Ringkasan Materi Kuliah

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR
(PERSAMAAN LINEAR)

1.1 Pendahuluan

Persamaan diferensial yang kita pelajari dalam bab sebