $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ disebut *koefisien* dari deret kuasa itu, dan titik x_0 disebut *pusat* dari deret kuasa itu. Kita katakan juga bahwa (1) merupakan deret kuasa *di sekitar titik* x_0.

Kita katakan bahwa suatu deret kuasa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *konvergen* pada sebuah titik tertentu x_1, jika ada. Dalam hal ini nilai limit itu disebut *jumlah* deret pada titik x_1. Jika limit ini tidak ada, deret tersebut dikatakan *divergen* pada titik x_1.

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n\left(x_1 - x_0\right)^n$$

Jika diketahui deret (1), maka penting untuk mencari semua titik *x* yang mengakibatkan deret itu konvergen. Untuk mencari ini kita hitung *jari-jari kekonvergenan* dari deret kuasa itu. Istilah ini dinyatakan oleh *R* dan diberikan oleh rumus

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{2}$$

atau

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n + 1}\right| \tag{3}$$

Asalkan limit dalam (2) dan (3) ada.

Jika *R* = 0, deret (1) hanya konvergen pada pusatnya, $x = x_0$. Jika $R = +\infty$, deret (1) konvergen untuk semua *x*. Akhirnya, jika $0 < x < \infty$ deret konvergen di dalam selang $|x - x_0| < R$, yaitu untuk

$$-R + x_0 < x < R + x_0 \tag{4}$$

Dapat divergen untuk $|x - x_0| > R$. Selang (4), atau seluruh garis real jika $R = \infty$, disebut *selang kekonvergenan* dari deret (1).

Contoh 1

Tentukan selang kekonvergenan dari tiap-tiap deret kuasa berikut :

$$(a)\sum_{n-1}^{\infty} n^n x^n \qquad (b)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n \qquad (c)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Penyelesaian

(a) Di sini $a_n = n^n$ dan dari rumus (2),

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = 0$$

Jadi deret (a) konvergen hanya untuk *x* = 0 dan divergen untuk nilai *x* lainnya.

(b) Di sini $a_n = (-1)^n$ dan dari rumus (2)

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n\right|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} 1} = 1$$

Jadi, deret (b) konvergen untuk semua x di dalam selang $|x-1| < 1$ yaitu, $-1 < x - 1 < 1$ atau $0 < x < 2$. Deret itu divergen $|x-1| > 1,$ yaitu $x < 0$ atau $x > 2$. Untuk $|x-1| = 1,$ yaitu, untuk x = 0 atau x = 2, kita dapat melihat langsung bahwa deret itu menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\pm 1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n,$$

Dan keduaderet itu divergen.

(c) Disini $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Akan lebih tepat bila kita gunakan rumus (3) .

Jadi,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1/n!}{1/(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Jadi, deret konvergen untuk semua x.

Jika R merupakan jari-jari kekonvergenan dari kuasa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, maka untuk setiap x di dalam selang kekonvergenan $|x - x_0| < R$, jumlah deret itu ada dan menentukan sebuah fungsi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{untuk} \; |x - x_0| < R \qquad (5)$$

Fungsi $f(x)$ yang ditentukan oleh deret kuasa (5) kontinu dan mempunyai turunan dari semua orde. Selanjutnya, turunan $f'(x), f''(x), \ldots$ dari fungsi $f(x)$ dapat dicari dengan menurunkan deret (5) suku demi suku. Jadi,

$$f'(x) = \sum_{n-1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n-2}^{\infty} (n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}$$

Dan seterusnya. Akhirnya, deret-deret untuk $f'(x), f''(x),...$ ini mempunyai jari-jari kekonvergenan R yang sama dengan jari-jari kekonvergenan deret (5) yang semula.

Dalam proses pencarian penyelesaian deret kuasa persamaan diferensial, sebagai tambahan dari pengambilan turunan deret kuasa, kita dapat menambahkan, mengurangkan, mengalikan, dan menyamakan dua atau lebih deret kuasa. Operasi ini dilakukan dalam cara yang mirip dengan operasi dengan polinom. Batasan tambahan untuk deret kuasa ialah bahwa semua operasi itu dilakukan di dama selang kekonvergenan yang berlaku untuk semua deret. Sebagai contoh,

(a) $$\sum_{n-0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{n-0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n-0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n$$

(b) $$\sum_{n-0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n - \sum_{n-0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n-0}^{\infty} (a_n - b_n)(x - x_0)^n$$

(c) $$a(x - x_0)^k \sum_{n-0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n-0}^{\infty} a a_n (x - x_0)^{n+k}$$

(d) Jika $$\sum_{n-0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n-0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

Untuk semua x di dalam selang $|x - x_0| < R$, maka

$a_n = b_n$ untuk n = 0, 1, 2, ...

Kita dapat merubah indek dari suatu deret tanpa merubah jumlah deret tersebut.:

$$\sum_{n-0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n-k}^{\infty} a_{n-k} (x - x_0)^{n-k} , \qquad (6)$$

Yang belaku untuk setiap bilangan k. Cara termudah untuk membuktikan (6) ialah menuliskan kedua deret itu suku demi suku.

Suatu fungsi *f* dikatakan *analitik* pada titik x_0, jika fungsi ini dapat ditulis sebagai suatu deret kuasa

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (7)$$

Dengan suatu jari-jari kekonvergenan yang positif.

Di dalam selang kekonvergenannya, deret kuasa (7) dapat diturunkan suku demi suku. Dengan menghitung *f*(*x*), *f'(x), f("(x)*, ... pada titik x_0 kita peroleh $f(x_0)=a_0$, $f'(x_0)=a_1$, $f''(x_0)=2a_2$, ... dan secara umum

$$f^{(n)}(x_0)=n!a_n \qquad \text{untuk } n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Jadi,

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

dan deret kuasa (7) menjadi *uraian deret Taylor*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (8)$$

Dari fungsi *f* dan x_0. Jadi, suatu fungsi *f* pada sebuah titik x_0, jika uraian fungsi itu menjadi deret Taylor (8) di sekitar titik x_0 ada dan mempunyai jari-jari kekonvergenan yang positif.

Sebagai contoh,

fungsi $3x^2-7x+6$ analitik pada setiap titik,

sedang fungsi $\dfrac{x^2-5x+7}{x(x^2-9)}$

analitik pada setiap titik, kecuali pada titik *x* = 0, 3 dan -3. Juga, fungsi e^x, sin *x*, dan cos *x* analitik pada setiap titik, seperti pada kita lihat uraian deret Taylor fungsi-fungsi itu.

5.3 Titik Biasa dan Titik Singular

Perhatikan suatu persamaan diferensial orde dua dengan koefisien peubah dari bentuk

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (1)$$

Di dalam bagian berikut kita akan mencari deret sebagai penyelesaian persamaan diferensial (1) dalam kuasa dari $(x - x_0)$ dimana x_0 suatu bilangan riil. Akan kita lihat bahwa bentuk penyelesaian akan sangat tergantung pada macam titik x_0 terhadap persamaan diferensial tersebut. Sebuah titik x_0 dapat merupakan titik biasa atau titik singular, menurut definisi berikut.

Definisi 1

Sebuah titik x_0 *disebut titik biasa dari persamaan diferensial* (1) *jika kedua fungsi*

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ dan } \frac{a_0(x)}{a_2(x)} \qquad (2)$$

Analitik pada titik x_0. *Jika paling sedikit satu fungsi dari* (2) *tidak analitik pada titik* x_0, *maka* x_0 *disebut sebuah titik singular dari persamaan diferensial* (1).

Sebagian besar persamaan diferensial dari bentuk (1) yang muncul dalam penerapan, mempunyai koefisien-koefisien $a_2(x), a_1(x)$, dan $a_0(x)$, berbentuk polinom. Sesudah menghapuskan faktor bersama (sekutu), fungsi rasional $a_1(x)/a_2(x)$ dan $a_0(x)/a_2(x)$ analitik pada setiap titik kecuali pada titik yang menghilangkan penyebut. Titik-titik yang menghilangkan penyebut adalah titik-titik singular dari persamaan diferensial itu, dan semua bilangan riil lainnya adalah titik biasa.

Dengan mengacu ke persamaan diferensial yang disebut dalam Bagian 5.1 lihat Tabel 5.1, yang memberikan titik-titik biasa dan singular pada garis riil berhingga.

Dalam hubungan dengan teori mengenai penyelesaian deret adalah penting untuk mengelompokkan titik singular dari suatu persamaan diferensial ke dalam dua katagori menurut definisi berikut.

Definisi 2

Sebuah titik x_0 *disebut titik singular yang regular dari persamaan diferensial* (1) *jika titik ini adalah sebuah titik singular /jika paling sedikit satu fungsi dalam* (2) *tidak analitik pada* x_0 */ dan kedua fungsi*

$$(x - x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ dan } (x - x_0)^2 \frac{a_0(x)}{a_2(x)} \qquad (3)$$

Analitik pada titik x_0. *Jika paling sedikit satu fungsi dalam* (3) *tidak analitik pada* x_0, *maka* x_0 *disebut titik singular tak regular dari persamaan diferensial* (1).

Dalam Latihan 9 sampai dengan 15 siswa diminta membuktikan bahwa semua titik singular dalam Tabel 5.1 adalah titik singular yang regular.

Contoh 1 Carilah titik-titik biasa, titik-titik singular yang regular, titik-titik singular takregular dari persamaan diferensial.

$$(x^4 - x^2)y'' + (2x+1)y' + x^2(x+1)y = 0 \qquad (4)$$

Persamaan diferensial	Titik biasa	Titik singular
Airy	Semua titik	Tidak ada
Bessel	Semua titik kecuali $x_0 = 0$	0
Chebyshev	Semua titik kecuali $x_0 = \pm 1$	± 1
Gauss		0,1
Hermite	Semua titik kecuali $x_0 = 0,1$	Tidak ada
Laguerre	Semua titik	0
Legendre	Semua titik kecuali $x_0 = 0$	± 1

	Semua titik kecuali $x_0 = \pm 1$	

Tabel 5.1

Penyelesaian di sini

$$a_2(x) = x^4 - x^2, \qquad a_1(x) = 2x+1,\ a_0(x) = x^2(x+1),$$

dan dengan demikian

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \frac{2x+1}{x^4-x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x-1)(x+1)}, \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \frac{x^2(x+1)}{x^4-x^2} = \frac{1}{x-1} \qquad (5)$$

Dari (5) terlihat bahwa setiap bilangan riil, kecuali 0,1 dan -1 adalah titik biasa dari persamaan diferensial (4). Untuk melihat mana dari titik singular 0,1 dan -1 yang merupakan titik singular yang regular dan mana yang singular takregular dari persamaan diferensial (4), kita perlu memeriksa kedua fungsi dalam (3).

Untuk x_0 = 0, kedua fungsi dalam (3) menjadi

$$x\frac{2x+1}{x^4-x^2} = \frac{2x+1}{x(x-1)(x+1)} \text{ dan } x^2\frac{x^2(x+1)}{x^4-x^2} = \frac{x^2}{x-1}$$

Pernyataan pertama dari (5) tidak analitik pada x = 0, jadi kita simpulkan bahwa titik x_0 = 0, adalah sebuah titik singular takregular untuk persamaan diferensial (4). Untuk x_0 = 1, kedua fungsi dalam (3) menjadi

$$(x-1)\frac{2x+1}{x^4-x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)} \text{ dan } (x-1)^2\frac{x^2(x+1)}{x^4-x^2} = x-1$$

Karena kedua pernyataan ini analitik pada x = 1, kita simpulkan bahwa titik x_0 = 1 adalah sebuah titik singular yang regular untuk persamaan diferensial (4). Akhirnya, untuk x_0 = -1, kedua fungsi dalam (3) menjadi

$$(x+1)\frac{2x+1}{x^4-x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)} \text{ dan } (x+1)^2\frac{x^2(x+1)}{x^4-x^2} = \frac{(x+1)^2}{x-1}$$

Dan karena kedua fungsi itu analitik pada x = -1 (penyebut tidak nol pada x = -1), kita simpulkan bahwa titik x_0 = -1 adalah sebuah titik singular yang regular untuk persamaan diferensial itu.

Dalam bagian-bagian selanjutnya kita bermaksud mendapatkan deret sebagai penyelesaian di sekitar titik biasa dan di dekat titik singular yang regular. Kajian mengenai penyelesaian di dekat titik singular takregular ada di luar jangkauan kita.

Latihan

Tentukan titik-titik singular yang regular, dan titik-titik singular takregular dari persamaan diferensial dalam Latihan 1 sampai 3.

1. $xy'' - (2x+1)y' + y = 0$
2. $y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$
3. $(1-x)y'' - y' + xy = 0$
4. $2x^2 y'' + (x - x^2)y' - y = 0$
5. $(x-1)^2 y'' - (x^2 - x)y' + y = 0$
6. $x^2 y'' - (x+2)y = 0$
7. $x^3(1-x^2)y'' + (2x-3)y' + xy = 0$
8. $(x-1)^4 y'' - xy = 0$

Buktikan bahwa semua titik-titik singular dari persamaan diferensial dalam Latihan 9 sampai dengan 15 merupakan titik-titik singular yang regular.

9. $y'' - xy = 0$ (persamaan Airy)
10. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ (persamaan Bessel)
11. $(1-x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0$ (persamaan Chebyshev)
12. $x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$ ((persamaan Hipergeometrik dari Gauss)
13. $y'' - 2xy' + 2py = 0$ (persamaan Hermite)
14. $xy'' + (1-x)y' + py = 0$ (persamaan Lagurre)
15. $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ (persamaan Legendre)

Jawablah benar atau salah dalam Latihan 16 sampai dengan 21

16. Titik $x_0 = -1$ merupakan titik singular yang regular untuk persamaan diferensial $(1-x^2)y'' - 2xy + 12y = 0$

17. Titik $x_0 = 0$ merupakan titik biasa untuk persamaan diferensial $xy'' + (1-x)y' + 2y = 0$

18. Titik $x_0 = 0$ merupakan titik singular untuk persamaan diferensial $(1+x)y'' - 2y' + xy = 0$

19. Titik $x_0 = 0$ merupakan titik singular tak regular untuk persamaan diferensial $x^3y'' - (x+1)y = 0$

20. Titik $x_0 = 3$ merupakan titik biasa untuk persamaan diferensial $(x+3)y'' + xy' - y = 0$

21. Titik $x_0 = -3$ merupakan titik singular untuk persamaan diferensial $(x+3)y'' + xy' - y = 0$

5.4 Deret Kuasa Sebagai Penyelesaian di Sekitar Titik Biasa

Dalam bagian ini kita tunjukkan bagaimana menyelesaikan sebarang persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien peubah yang berbentuk

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1}$$

Dalam suatu selang di sekitar *titik biasa* x_0. Titik x_0 biasanya diatur oleh masalah khusus yang ada, yang mensyaratkan kita untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial (1) yang memenuhi syarat awal berbentuk

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

dan

$$y'(x_0) = y_1 \tag{3}$$

Kita ingatkan kembali bahwa jika koefisien-koefisien $a_2(x), a_1(x)$, dan $a_0(x)$ berbentuk polinom-polinom dalam *x*, maka sebuah titik x_0 adalah titik biasa dari persamaan diferensial (1) bila $a_2(x_0) \neq 0$. Pada umumnya x_0 adalah titik biasa dari persamaan diferensial (1) jika fungsi-fungsi $a_1(x)/a_2(x)$ dan $a_0(x)/a_2(x)$ dapat diuraikan menjadi deret kuasa dalam bentuk

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-x_0)^n \quad \text{untuk } |x-x_0| < R_1 \tag{4}$$

dan

$$\frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x-x_0)^n \quad \text{untuk } |x-x_0| < R_2 \tag{5}$$

Dengan jari-jari keonvergenan R_1 dan R_2 yang positif. Fungsi (4) dan (5) khususnya kontinu di dalam selang $|x-x_0| < R$, dimana R bilangan terkecil diantara R_1 dan R_2, dan karena itu, menurut teorema keujudan, teorema 1 dari bagian 2.3, MNA (1) – (3) mempunyai sebuah penyelesaian tunggal di seluruh selang $|x-x_0| < R$. Tugas kita di sini ialah menghitung (atau menghampiri) penyelesaian tunggal ini. Teorema berikut menggambarkan bentuk penyelesaian MNA (1) – (3).

Teorema 1 (Penyelesaian di sekitar sebuah titik biasa)

Jika x_0 *sebuah titik biasa dari persamaan diferensial* (1), *maka penyelesaian umum persamaan diferensial itu mempunyai suatu uraian deret kuasa di sekitar* x_0

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad , \tag{6}$$

Dengan jari-jari kekonvergenan yang positif. Secara lebih tepat, jika R_1 *dan* R_2 *jari-jari kekonvergenan deret* (4) *dan* (5), *maka jari-jari kekonvergenan deret* (6) *sekurang-kurangnya sama dengan minimum dari* R_1 dan R_2. *Koefisien* a_n *untuk* n = 2, 3, ... *dari deret (6) dapat diperoleh dalam* a_0 *dan* a_1 *dengan mensubstitusikan deret (6) langsung ke dalam persamaan diferensial* (1) *dan dengan menyamakan koefisien dari suku yang berpangkat sama. Akhirnya, jika* (6) *merupakan penyelesaian MNA* (1) – (3), *maka* $a_0 = y_0$ *dan* $a_1 = y_1$.

Contoh 1 Cari penyelesaian umum persamaan diferensial

$$y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0 \qquad (7)$$

Di sekitar titik biasa x_0 = 1

Penyelesaian Menurut Teorema 1 penyelesaian umum Persamaan (7) mempunyai uraian deret kuasa di sekitar x_0 = 1

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \qquad (8)$$

Dengan jari-jari kekonvergenan positif. Untuk mencari batas bawah jari-jari kekonvergenan dari deret (8), kita memerlukan jari-jari kekonvergenan R_1 dan R_2 dari uraian fungsi

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ dan } \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

Menjadi deret kuasa.

Di sini $a_2(x) = 1, a_1(x) = -2(x-1), dan\, a_0(x) = 2.$ Jadi,

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = -2(x-1) \text{ dan } \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = 2,$$

Karena itu R_1 = R_2 = ∞. Jadi, jari-jari kekonvergenan deret (8) juga sama dengan ∞. Ini berarti, penyelesaian (8) akan konvergen untuk semua *x*. Koefisien dari deret (8) dapat dicari dengan langsung mensubstitusikan deret itu ke dalam persamaan diferensial yang diketahui. Karena (8) merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial orde dua (7), maka akan memuat dua konstanta sebarang. Jelaslah, koefisien a_0 dan a_1 akan tetap tak ditentukan, sedang konstanta a_2, a_3, ... akan dinyatakan dalam a_0 dan a_1. Dengan menurunkan (8) suku demi suku akan kita peroleh.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{n-1}$$

dan

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n (x-1)^{n-2}$$

Kita sekarang telah siap untuk mensubtitusikan *y, y',* dan *y''* ke dalam persamaan diferensial (7). Seperti dapat kita lihat dari persamaan (7), *y'* harus dikalikan oleh $-2(x-1)$ dan *y* oleh 2. Demi kemudahan pengaturan tata penulisan, kita tulis y'', $-2(x-1)y'$, dan $2y$ dari persamaan diferensial itu dalam kolom sebagai berikut.

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}$$

$$-2(x-1)y' = -2(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} = \sum_{n-1}^{\infty} -2na_n(x-1)^n$$

$$2y = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x-1)^n$$

Jumlah suku-suku di ruas kiri sama dengan nol, karena *y* merupakan penyelesaian persamaan diferensial (7). Jadi, jumlah tiga deret di ruas kanan harus sama dengan nol. Dengan menuliskan pernyataan itu dalam kolom akan sangat cekatan dalam pengolahan deret dalam proses penjumlahan. Lebih mudah menjumlahkan tiga deret suku demi suku jika suku umumnya mempunyai pangkat yang sama dan bahwa indeks *n* yang berada di bawah lambang jumlah dari ketiga deret itu sama. Dengan cara pemikiran ini, kita tuliskan kembali deret di atas dalam bentuk yang sepadan dan sesuai sebagai berikut :

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n$$

$$= 2a_2 + \sum_{n-1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n$$

$$-2(x-1)y' = \sum_{n-1}^{\infty} -2na_n(x-1)^n$$

$$2y = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x-1)^n = 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n(x-1)^n$$

Dengan menjumlahkan ruas kiri dan ruas kanan dari tiga persamaan ini, kita peroleh

$$0 = (2a_2 + 2a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+1} - 2na_n + 2a_n](x-1)^n$$

Ruas kanan dari persamaan ini merupakan deret kuasa yang identik nol. Jadi, semua koefisien harus nol. Ini berarti,

$$2a_2 + 2a_0 = 0 \qquad (9)$$

dan

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2a_n = 0 \text{ untuk } n = 1, 2, ... \qquad (10)$$

Syarat (10) disebut *rumus rekursif* sebab ini memungkinkan a_{n+2} untuk dihitung jika a_n diketahui. Dengan menggunakan persamaan (9) dan rumus rekursif (10), kita dapat menyatakan koefisien-koefisien a_2, a_3, ... dari deret kuasa itu dalam koefisien a_0 dan a_1. Jelaslah dari (9) kita dapatkan

$$a_2 = -a_0, \qquad (11)$$

dan dari (10) kita peroleh

$$a_{n+2} = \frac{2(n-1)}{(n+2)(n+1)} a_n \text{ untuk } n = 1, 2, ... \qquad (12)$$

Dari persamaan (12) kita peroleh

$$a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{2}{4.3} a_2 = -\frac{2}{4.3} a_0 = -\frac{2^2}{4!} a_0$$

$$a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{2.3}{6.5} a_4 = -\frac{2^2.3}{6.5.4.3} a_0 = -\frac{2^3.3}{6!} a_0$$

$$a_7 = 0, \quad a_8 = \frac{2.5}{8.7} a_6 = -\frac{2^3.5.3}{8.7.6.5.4.3} a_0 = -\frac{2^4.5.3.1}{8!} a_0$$

....

Jadi,

$$a_{2n+1} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

dan

$$a_{2n} = \frac{2^n.1.3.5...(2n-3)}{(2n)!} a_0, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Jadi, penyelesaian umum persamaan diferensial (7) berbentuk

$$y(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_4(x-1)^4 + a_6(x-1)^6 + ...$$

$$= a_1(x-1) + a_0\left[1-(x-1)^2 - \frac{2^2}{4!}(x-1)^4 - \frac{2^3.3}{6!}(x-1)^6 - \dots\right]$$

Catatan 1 Seperti yang kita duga, penyelesaian umum itu memuat dua konstants sebarang a_0 dan a_1. Karena itu fungsi-fungsi x-1 dan $1-(x-1)^2-(2^2/4!)(x-1)^4-\dots$ merupakan dua penyelesaian bebas linear dari persamaan (7).

Contoh 2 Selesaikan **MNA**

$$(1-x)y''-y'+xy=0 \tag{13}$$

$$y(0)=1 \tag{14}$$

$$y'(0)=1 \tag{15}$$

Penyelesaian Karena syarat awal diberikan pada titrik 0, kita tarik pada suatu penyelesaian **MNA** (13)-(15) di sekitar x_0 = 0. Satu-satunya titik singular dari persamaan diferensial (13) adalah x = 1, dan dengan demikian titik x = 0 adalah titik biasa. Jadi, **MNA** (13)-(15) mempunyai penyelesaian tunggal dalam bentuk

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{16}$$

Jika pada saat ini kita ingin mencari perkiraan bahwa jari-jari kekonvergenan deret kuasa (16), kita harus menghitung jari-jari kekonvergenan uraian deret kuasa dari fungsi-fungsi $a_1(x)/a_2(x)$ dan $a_0(x)/a_2(x)$. Perhatikan bahwa

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x|<1$$

dan

$$\frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \frac{1}{1-x} = x\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}, \qquad |x|<1$$

Jadi, deret (16) konvergen paling sedikit untuk $|x|<1$.

Dengan mensubstitusikan (16) langsung ke dalam (13) dan menyamakan koefisiennya, pembaca dapat membuktikan bahwa

$$2a_2 - a_1 = 0$$

dan

$$a_{n+1} = \frac{n^2 a_n - a_{n-2}}{(n+1)n} \quad n = 2,3,...$$

Dari syarat awal (14) kita peroleh $a_0 = 1$, dan dari (15) kita dapatkan $a_1 = 1$.

$$\Rightarrow \; a_2 = \frac{1}{2!}, a_3 = \frac{1}{3!}, ..., a_n = \frac{1}{n!}, ...$$

Jadi, penyelesaian MNA (13)=(15) berbentuk

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e^x \tag{17}$$

Menurut Teorema 1, jari-jari kekonvergenan dari penyelesaian (17) paling kecil sama dengan 1. Tetapi, jari-jari kekonvergenan itu dapat lebih besar. Jelaslah, jari-jari kekonvergenan dari penyelesaian (17) sama dengan ∞.

Catatan 2 Dalam contoh 1 dan 2 kita dapat menghitung semua koefisien a_n dari penyelesaian deret kuasa itu. Tetapi, ini adalah suatu keistimewaan sebab tidak selalu mungkin seperti itu. Tentu saja, kita selalu mempunyai rumus rekursif yang dapat kita gunakan untuk menghitung koefisien sebanyak mungkin penyelesaian deret kuasa seperti yang kita kehendaki. Pada umumnya, kita hitung koefisien a_n dari penyelesaian deret kuasa cukup untuk memperoleh suatu "hampiran yang baik" pada penyelesaian.

Contoh 3 Hitung lima koefisien pertama dari penyelesaian $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dari **MNA**

$$y'' - 2x^2 y' + 8y = 0 \tag{18}$$

$$y(0) = 0 \tag{19}$$

$$y'(0) = 1 \tag{20}$$

Penyelesaian Kita peroleh

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

dan

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

Jadi,

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n+2)a_{n+2} x^n \tag{21}$$

$$-2x^2 y' = \sum_{n=1}^{\infty} -2na_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} -2(n-1)a_{n-1} x^n \tag{22}$$

$$8y = \sum_{n=0}^{\infty} 8a_n x^n \tag{23}$$

$$0 = (2a_2 + 8a_0) + (6a_3 + 8a_1)x$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n-1)a_{n-1} + 8a_n]x^n,$$

Di mana suku-suku $(2a_2 + 8a_0)$ dan $(6a_3 + 8a_1)x$ perolehan dari deret (21) dan (23) untuk n = 0 dan n = 1. Jadi $a_2 = -4a_0, a_3 = -\frac{4}{3}a_1,$ dan

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n-1)a_{n-1} + 8a_n = 0 \text{ untuk } n = 2, 3, ... \tag{24}$$

Dari syarat awal kita peroleh $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$. Maka $a_2 = 0$ dan $a_3 = -\frac{4}{3}$. Akhirnya, dari rumus rekursif (24) kita dapatkan $12a_4 - 2a_1 + 8a_2 = 0$ untuk n = 2, dan dengan demikian $a_4 = \frac{1}{6}$. Jadi,

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ...$$

$$= x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + ...$$

Dalam contoh ini, kita dapat menghitung koefisien sebanyak yang kita inginkan, dengan menggunakan rumus rekursif. Tetapi, bentuk umum koefisien a_n untuk semua n tidak dapat dirumuskan.

Penerapan 5.4.1

Metode penyelesaian deret kuasa di sekitar titik biasa memberikan alat yang berhasil guna untuk memperoleh penyelesaian dari beberapa persamaan diferensial yang terdapat dalam penerapan.

Persamaan Legendre

- Persamaan diferensial

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+p(p+1)y=0, \tag{25}$$

Dimana p suatu konstanta, disebut *persamaan Legendre*. Penyelesaian dari persamaan (25) sangat penting dalam banyak cabang matematik terapan. Sebagai contoh, persamaan Legendre muncul dalam kajian persamaan potensial dalam koordinat bola. Jelaslah, persamaan potensial

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

Dipetakan ke koordinat bola

$$x=r\sin\theta\cos\phi, \qquad y=r\sin\theta\cos\phi, \qquad z=r\cos\theta,$$

Menjadi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}=0$$

Jika kita tertarik pada penyelesaian yang bebas dari θ berbentuk $V=r^p\theta$, dimana θ merupakan fungsi dari θ saja, kita dapatkan

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}+p(p+1)\Theta=0.$$

Dengan menggunakan penggantian peubah $x=\cos\theta$ dan mengganti θ dengan y, kita peroleh persamaan Legendre (25).

Jika p bilangan bulat tak negatif, salah satu penyelesaian dari persamaamn (25) di sekitar titik biasa x = 0 berbentuk polinom. Bila dinormalkan secara tepat (seperti yang akan kita jelaskan di bawah ini). Penyelesaian berbentuk polinom ini disebut *polinom Legendre*. Polinom Legendre banyak digunakan dalam penerapan. Sebagai contoh, polinom ini muncul dalam mekanika kuantum dalam kajian atom hidrogen.

Sekarang kita berusaha untuk memperoleh dua penyelesaian bebas linear dari persamaan Legendre di sekitar x = 0. Di sini $a_2(x) = 1 - x^2, a_1(x) = -2x$ dan $a_0(x) = p(p+1)$. Karena $a_2(0) = 1 \neq 0$, titik x = 0 merupakan titik biasa untuk persamaan diferensial (25). Bentuk tiap penyelesaian persamaan diferensial (25) di sekitar x = 0 adalah

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (26)$$

Untuk mendapatkan batas bawah dari jari-jari kekonvergenan dari penyelesaian (26), kita perlu menghitung jari-jari kekonvergenan uraian deret Taylor di sekitar nol dari fungsi-fungsi $a(x)/a(x)$ dan $a(x)/a(x)$ kita peroleh

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = -\frac{2x}{1-x^2} = -2x\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -2x^{2n+1}, \ \ x < 1$$

dan

$$\frac{a_0(x)}{a_1(x)} = \frac{p(p+1)}{1-x^2} = p(p+1)\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)x^{2n}, \ \ x < 1$$

Jadi, jari-jari kekonvergenan dari penyelesaian (26) paling tidak sama dengan 1; ini berarti, deret (26) konvergen sekurang-kurangnya untuk x < 1. Dari persamaan (26) kita dapatkan

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ \ dan \ \ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\Rightarrow\ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$-x^2 y'' = \sum_{n=2}^{\infty} -n(n-1)a_n x^n$$

$$-2xy' = \sum_{n=1}^{\infty} -2na_n x^n$$

$$p(p+1)y = \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)a_n x^n$$

$$0 = [2a_2 + p(p+1)a_0] + [6a_3 - 2a_1 + p(p+1)a_1]x$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + p(p+1)a_n]x^n$$

$$\Rightarrow\ 2a_2 + p(p+1)a_0 = 0,\ 6a_3 - 2a_1 + p(p+1)a_1 = 0$$

dan

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + p(p+1)a_n = 0,$$

n = 2, 3, ...

atau

$$a_2 = \frac{p(p+1)}{2}a_0,\ a_3 = \frac{2-p(p+1)}{6}a_1 = -\frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1$$

dan

$$a_{n+2} = \frac{n(n-1)+2n-p(p+1)}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n,$$

n = 2, 3, ... (27)

$$\Rightarrow\ a_4 = \frac{(p-2)(p+3)}{4.3}a_2 = \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}a_0,$$

dan dalam bentuk umum

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{p(p-2)\ldots(p-2n+2)(p+3)\ldots(p+2n-1)}{(2n)!}a_0,$$

n = 1, 2, ...

juga,

$$a_5 = \frac{(p-3)(p+4)}{5.4} a_3 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!} a_1,$$

dan, dalam bentuk umum

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(p-1)(p-3)\ldots(p-2n+1)(p+3)\ldots(p+2n-1)}{(2n)!} x^{2n}$$

$n = 1, 2, \ldots$ (28)

Jadi, dua penyelesaian bebas linear dari persamaan Legendre di sekitar titik 0 adalah

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n-1}^{\infty} (-1)^n . \frac{p(p-2)\ldots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\ldots(p+2n-1)}{(2n)!} x^{2n} \tag{29}$$

atau

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n-1}^{\infty} (-1)^n . \frac{p(p-1)(p-3)\ldots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\ldots(p+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \tag{30}$$

dan konvergen untuk $x < 1$.

Seperti kita lihat dari persamaan (27) dan (28), bila p sama dengan bilangan bulat tak negatif n, satu dari penyelesaian di atas merupakan sebuah polinom berderajat-n. Suatu kelipatan dari polinom penyelesaian ini yang bernilai 1 pada $x = 1$ disebut *polinom Legendre* dan dinyatakan oleh $P_n(x)$. Sebagai contoh:

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad p_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

adalah polinom-polinom Legendre.

Persamaan Airy

- Persamaan diferensial

$$y'' - xy = 0 \tag{31}$$

disebut *persamaan Airy*. Penyelesaian persamaan Airy di sekitar titik biasa $x_0 = 0$, disebut *fungsi Airy* dan penerapannya ada dalam teori difraksi. Fungsi Airy mula-

mula dipelajari oleh Airy dalam hubungannya dengan perhitungan intensitas sinar di lingkungan suatu permukaan austik.

Menurut teorema 1, setiap penyelesaian persamaan diferensial (31) di sekitar x_0 = 0, berbentuk

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{32}$$

dan konvergen untuk semua *x*. Dengan mensubstitusikan (32) ke dalam persamaan diferensial (31) dan menyamakan koefisien-koefisiennya, pembaca dapat membuktikan bahwa a_2 = 0 dan untuk *n* = 1, 2, ...

$$a_{3n} = \frac{1.4...(3n-2)}{(3n)!} a_0, \quad a_{3n+1} = \frac{2.5...(3n-1)}{(3n+1)!} a_1, \quad a_{3n+2} = 0 \tag{33}$$

Jadi, penyelesaian umum dari persamaan Airy berbentuk

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} x^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n+1} x^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n+2} x^{3n+2}$$

$$= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

dimana

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.4...(3n-2)}{(3n)!} x^{3n} \; dan \; y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.5...(3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1}$$

merupakan dua penyelesaian dari (31) yang bebas linear.

Persamaan Chebyshev

- Persamaan diferensial

$$\left(1 - x^2 y''\right) - xy' + p^2 y = 0, \tag{34}$$

Dengan *p* suatu konstanta, disebut *persamaan Chebyshev* (lafal Tschebyscheff juga digunakan). Seperti akan kita lihat, jika konstanta *p* merupakan bilangan bulat taknegatif, persamaan (34) mempunyai sebuah polinom di sekitar x_0 = 0 sebagai penyelesaian. Bila dinormalkan sevara tepat (bila koefisien utama dipilih seperti yang akan kita jelaskan), penyelesaian berbentuk polinom ini disebut *polinom Chebyshev*. Polinom Chebyshev sangat penting dalam analisis numerik. Chebyshev memperoleh polinom itu yang membawa namanya, dalam tahun 1857, saat ia mencari polinom berderajat-*n* dan koefisien utama 1 yang menyimpang paling sedikit dari nol pada selang $-1 \leq x \leq 1$.

Menurut Teorema 1 setiap penyelesaian dari persamaan diferensial (34) di sekitar titik $x_0 = 0$ berbentuk

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{35}$$

Dan konvergen untuk $x < 1$. Dengan langsung mensubstitusikan (35) ke dalam (34) dan menyamakan koefisiennya, pembaca dapat membuktikan bahwa $n = 1, 2, ...,$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{p^2(p^2-2^2)(p^2-4^2)...[p^2-(2n-2)^2]}{(2n)!} a_0, \tag{36}$$

dan

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)...[p^2-(2n-1)^2]}{(2n+1)!} a_1 \tag{37}$$

Jadi,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$

$$= a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p^2(p^2-2^2)...[p^2-(2n-2)^2]}{(2n)!} x^{2n} \right]$$

$$+ a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p^2(p^2-2^2)(p^2-3^2)...[p^2-(2n-1)^2]}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right] \tag{39}$$

Jelaslah dari persamaan (36) dan (37) bahwa bila *p* merupakan bilangan bulat taknegatif, salah satu penyelesaian itu berbentuk polinom berderajat *n*. Bila kita kalikan polinom ini oleh 2^{n-1}. Kita peroleh suatu penyelesaian berbentuk polinom yang disebut *polinom Chebyshev* dan dinyatakan oleh $T_n(x)$,. Sebagai contoh, polinom-polinom 1, x, $2x^2$-1, dan $4x^3$-3x berturut-turut adalah polinom $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$, dan $T_3(x)$.

Persamaan Hermite

- Persamaan diferensial

$$y'' - 2xy' + 2py = 0, \tag{40}$$

Dengan *p* suatu konstanta, disebut *persamaan Hermite*. Seperti akan kita lihat, jika konstanta *p* merupakan bilangan bulat taknegatif, persamaan (40) mempunyai sebuah penyelesaian berbentuk polinom di sekitar titik *x* = 0. Bila dinormalkan secara tepat, penyelesaian berbentuk polinom itu disebut *polinom Hermite*. Polinom Hermite sangat penting dalam mekanika kuantum, dalam penyelidikan penyelesaian yang dapat diterima dari persamaan Schrodinger untuk osilator harmonik. Polinom Hermite berguna juga dalam teori probabilitas dan statistika untuk memperoleh uraian deret Gram-Charlier, yaitu uraian dalam polinom Hermite.

Jelaslah titik *x* = 0 merupakan titik biasa dari persamaan diferensial (40) dan setiap penyelesaian persamaan diferensial itu berbentuk

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{41}$$

Dan konvergen untuk semua *x*. Dengan langsung mensubstitusikan (41) ke dalam (40) dan menyamakan keofisiennya, pembaca dapat membuktikan bahwa untuk *n* = 1, 2, ...,

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{2^n p(p-2)\ldots(p-2n+2)}{(2n)!} a_0 \tag{42}$$

dan

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{2^n p(p-2)\ldots(p-2n+1)}{(2n+1)!} a_1 \tag{43}$$

Penyelesaian umum dari persamaan diferensial (40) berbentuk

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$

atau

$$y(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n p(p-2)\ldots(p-2n+2)}{(2n)!} x^{2n} \right]$$

$$+a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n(p-1)(p-3)\dots(p-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]$$

Jadi, dua penyelesaian yang bebas linear dari persamaan diferensial Hermite adalah

$$y_1(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n p(p-2)\dots(p-2n+2)}{(2n)!}x^{2n} \tag{44}$$

dan

$$y_2(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n(p-1)(p-3)\dots(p-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \tag{45}$$

Deret itu konvergen untuk semua x.

Seperti kita lihat dari persamaan (42), bila p nol atau suatu bilangan positif yang genap, katakan $p = 2k$, koefisien a_{2n} lenyap untuk $n \geq k+1$, dan karenanya penyelesaian (44) merupakan sebuah polinom berderajat $2k$. Dengan cara yang sama, dari persamaan (43), kita lihat bahwa bila p suatu bilangan positif yang ganjil, katakan $p = 2k + 1$, koefisien a_{2n+1} lenyap untuk $n \geq k+1$, dan karena itu penyelesaian (45) merupakan sebuah polinom berderajat $2k + 1$.

Jadi, jika p merupakan bilangan bulat taknegatif n, persamaan diferensial Hermite mempunyai penyelesaian berbentuk polinom berderajat n. Polinom ini dinormalkan demikian sehingga koefisien pertama (koefisien dari x^n) adalah 2^n, disebut *polinom Hermite* dan dinyatakan oleh $H_n(x)$. Sebagai contoh, $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, dan seterusnya.

Latihan

Selesaikan **MNA** dalam latihan 1 sampai dengan 10, dengan menggunakan metode deret kuasa di sekitar titik awal x_0.

1. $y'' - 2xy' + 4y = 0$
   $y(0) = 1$
   $y'(0) = 0$

2. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$
   $y(0) = 1$
   $y'(0) = 0$

3. $y'' - 2(x+2)y' + 4y = 0$

$y(-2)=1$

$y(-2)=0$

4. $\left(-x^2+4x-3\right)y''-2(x-2)y'+6y=0$

$y(2)=1$

$y(2)=0$

5. $\left(1-x^2\right)y''-xy'+y=0$

$y(0)=0$

$y'(0)=1$

6. $\left(1-x^2\right)y''-xy'+4y=0$

$y(0)=1$

$y'(0)=0$

7. $y''-2xy'+2y=0$

$y(0)=0$

$y'(0)=1$

8. $y''-2(x-1)y'+2y=0$

$y(0)=0$

$y'(0)=1$

9. $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$

$y(0)=0$

$y'(0)=-1$

10. $\left(x^2+4x+3\right)y''+2(x+2)y'-2y=0$

$y(-2)=0$

$y'(-2)=-1$

Dalam Latihan 11 sampai dengan 19, hitung empat koefisien pertama dari penyelesaian deret kuasa di sekitar titik awal.

11. $y''-2xy'+2y=0$

$y(0)=0$

$y'(0)=1$

12. $y''(x-1)y'+2y=0$

$y(0)=0$

$y'(0)=1$

13. $\left(x^2+2\right)y''-3y'+(x-1)y=0$

$y(1)=-20$

$y'(1)=-2$

14. $xy'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$

$$y(3) = 2$$

$$y'(3) = 0$$

15. $(x-1)y'' - xy' + y = 0$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

16. $y'' - 2xy' + 4y = 0$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

17. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

18. $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

19. $y''(x-1)y' + 2y = 0$

$$y(1) = 1$$

$$y'(1) = 0$$

Buktikan pernyataan dalam Latihan 20 sampai dengan 24, tanpa mencari penyelesaian secara eksplisit.

20. Deret kuasa $\sum_{n}^{\infty} 0\, a_n x^n$ sebagai penyelesaian **MNA**

$$y'' + (x-1)y' - y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

Konvergen untuk semua *x*.

21. Setiap penyelesaian deret kuasa dari persamaan diferensial

$$y'' + (x+1)y' - y = 0$$

Konvergen untuk semua *x*.

22. Deret kuasa $\sum_{n}^{\infty} 0\, a_n (x-3)^n$ sebagai penyelesaian **MNA**

$$y'' + 2y' - xy = 0$$

$$y(3) = 1$$

$$y'(3) = -2$$

Konvergen untuk semua *x* di dalam selang 0 < *x* < 6

23. Jari-jari kekonvergenan penyelesaian deret kuasa Latihan 18 paling sedikit sama dengan1.

24. Penyelesaian deret kuasa dari Latihan 15 konvergen untuk semua x di dalam selang $-1 < x < 1$.

Hitung polinom Legendre yang sesuai dengan persamaan Legendre dalam Latihan 25 sampai dengan 27.

25. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$
26. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$
27. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$
28. Buktikan rumus rekursif (33)
29. Buktikan rumus rekursif (36) dan (37)
30. Buktikan rumus rekursif (42) dan (43)

Hitung polinom Chebyshev yang sesuai dengan persamaan Chebyshev dalam Latihan 31 sampai dengan 33.

31. $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$
32. $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0$
33. $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$

Hitung polinom Hermite yang sesuai dengan persamaan Hermite dalam Latihan 34 sampai dengan 36.

34. $y'' - 2xy' + 2y = 0$
35. $y'' - 2xy' + 4y = 0$
36. $y'' - 2xy' + 6y = 0$
37. Dalam suatu rangkaian deret *RLC* (lihat penerapan rangkaian listrik dalam Bagian 2.11.1), andaikan bahwa L = 20 henry, R = (60 + 20t) ohm, C = 0,05 farad, dan $V(t)$ = 0. Tentukan rumus rekursif yang dapat digunakan untuk menghitung arus dalam rangkaian secara hampiran.

5.5 Deret Kuasa Sebagai Penyelesaian di Sekitar Titik Singular yang Regular

Dalam bagian ini kita perhatikan bagaimana menyelesaikan sebarang persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien peubah yang berbentuk

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Dalam selang tanpa titik di sekitar titik singular yang regular x_0. Sebuah selang tanpa titik pusat di sekitar x_0 adalah suatu himpunan berbentuk

$0 < |x - x_0| < R$ untuk suatu bilangan positif *R*. Himpunan ini terdiri dari selang $|x - x_0| < R$, tanpa titik pusat x_0 (lihat gambar 5.1).

Akan kita ingat kembali bahwa bila titik x_0 merupakan titik singular yang regular dari persamaan diferensial (1), maka fungsi-fungsi

$$(x - x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ dan } (x - x_0)^2 \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

~~*11111111111111111111111111*~~

X_o-R *X_o* *X_o+R*

Gambar 5.1

Mempunyai uraian deret kuasa berbentuk

$$(x - x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n \text{ untuk } |x - x_0| < R_1 \tag{2}$$

dan

$$(x - x_0)^2 \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x - x_0)^n \text{ untuk } |x - x_0| < R_2 \tag{3}$$

Dengan jari-jari kekonvergenan R_1 dan R_2. Karena titik x_0 merupakan titik singular dari persamaan diferensial (1), pada umumnya, penyelesaian persamaan diferensial tersebut takterdefinisi pada x_0. tetapi, persamaan diferensial (1) mempunyai dua penyelesaian bebas linear dalam selang tanpa titik pusat $0 < |x - x_0| < R$, dimana *R* adalah nilai terkecil R_1 dan R_2. Masalah kita dalam bagian ini ialah menghitung (atau menghampiri) kedua penyelesaian ini di dekat setiap titik singuar. Sebelum kita kemukakan sebuah teorema yang menggambarkan bentuk kedua penyelesaian bebas linear dari persamaan diferensial (1) di dekat sebuah titik singular yang regular, kita memerlukan definisi berikut.

Definisi 1

Misalkan bahwa x_0 *merupakan titik singular yang regular dari persamaan diferensial* (1)*, dan misalkan bahwa uraian* (2) *dan* (3) *berlaku. Maka persamaan kuadrat*

$$\lambda^2 + (A_0 - 1)\lambda + B_0 = 0$$

Disebut persamaan indeks dari (1) *pada* x_0

Teorema 1 (Penyelesaian di dekat sebuah titik singular yang regular)

Misalkan bahwa x_0 *sebuah titik singular yang regular dari persamaan diferensial* (1) *dan misalkan bahwa uraian* (2) *dan* (3) *berlaku. Misalkan pula bahwa* λ_1 *dan* λ_2 *dua akar dari persamaan indeks*

$$\lambda^2 + (A_0 - 1)\lambda + B_0 = 0, \tag{4}$$

Yang ditandai sedemikian sehingga $\lambda_1 \geq \lambda_2$ *dalam hal kedua akar itu merupakan bilangan riil. Maka salah satu penyelesaian dari persamaan* (1) *berbentuk*

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{5}$$

Dengan a_0 = 1, *dan berlaku di dalam selang tanpa pusat* $0 < |x - x_0| < R,$ *dimana R = min (R₁, R₂). Suatu penyelesaian kedua yang bebas linear* $y_2(x)$ *dari persamaan (1) dalam selang tanpa pusat* $0 < |x - x_0| < R,$ *diperoleh secara berikut.*

Kasus 1 Jika $\lambda_1 - \lambda_2 \neq \textit{bilangan bulat}$, *maka*

$$y_2(x) = |x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \tag{6}$$

Dengan b_0 = 1.

Kasus 2 *Jika* $\lambda_1 = \lambda_2$, *maka*

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \tag{7}$$

Kasus 3 *Jika* $\lambda_1 = \lambda_2$ + *(bilangan bulat positif), maka*

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln|x - x_0| |x - x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \tag{8}$$

Dengan b_0 = 1.*Konstanta C kadang-kadang sama dengan nol. (Lihat Latihan 29).*

Seperti dalam hal titik biasa, koefisien dari penyelesaian deret di atas dapat diperoleh dengan substitusi langsung penyelesaian itu ke dalam persamaan diferensial tersebut dan koefisiennya disamakan. Mula-mula dihitung penyelesaian (5). Deret dari bentuk persamaan (5) disebut *dereet Frobenius*. Sebuah penyelesaian kedua dapat dihitung dari (6), (7), atau (8) tergantung bagaimana kasusnya nanti. Sebuah penyelesaian kedua dapat dicari dengan menggunakan metode reduksi orde yang dilukiskan dalam bagian 2.8. Tiga contoh berikut berhubungan dengan kasus 1, 2, dan 3 dari teorema 1.

Contoh 1 Hitung penyelesaian umum persamaan diferensial

$$2x^2y'' + \left(x - x^2\right)y' - y = 0 \tag{9}$$

Di dekat titik $x_0 = 0$

Penyelesaian Di sini $a_2(x) = 2x^2$, $a_1(x) = x - x^2$, dan $a_0(x) = -1$. Karena $a_2(\mathrm{o}) = 0$, titik $x_0 = 0$ merupakan titik singular dari persamaan diferensial (9). Karena

$$\left(x - x_0\right)\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = x\,\frac{x - x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$

dan

$$\left(x - x_0\right)^2\frac{a_0(x)}{a_2(x)} = x^2\,\frac{-1}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

Merupakan fungsi analitik (dengan jari-jari kekonvergenan sama dengan ∞), titik $x_0 = 0$ adalah sebuah titik singular yang regular dari persamaan diferensial (9). Di sini $A_0 = \frac{1}{2}$, dan $B_0 = -\frac{1}{2}$, dan karena itu persamaan indeks dari persamaan diferensial (9) pada titik singular regular 0 adalah $\lambda^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)\lambda - \frac{1}{2} = 0,$ yaitu

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Akar-akar persamaan indeks itu adalah -1/2 dan 1, dan kita harus membuat akar-akar itu demikian sehingga $\lambda_1 \geq \lambda_2$, yaitu,

$$\lambda_1 = 1 \quad dan \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

Menurut Teorema 1, satu penyelesaian dari persamaan diferensial (9) berbentuk

$$y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{10}$$

Dengan a_0 = 1. Karena selisih kedua akar persamaan indeks itu $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{3}{2}$ bukan bilangan bulat, maka penyelesaian bebas linear $y_2(x)$ berbentuk (Kasus1)

$$y_2(x) = |x|^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{11}$$

Dengan b_0 = 1. Karena R_1 = R_2 = ∞, maka deret kuasa (10) konvergen untuk semua x. Tetapi, penyelesaian (11) tidak terdefinisi pada x = 0. Penyelesaian (11) ini terdefinisi (menurur Teorema 1) di dalam selang tanpa titik pusat $0 < |x| < \infty$ yaitu, untuk x < 0 atau x > 0. Sekarang akan kita hitung koefisien-koefisien dari penyelesaian (10) dan (11) dengan substitusi langsung ke dalam persamaan diferensial (9) dan menyamakan koefisien-koefisien x yang berpangkat sama.

Pertama-tama kita hitung koefisien a_n dari penyelesaian (10). Kita dapatkan

$$y(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n x^n \text{ dan } y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow 2x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} 2n(n+1)a_n x^{n+1}$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n x^{n+1}$$

$$x^2 y' = \sum_{n=0}^{\infty} -(n+1)a_n x^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} -na_{n-1} x^{n+1}$$

$$-y = \sum_{n=0}^{\infty} -a_n x^{n+1}$$

$$0 = (a_0 - a_0)x + \sum_{n=1}^{\infty}[2n(n+1)a_n + (n+1)a_n - na_{n-1} - a_n]x^{n+1}$$

Suku (a_0 – a_0) x berhubungan dengan jumlah suku-suku n = 0. Dengan menyamakan koefisien-koefisien dengan nol, kita peroleh rumus rekursif

$$2n(n+1)a_n + (n+1)a_n - na_{n-1} - a_n = 0,\ \ n=1,2,...$$

atau

$$a_n = \frac{na_{n-1}}{2n(n+1)+(n+1)-1} = \frac{1}{2n+3}a_{n-1},\ \ n=1,2,...$$

Kita ambil $a_o = 1$. Jadi,

Untuk $n = 1$: $a_1 = \frac{1}{5}$

Untuk $n = 2$: $a_2 = \frac{1}{7}a_1 = \frac{1}{5.7}$

Untuk $n = 3$: $a_3 = \frac{1}{9}a_2 = \frac{1}{5.7.9}$

dan, dalam bentuk umum

$$a_n = \frac{1}{5.7...(2n+3)}\ untuk\ \ n=1,2,...$$

Jadi, satu penyelesaian dari persamaan diferensial (9) di dekat $x_0 = 0$ berbentuk

$$y_1(x) = x\left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{5.7} + ... + \frac{x_n}{5.7...(2n+3)} + ...\right)$$

atau

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5.7...(2n+3)}\right] \qquad (12)$$

Selanjutnya, kita hitung koefisien b_n dari penyelesaian (11). Penyelesaian ini terdefinisi di dalam selang tanpa titik pusat $0 < |x|$, yaitu $x > 0$ atau $x < 0$. Mula-mula kita misalkan bahwa $x > 0$. Maka

$$y_2(x) = x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-(1/2)},$$

$$y_2^1(x) = \sum_{n=o}^{\infty}(n-\frac{1}{2})b_n x^{n-(3/2)}$$

dan

$$y_2^{``}(x) = \sum_{n=o}^{\infty}(n-\frac{1}{2})\ (n-\frac{3}{2})b_n x^{n-(5/2)}$$

$$\Rightarrow 2x^2 y'' = \sum_{n=o}^{\infty} (n - \frac{1}{2})\ (n - \frac{3}{2}) b_n x^{n-(1/2)}$$

$$xy'' = \sum_{n=o}^{\infty} (n - \frac{1}{2}) b_n x^{n-(1/2)}$$

$$-x^2 y' = \sum_{n=o}^{\infty} (n - \frac{1}{2}) b_n x^{n+(1/2)} = \sum_{n=o}^{\infty} -(n - \frac{3}{2}) b_{n-1} x^{n-(1/2)}$$

$$-y = \sum_{n=o}^{\infty} b_n x^{n-(1/2)}$$

$$0 = (2.\frac{3}{4} b_0 - \frac{1}{2} b_0 - b_0 0) x^{-1/2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [2(n - \frac{1}{2}(n - \frac{3}{2}) b_n + (n - \frac{1}{2}) b_n$$

$$-(n - \frac{3}{2}) b_{n-1} - b_n] x^{n-(1/2)}.$$

Seperti sebelum ini, suku pertama di ruas kanan sama dengan nol. Dengan menyamakan tiap koefisien deret itu dengan nol, kita peroleh rumus rekursif.

$$2(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) b_n + (n - \frac{1}{2}) b_n - (n - \frac{3}{2}) b_{n-1} - b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

atau

$$b_n \frac{(n - \frac{3}{2}) b_{n-1}}{2(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) + (n - \frac{1}{2}) - 1} = \frac{1}{2n} b_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Kota ambil $b_0 = 1$. Jadi

Untuk n = 1 : $\quad b_1 = \frac{1}{2}$

Untuk n = 2 : $\quad b_2 = \frac{1}{2.2} b_1 = \frac{1}{2^2} . \frac{1}{2}$

Untuk n = 3 : $\quad b_3 = \frac{1}{2\ .\ 3} b_2 = \frac{1}{2\ .\ 3} \ \frac{1}{2^2\ n\ 2} = \frac{1}{2^3\ .\ 3!}$

dan, dalam bentuk umum,

$$b_n \quad \frac{1}{2^n\ .\ n!} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Jadi

$$y^2(x) = x^{-1/2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2\ .\ 2!} + \ldots + \frac{x^n}{2^n\ .\ n!} + \ldots\right)$$

$$= x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!} = x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2)^n}{n!}$$

atau

$$y_2(x) = x^{-1/2}e^{x/2} \tag{13}$$

Sekarang kita harus menghitung penyelesaian (11) bila $x < 0$. Untuk ini, kita gunakan pemetaan $x = -t$ di dalam persamaan diferensial (9). Dengan menggunakan atura rantai dan tanda titik untuk turunan menurut t; kita peroleh

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\ .\ \frac{dt}{dx} = -\dot{y}$$

dan

$$y'' = \frac{d}{dt}(-\dot{y})\frac{dt}{dx} = \ddot{y} \tag{9`}$$

Jadi persamaan (9) menjadi

$$2t^2\ddot{y} - (-t - t^2)\dot{y} - y = 0$$

Karena $x < 0$ dalam Persamaan (9), kita punyai $t > 0$ dalam Persamaan (9`). Persamaan indeks dari Persamaan maka (9`) sama dengan persamaan indeks dari Persamaan (9). Maka akar-akarnya adalah

$$\lambda_1 = 1 \qquad dan \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Kita hanya tinggal mencari penyelesaian yang sesuai dengan $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ karena untuk $\lambda_1 = 1$ kita telah mendapatkan penyelesaiannya. Seperti yang lalu, kita cari suatu penyelesaian berbentuk

$$y_2(t) = |t|^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n t^n.$$

Karena $t > 0$ kita peroleh

$$y_2(t) = t^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n t^n.$$

Koefisien-koefisien di atas dihitung dengan substitusi $y_2(t)$ langsung ke dalam persamaan dieferensial (9`) kita peroleh

$$y_2(t) = t^{-1/2}e^{-1/2}, \quad t > 0.$$

Tetapi $t = -x$, jadi

$$y_2(x) = (-x)^{-1/2}e^{x/2}, \quad x < 0 \qquad (13`)$$

Dari penggangungan (13) dan (13`), kita lihat bahwa untuk $x > 0$ atau $x < 0$, kita dapatkan

$$y_2(x) = |x|^{-1/2}e^{x/2} \qquad (14)$$

Jadi, penyelesaian umum Persamaan (9) berbentuk

$$y(x) = c_1 x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5\,.\,7\,.\,.\,.\,(2n+3)}\right] + c_2|x|^{-1/2}e^{x/2}$$

dimana c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang.

Akan sangat tepat untuk menggunakan catatan berikut sebagai kelanjutannya.

CATATAN 1 Dapat dibuktikan bahwa jika

$$y(x) = x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad (15`)$$

merupakan penyelesaian dari Persamaan (1) untuk $x > 0$, maka

$$y(x) = (-x)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad (16)$$

juga merupakan penyelesaian untuk $x < 0$. Ini diperlihatkan dalam contoh di atas Persamaan (13) dan (13`). Dengan menggabungkan (15) dan (16), untuk $x <$ kota peroleh

$$y(x) = |x|^{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n$$

CONTOH 2 Hitung penyelesaian umum persamaan diferensial

$$(x-1)^2 y'' - (x_2 - x)y' + y = 0 \qquad (17)$$

di dekat titik $x_0 = 1$.

Penyelesaian Karena perhitungan di vsekitar titik nol lebih mudah, kita ambil $t = x - 1$dan kita cari penyelesaian umum dari persamaan hasil pemetaan itu did ekat 0.

dari $t = x - 1$, kita peroleh $x = t - 1$, $y' = \dot{y}$ dan $y'' = \ddot{y}$. Jadi persamaan (17) menjadi

$$t^2 \ddot{y} - (t^2 + t)\dot{y} + y = 0 \qquad (18)$$

Titik $t_0 = 0$ adalah titik singular dari Persamaan (18), dan karena

$$t\frac{a_1(t)}{a_2(t)} = t\frac{-(t^2 + t)}{t_2} = -1 - t$$

$$t^2 \frac{a_0(t)}{a_2(t)} = t^2 \frac{1}{t^2} = 1,$$

maka t_0 = o adalah titik singular yang regular. Di sini $A_0 = -1$ dan $B_0 = 1$. Karena itu, persamaan indeks berbentuk

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \text{ dan } \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Menurut teorema 1, satu penyelesaian dari (17) berbentuk

$$y_1(t) = t\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n,$$

dengan $a_0 = 1$ karena $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, kedua akar persamaan indeks adalah sama, maka penyelesaian kedua yang bebas linear $y_2(t)$ berbentuk (Kasus 2)

$$y_2(t) = y(t)\ln[t] + |t| \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \qquad (2)$$

Mula-mula kita hitung koefisien a_n dari penyelesaian (19). Dengan mensubstitusikan ke dalam (18) dan menyamakan koefisiennya, pembaca dapat membuktikan bahwa

$$a_n = \frac{1}{n!}a_0, \qquad n, 1, 2, \ldots.$$

Jadi dengan mengambil $a_0 = 1$, kita dapatkan bahwa

$$y_1(t) = t\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} \ldots\right) = t\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \qquad (21)$$

atau

$$y_1(t) = te^t$$

Selanjutnya kita hitung koefisien b_n dari penyelesaian (2). Dalam Persamaan (2) kita substitusikan y_1 *(t)* dari persamaan (21),d an untuk $t > 0$, kita peroleh

$$y_2(t) = t\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\ln t + t\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}\right)\ln t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{n+1}$$

$$\dot{y}_2(t) = t\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}t^n\right)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n t^n$$

$$\ddot{y}_2(t) = t\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,(n+1}{n!}t^{n-1}\right)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}t^{n-1}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nb_n t^{n-1}$$

$$\Rightarrow t^2\ddot{y}_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,(n+1)}{n!}t^{n+1}\right)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}t^{n+1}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)nb_n t^{n+1}$$

$$-t^2\dot{y}_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{n+1}{n!}t^{n+2}\right)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{n!}t^{n+1}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)b_n t^{n+2}$$

$$-t\dot{y}_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{n+1}{n!}t^{n+1}\right)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{n!}t^{n+1}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)b_n t^{n+1}$$

$$y_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^{n+1}\right)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+1}$$

Mudal dilihat bahwa koefisien dari ln t sama dengan nol. (Hal ini terjadi dalam semua contoh mengenai Kasus 2). Juga seperti biasanya, jumlah semua suku yang sesuai dengan $n = 0$ sama dengan nol. Jadi, dengan menyamakan koefisien-koefisien dengan nol, kita peroleh

$$\frac{n+1}{n!} + \frac{n}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n_1} + (n+1)nb_n - nb_{n-1} - (n+1)b_n + b_n = 0$$

n = 1, 2, ...

Dengan menyederhanakannya, kita peroleh

$$\frac{n}{n!} + n^2 b_n - n b_{n-1} = 0$$

atau

$$b_n = \frac{1}{n} b_{n-1} - \frac{1}{n\ .\ n!}, \quad n = 1, 2\ .\ .\ .$$

Jadi dengan b_0 = 1, kita peroleh

$$b_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1\ .\ 1!} = 0, \qquad b_2 = -\frac{1}{2\ .\ 2!} = -\frac{1}{4},$$

$$b_3 = \frac{1}{3} b_2 - \frac{1}{3\ .\ 3!} = -\frac{3}{56}, \quad b_4 = \frac{1}{4} b_3 - \frac{1}{4\ .\ 4!} = -\frac{13}{288},$$

dan seterusnya. Jadi

$$y_2(t) = c_1(x-1)e^{x-1} + c_2\left[(x-1)e^{x-1}\ln|x-1| + (x-1) - \frac{(x-1)^3}{4} - .\ .\ \right]$$

CONTOH 3 Hitung dua penyelesaian bebas linear dari persamaan diferensial

$$x^2 y'' - (x-2)y = 0$$

Di dekat $x_0 = 0.$

Penyelesaian Di sini $a_2(x) = x^2\ .\ a_1(x) = 0,$ dan $a_0(x) = -(x+2).$ titik $x_0 = 0$ merupakan titik singular dari persamaan diferensial (24) karena $a_2(0) = 0.$ Karena

$$(x - x_0)\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = 0$$

dan

$$(x - x_0)^2 \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = x^2 \frac{-(x+2)}{x_2} = -2 - x,$$

titik $x_0 = 0$ adalah titik singular yang regular. Persamaan indek berbentuk (di sini $A_0 = 0$ dan $B_0 = -2)\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$ mAkar-akarnya

$$\lambda_1 = 2 \text{ dan } \lambda_2 = -1.$$

Menurut Teorema 1, satu penyelesaian dari persamaan diferensial (24) berbentuk

$$y_1(x) = x^2 \sum_{n-0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (25)$$

dengan $a_0 = 1$. Karena $\lambda_1 - \lambda_2 = +3$, beda kedua akar persamaan indeks itu merupakan bilangan bulat positif, maka penyelesaian kedua yang bebas linear $y_2(x)$ berbentuk (Kasus 3)

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln|x| + x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{26}$$

dengan $b_0 = 1$ dan C mungkin sama dengan nol.

Mula-mula kita hitung koefisien a_n dari penyelesaian (25). Kita punyai

$$y_1(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-2}$$

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_n x^{n-1} \quad \text{dan} \quad y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n x^n$$

$$\Rightarrow x^2 y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n x^{n+2}$$

$$-xy_1 = \sum_{n=0}^{\infty} -a_n x^{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} -a_{n-1} x^{n+2}$$

$$-2y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} -2a_n x^{n+2}$$

$$0 = (2a_0 - 2a_0)x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_n - a_{n-1} - 2a_n\right] x^{n+2}$$

Dengan menyamakan koefisien-koefisien itu dengan nol, kita peroleh rumus rekursif

$$(n+2)(n+1)a_n - a_{n-1} - 2a_n = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

atau

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1) - 2} = \frac{1}{n(n+3)} a_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots$$

Kita ambil $a_0 = 1$, maka $a_1 = \dfrac{1}{4}$, $a_2 = \dfrac{1}{40}$ ... Karena itu

$$y_1(x) = x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} + \ldots$$

Selanjutnya, kita hitung koefisien b_n dari penyelesaian (26). Kita lakukan ini untuk x > 0. dengan mensubstitusikan y_1 dalam (26), kita peroleh

$$y_2 = C\left(x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} + \dots\right)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1}$$

$$y'(x) = C\left(2x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{10}x^3 + \dots\right)\ln x$$

$$+ C\left(2x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{10}x^3 + \dots\right) + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)b_n x^{n-2}$$

$$y_2''(x) = C\left(2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{10}x^2 + \dots\right)\ln x + C\left(2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{10}x^2 + \dots\right)$$

$$+ C\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{40}x^2 + \dots\right) + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)b_n x^{n-3}$$

$$\Rightarrow x^2 y_2'' = C\left(2x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \dots\right)\ln x + C\left(3x^2 + \frac{5}{4}x^3 + \dots\right)$$

$$+\left(2b_0\frac{1}{x} + 2b_3x^2 + \dots\right)$$

$$-xy_2 = C\left(-x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots\right)\ln x + \left(-b_0 - b_1x - b_2x^2 - \dots\right)$$

$$-2y_2 = C\left(-2x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \dots\right)\ln x$$

$$+\left(-2b_0\frac{1}{x} - 2b_1 - 2b_2x - 2b_3x^2 - \dots\right)$$

$$0 = C\left(3x^2 + \frac{5}{4}x^3 + \dots\right)$$

$$+\left[\left(-b_0 - 2b_1\right) + \left(-b_1 - 2b_2\right)x - b_2x^2 - \dots\right]$$

atau

$$(-b_0 - 2b_1) + (-b_1 - 2b_2)x + (3C - b_2)x^2 + \dots = 0$$

Dengan mengambil b_o= 1 dan menyamakan koefisien-koefisien ini dengan nol, kita peroleh

$$b_1 = -\frac{1}{2}, \qquad b_2 = \frac{1}{4}, \qquad C = \frac{1}{12}, \ \dots$$

Jadi

$$y_2(x) = \frac{1}{12}\left(x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{40} + \ldots\right)\ln|x| + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \ldots\right).$$

PENERAPAN 5.5.2

Metode Frobenius merupakan teknik untuk memperoleh penyelesaian dari persamaan diferensial tertentu yang muncul dalam penerapan.

Persamaan Bessel

❖ Persamaan diferensial

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) = 0 \tag{27}$$

dimana p suatu konstanta, disebut *persamaan differensial Bessel orde-p*. Penyelesaian persamaan Bessel disebut *fungsi Bessel*, sangat penting dalam matematika terapan terutama dalam fisika matematika. Sebelum kita pelajari penyelesaian dari Persamaan (27), kita tunjukkan secara singkat bagaimana persamaan Bessel muncul dalam penerapan yang khusus. Metode yang penting dari pemisahan peubah dalam penyelesaian persamaan diferensial juga disebutkan dalam proses itu.

Penyebaran suku dalam tabung

❖ Jika kita tahu penyebaran suku dalam sebuah tabung, pada asaat $t = 0$, maka dalam fisika dibuktikan bahwa $u = u\ (t, \theta, t)$ pada titik (r, θ) oada setiap saat t memenuhi persamaan diferensial parsial (dalam koordinat polar):

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \frac{1}{k}u_t. \tag{28}$$

Di sini kita andaikan bahwa suhu tidak tergantung dari ketinggian tabung. Besaran k dalam Persamaan (28) adalah suatu konstanta yang tergantung pada penghantaran panas (thermal conductivity) dan, pada umumnya, juga tergantung pada bahan pembuat tabung. Sekarang kita gunakan metode pemisihan peubah untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial (28). Menurut metode ini, kita andaikan bahwa Persamaan (28) mempunyai sebuah penyelesaian $u = u\ (t, \theta, t)$ yang merupakan hasilkali dari sebuah fungsi dari r, sebuah fungsi dari θ, dan sebuah fungsi dari t. Yaitu :

$$u\ (t,\ \theta,\ t) = R(r)\theta(\theta)T(t), \qquad (29)$$

dimana fungsi-fungsi R, θ, dan T yang mau ditentukan. Seperti akan kita lihat di bawah ini, fungsi R akan memenuhi persaman Bessel (27). Dengan mensubstitusikan (29) ke dalam (28) dan lambang r, θ, dan t dihapuskan, kita peroleh

$$R''\theta T + \frac{1}{r}R'\theta T + \frac{1}{r_2}RQ''T = \frac{1}{k}R\theta T'. \qquad (3)$$

Langkah yang penting dalam metode pemisahan peubah ialah dimungkinkan menuliskan kembali Persamaan (3) demikian rupa sehingga peubahnya terpisah. Jelaslah, kita dapat menulis Persamaan (3) sebagai berikut :

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} - \frac{r^2\,T'}{k\,T} = -\frac{\theta}{\theta}. \qquad (31)$$

Ruas kiri dari Persamaan (31) merupakan fungsi yang bebas dari θ, sedang ruas kanan merupakan fungsi hanya dari θ saja. Satu-satunya jalan bahwa hal ini dapat terjadi ialah jika kedua ruas dari Persamaan (31) merupakan k konstanta, katakan p^2. Maka kita peroleh persamaan

$$\theta'' + p^2\theta = 0 \qquad (32)$$

dan

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} - \frac{r^2\,T'}{k\,T} = p^2$$

atau

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} - \frac{p^2}{r^2} = \frac{1}{k}\frac{T'}{T} \qquad (33)$$

Sekarang ruas kiri dari Persamaan (33) merupakan sebuah fungsi hanya dari r saja, sedang ruas kanan merupakan fungsi dari t. Jadi, kedua ruas dari Persamaan (33) sama dengan konstan, katakan $-\lambda^2$. Jadi,

$$T' + \lambda^2 kT = 0 \qquad (34)$$

dan

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2r^2 - p^2)R = 0. \qquad (35)$$

Fungsi $\Theta(\theta)$ dan T (t) dari penyelesaian (29) dapat dengan mudah dicari dengan menyelesaikan persamaan diferensial (32) dan (34) yang sederhana. Untuk mencari fungsi $R(r)$ dari penyelesaian (29), kita harus juga menyelesaikan Persamaan (35). Jika kita buat pemetaan $x = \lambda r$ dan kita ambil y(x) = R (r), kita peroleh

$$R = \frac{dR}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = \lambda y' = \frac{x}{r} y' \text{ dan } R'' = \frac{d}{dx}(\lambda y')\frac{dx}{dr} = \lambda^2 y'' = \frac{x^2}{r^2} y''$$

Dengan mensubstitusikan R' dan R'' ke dalam Persamaan (35), kita peroleh persamaan Bessel (27).

Sekarang kita kembali mencari penyelesaian dari Persamaan (27) di dekat $x_0 = 0$. Meskipun p dapat merupakan bilangan kompleks, untuk kemudahannya, kita andaikan bahwa $p \geq 0$. Kita punyai

$$a_2(x) = x^2, \quad a_1(x) = x, \quad a_0(x) = x^2 - p^2.$$

Karena $a_2(0) = 0$, titik $x_0 = 0$ merupakan sebuah titik singular. Tetapi

$$x\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = 1 \quad dan \quad x_2\frac{a_0(x)}{a_2(x)} = -p^2 + x^2, \tag{36}$$

Dan dengan demikian $x_0 = 0$ merupakan sebuah titik singular yang regular dengan persamaan indeks $\lambda^2 - p^2 = 0$. Kedua akar persamaan indeks ini adalah

$$\lambda_1 = p \;\; dan \;\; \lambda_2 = -p.$$

Jadi, satu penyelesaian dari persamaan Bessel berbentuk

$$y_1(x) = |x|^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{37}$$

Dari persamaan (36) dan Teorema 1 penyelesaian dari persamaan (27) di dekat 0 benar sah untuk [x] > 0, yaitu, untuk $x > 0$ atau $x < 0$. Bentuk penyelesaian kedua yang bebas linear dari persamaan (27), y_2 (x), tergantung pada nilai $\lambda_1 - \lambda_2 = 2p$ sesuai dengan kasus 1, 2 dan 3 dari teorema 1. Lebih tepatnya, y_2 (x) diberikan sebagai berikut.

Kasus 1 Jika $2p \neq$ bilangan bulat, maka

$$y_2(x) = |x|^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{38}$$

Jelaslah, penyelesaian ini dapat diperoleh dari (37), dengan mengganti p oleh $-p$.

Kasus 2 Jika $p = 0$, maka

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \tag{39}$$

Kasus 3 Jika $2p$ = bilangan bulat positif, maka

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln|x| + |x|^{-p}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \tag{40}$$

Akan kita hitung koefisien a_n dari penyelesaian (37). Kita dapatkan (untuk $x > 0$)

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p},\; y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+p)a_n x^{n+p-1},$$

dan

$$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+p)(n+p-1)a_n x^{n+p-2}$$

$$\Rightarrow x^2 y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+p)(n+p-1)a_n x^{n+p}$$

$$xy_1' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+p)a_n x^{n+p}$$

$$x^2 y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-p+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+p}$$

$$-p^2 y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} -p^2 a_n x^{n+p}$$

$$0 = \left[p(p-1)a_0 + pa_0 - p^2 a_0\right]x^p + \left[(1+p)pa_1 + (1+p)a_1 - p^2 a_1\right]x^{1+p}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+p)(n+p-1)a_n + (n+p)a_n + a_{n-2} - p^2 a_n)\right]x^{n+p}$$

$$\Rightarrow (1+2p)a_1 = 0 \;\; dan$$

$$(n+p)(n+p-1)a_n + (n+p)a_n + a_{n-2} - p^2 a_n = 0, \quad n = 2,3,\ldots$$

$$\Rightarrow a_1 = 0 \;\; dan \;\; a_n = -\frac{1}{n(n+2p)}a_{n-2}, \quad n = 2,3,\ldots$$

$$\Rightarrow a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0 \;\; dan$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\ldots(p+n)} a_0, \quad n = 1,2,\ldots$$

Jadi, penyelesaian (37) diberikan oleh

$$y_1(x) = a_0 x^p \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\ldots(p+n)} x^{2n} \right], \tag{41}$$

Dan deret ini konvergen untuk semua *x*. Bila $2p \neq$ bilangan bulat, penyelesaian kedua dari persamaan (27) yang bebas linear dapat di dapat jika kita ganti *p* oleh –*p* dalam persamaan (41). Jadi,

$$y_2(x) = a_0 x^{-p} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\ldots(-p+n)} x^{2n} \right], \tag{42}$$

Dan deret ini konvergen untuk $x > 0$ atau $x < 0$.

Dalam teori mengenai fungsi Bessel konstanta a_0 dalam penyelesaian (41) diambil sama dengan

$$a_0 = \frac{1}{a^p \Gamma(p+1)}, \tag{43}$$

Dimana Γ adalah *fungsi gamma*, yaitu fungsi yang didefinisikan oleh integral

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx. \tag{44}$$

Dengan pilihan konstanta a_0 ini, penyelesaian (41) disebut *fungsi Bessel dari jenis pertama orde-p* dan dinyatakan oleh $Jp(x)$. Jika kita gunakan identitas

$$\Gamma(n+p+1) = (n+p)(n+p-1)\ldots(p+2)(p+1)\Gamma(p+1), \tag{45}$$

Kita peroleh rumus

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+p} \tag{46}$$

Penyelesaian (42) dengan $a_0 = \frac{1}{2}^{-p} (-p+1)$ juga merupakan fungsi Bessel jenis pertama orde –*p* dan dinyatakan oleh $J_{-p}(x)$. Jelaslah,

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n-p} \tag{47}$$

Jadi, $J_p(x)$ selalu merupakan penyelesaian dari persamaan Bessel (27). Selanjutnya, bila 2p bukan bilangan bulat, fungsi $J_p(x)$ dan $J_{-p}(x)$ merupakan penyelesaian yang bebas linear dari persamaan Bessel.

Ambil $p = 0$ atau bila $2p$ adalah bilangan bulat positif, penyelesaian kedua yang bebas linear dari persamaan Bessel berturut-turut berbentuk (39) atau (40), dan dapat diperoleh dengan substitusi deret-deret yang sesuai langsung ke dalam persamaan diferensial itu. Penyelesaian dari persamaan (27) semacam itu dengan pilihan konstanta b_0 yang tepat dikenal sebagai *fungsi Bessel jenis kedua*.

Persamaan Laguerre

- Persamaan diferensial

$$xy'' + (1-x)y' + py = 0, \tag{49}$$

Dengan p merupakan konstanta, disebut *persamaan Laguerre*. Seperti akan kita lihat di bawah, jika konstanta p merupakan bilangan bulat taknegatif, satu dari penyelesaian persamaan diferensial (49), di dekat titik $x_0 = 0$, berbentuk polinom. Bila dinormalkan secara tepat, penyelesaian-penyelesaian berbentuk polinom disebut *polinom Laguerre*. Polinom Laguerre sangat berguna dalam mekanika kuantum dari atom hidrogen.

Titik $x_0 = 0$ adalah titik singulat yang regular dari persamaan diferensial (49) dengan persamaan indeks $\lambda^2 = 0$. Karena $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$ persamaan diferensial tersebut mempunyai penyelesaian berbentuk

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ \ untuk -\infty < x < \infty .$$

Dengan memilih $a_0 = 1$, pembaca dapat membuktikan bahwa

$$a_n = (-1)^n \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{(n!)^2} \ \ untuk \quad n = 1, 2, \ldots \tag{50}$$

Jadi, satu penyelesaian dari persamaan Laguerre adalah

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{(n!)^2} x^n \tag{51}$$

Yang konvergen untuk semua x.

Dari persamaan (50) kita lihat bahwa jika p merupakan bilangan bulat taknegatif k, koefisien a_n akan lenyap untuk $n \geq k+1$. Dalam hal ini penyelesaian dari (51) merupakan polinom berderajat k. Polinom ini yang dikalikan oleh $k!$ Dinyatakan oleh $L_k(x)$ dan disebut *polinom Laguerre*. Sebagai contoh 1, 1 – x, 2 –

$4x + x^2$, dan $6 - 18x + 9x^2 - x^3$ berturut-turut merupakan polinom Laguerre $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, dan $L_3(x)$.

Persamaan hipergeometrik dari Gauss

- Persamaan diferensial

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0, \tag{52}$$

Dengan *a*, *b*, dan *c* konstanta-konstanta, disebut persamaan diferensial *hipergepmetrik dari Gauss* atau disingkat persamaan hipergeometrik. Persamaan (52) sangat penting dalam teori dan praktek, karena banyak persamaan diferensial linear orde-dua dapat direduksi ke persamaan ini dan karena banyak fungsi khusus dihubungkan sangat dekat dengan penyelesaian persamaan ini.

Kita andaikan bahwa *c* bukan suatu bilangan bulat. Persamaan indeks dari (52) di dekat titik singular yang regular $x_0 = 0$ adalah

$$\lambda^2 + (c-1)\lambda = 0.$$

0 dan 1 – *c* adalah akar kedua persamaan indeks itu. Karena *c* bukan bilangan bulat, selisih kedua akar itu tidak bulat. Jadi, menurut Teorema 1, persamaan (52) mempunyai dua penyelesaian yang bebas linear berbentuk

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad dan \quad y_2(x) = |x|^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Pembaca dapat membuktikan bahwa

$$a_n = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!\,c(c+1)\ldots(c+n-1)} a_0,$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots \tag{53}$$

Jadi, dengan memilih $a_0 = 1$, kita peroleh penyelesaian

$$y_1(x) = 1 + \frac{ab}{1.c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1\,.\,2c((c+1))} x^2 \ldots, |x| < 1. \tag{54}$$

Penyelesaian berbentuk deret (54) disebut *deret hipergeometrik* dan dinyatakan oleh *F(a, b, c; x)*. Jadi,

$$F(a,b,c;x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{c(c+1)\ldots(c+n-1)} \frac{x^n}{n!} \tag{55}$$

Dan konvergen di dalam selan [x] < 1. Adalah penting untuk memperhatikan bahwa banyak fungsi dapat diperoleh dari fungsi hipergeometrik untuk berbagai nilai dari konstanta a, b, dan c. Sebagai contoh,

$$F(a,b,c;0)=1$$

$$\lim_{a\to\infty} F\left(a,b,b;\frac{x}{a}\right)=e^{x}$$

$$F(-a,bb;-x)=(1+x)^{a}$$

$F(k+1,-k,1;x)$ merupakan polinom berderajat k untuk k bilangan bulat taknegatif

$$xF(1,1,2;-x)=\ln(1+x).$$

Latihan

Dalam latihan 1 sampai dengan 11, carilah bentuk dari dua penyelesaian bebas linear di dekar x_0 = 0.

1. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$
2. $x^2y''+xy'+\left(x^2-4\right)y=0$
3. $x^2y''+xy'+x^2y=0$
4. $x(1-x)y''+\left(\frac{1}{2}-3x\right)y'-y=0$
5. $xy''+(1-x)y'+y=0$
6. $x^2y''+4x(1-x)y'+2y=0$
7. $x^2y''+x(1-x)y'-\frac{1}{16}y=0$
8. $x^2y''+3x(1-x)y'+y=0$
9. $xy''+(1-x)y'+2y=0$
10. $x^2y''+xy'+\left(x^2-1\right)y=0$
11. $xy''+3y'+4x^3y=0$

Dalam latihan 12 sampai dengan 17, hitung penyelesaian taktrivial, yang bebas dari logaritma, di dekar titik x_0 = 0.

12. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$
13. $x^2y''+xy'+\left(x^2-4\right)y=0$

14. $x^2y''+xy'+x^2y=0$	15. $x(1-x)y''+\left(\frac{1}{2}-3x\right)y'-y=0$

16. $xy'' + (1-x)y' + y = 0$	17. $xy'' + (1-x)y' + 2y = 0$

Dalam latihan 18 dan 19, cari dua penyelesaian bebas linear di dekat titik $x_0 = 0$.

18. $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9} \right) y = 0$

19. $xy'' + (1-x)y' + y = 0$

Dalam latihan 20 sampai dengan 28, jawablah benar atau salah.

20. Persamaan indeks dari persamaan diferensial

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

Pada $x_0 = 0$ adalah

$$\lambda^2 - p^2 = 0.$$

21. Persamaan indeks dari persamaan diferensial

$$xy'' + (1-x)y' + 3y = 0$$

Pada $x_0 = 0$ adalah

$$\lambda^2 = 0.$$

22. Persamaan diferensial

$$xy'' + (1-x)y' + 3y = 0$$

Mempunyai dua penyelesaian bebas linear di dekat $x_0 = 0$ berbentuk

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ \ dan \ \ y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

23. Satu penyelesaian dari persamaan diferensial

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{6} \right) y = 0$$

Di dekat titik $x_0 = 0$ mengandung logaritma.

24. Persamaan indeks dari persamaan diferensial

$$x^2 y'' - (x^2 - x)y' + y = 0$$

Pada $x_0 = 0$ adalah

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

25. Persamaan indeks dari persamaan diferensial

$$x^2 y'' - (x^3 + x^2 + x)y' + (4x+1)y = 0$$

Pada x_0 = 0 adalah

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$

26. Persamaan diferensial

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$$

Mempunyai dua penyelesaian bebas linear di dekat x_0 = 1 berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n.$$

27. Persamaan diferensial

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{2}{3} - 3x\right)y' - y = 0$$

Mempunyai dua penyelesaian bebas linear di dekat x_0 = 1 berbentuk

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

28. Persamaan diferensial

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{2}{3} - 3x\right)y' - y = 0$$

Mempunyai dua penyelesaian bebas linear di dekat x = 1 berbentuk

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n, \quad y_2(x) = y_1(x)\ln|x-1| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-1)^n.$$

29. Buktikan bahwa titik x_0 = 0 merupakan titik singular yang regular untuk persamaan diferensial

$xy'' - y' + 4x^3 y = 0.$

Dalam hal ini, beda akar-akar persamaan indeks merupakan bilangan bulat. Cari kedua penyelesaian yang bebas linear dan dalam proses itu C = 0 dalam rumus (8).

Dalam latihan 30 sampai dengan 37, carilah rumus rekursif untuk koefisien-koefisien dari deret Feobenius sebagai penyelesaian [Persamaan 95)] di dekat titik x_0 yang diberikan

30. $(x+1)^2 y'' - (x+3)y = 0, \textit{di dekat}\, x_0 = -1.$

31. $(x-1)^2 y'' - (x+1)y = 0, di\ dekat\ x_0 = 1.$

32. $x^2 y'' - (x^2 + x)y' + y = 0, di\ dekat\ x_0 = 0.$

33. $2(x+3)^2 y'' - (x^2 + 5x + 6)y' - y = 0, di\ dekat\ x_0 = -3.$

34. Buktikan rumus rekursif (50).

35. Buktikan rumus rekursif 953).

Hitung fungsi Bessel jenis pertama yang berkaitan dengan persamaan Bessel dalam Latihan 36 sampai dengan 38.

36. $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$

37. $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$

38. $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$

Hitung polinom Laguerre yang berkaitan dengan persamaan Laguerre dalam Latihan 39 sampai dengan 41.

39. $xy'' + (1-x)y' + y = 0$

40. $xy'' + (1-x)y' + 2y = 0$

41. $xy'' + (1-x)y' + 3y = 0$

Hitung deret hipergeometrik yang berkaitan dengan persamaan Gauss dalam Latihan 42 dan 43.

42. $x(1-x)y'' + \left(\frac{1}{2} - 3x\right)y' - y = 0$

43. $x(1-x)y'' + \left(\frac{3}{4} - 4x\right)y' - 2y = 0$

44. Buktikan bahwa setiap persamaan diferensial yang berbentuk

    $(x-A)(x-B)y'' + (Cx+D)y' + Ey = 0,$

    Dengan *A*, *B*, *C*, dan *D* konstanta-konstanta dan $A \neq B$ dapat dipetakan menjadi persamaan Gauss (52) dengan pemetaan $x = A + (B-A)t.$

Reduksilah persamaan diferensial dalam Latihan 45 dan 46 ke persamaan hipergeometrik dari Gauss dengan pemetaan yang ditunjukkan dalam Latihan 44.

45. $(x-1)(x+2)y'' + \left(x+\frac{1}{2}\right)y' + 2y = 0$

46. $\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y'' + 2y' - 6y = 0$

Latihan Ulangan

Selesaikan MNA dalam Latihan 1 sampai dengan 4, dengan menggunakan metode deret kuasa di sekitar titik awal yang diberikan.

1. $y'' - xy = 0$

   $y(0) = -1$

   $y'(0) = 0$

2. $y'' - 2xy' + 6y = 0$

   $y(0) = 0$

   $y'(0) = -12$

3. $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$

   $y(0) = 0$

   $y'(0) = -3$

4. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$

   $y(0) = 0$

   $y'(0) = -3$

Hitung empat koefisien pertama dari penyelesaian deret kuasa persamaan diferensial dalam Latihan 5 sampai dengan 8 di sekitar titik awal.

5. $x^2y'' - xy' + x^2y = 0$

   $y(1) = 1$

   $y'(1) = 0$

6. $(1-x^2)y'' + xy' + y = 0$

   $y(6) = 4$

   $y'(6) = -1$

7. $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$

   $y(-6) = 4$

   $y'(-6) = 1$

8. $xy'' + (1-x)y' + 2y = 0$

   $y(2) = 0$

   $y'(2) = 0$

Cari bentuk dua penyelesaian yang bebas linear dari persamaan diferensial dalam Latihan 9 sampai dengan 14, di dekat titik x_0 yang diberikan. Apa yang dapat anda katakan tentang jari-jari kekonvergenan dari penyelesaian itu tanpa menyelesaikan persamaan itu ?

9. $y'' - xy = 0; x_0 = 0$

10. $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0; x_0 = 0$

11. $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0; x_0 = 1$

12. $(1 - x^2)y'' - xy' + 16y = 0; x_0 = 0$

13. $(1 - x^2)y'' - xy' + 16y = 0; x_0 = -1$

14. $x(3 - x)y'' + (1 - 3x)y' - y = 0;\ x_0 = 8$

Hitung deret Frobenius sebagai penyelesaian dalam Latihan 15 sampai dengan 18, di dekat titik $x_0 = 0$.

15. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$

16. $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$

17. $xy'' + (1 - x)y' + 3y = 0$

18. $x(1 - x)y'' + \left(\frac{1}{3} - 2x\right)y' + 2y = 0$

19. Turunkan deret Taylor untuk fungsi cos *x* dengan menyelesaikan MNA

    $y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

    Dengan menggunakan metode deret kuasa.

20. Turunkan deret Taylor untuk fungsi e^{-x} dengan menyelesaikan MNA

    $y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

    Dengan metode deret kuasa.

21. Buktikan bahwa penyelesaian dari persamaan diferensial Euler

    $x^2 y'' + A_0 xy' + B_0 y = 0$

    Yang terdapat dalam Bagian 2.7 ialah seperti dilukiskan oleh Teorema 1, Bagian 5.5. Apa yang tertulis di atas dapat digunakan sebagai motivasi untuk deret sebagai penyelesaian di sekitar titik singular yang regular.

Sumber Bacaan:

Santoso, Widiarti. (1998). *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern edisi 2*. Jakarta: Erlangga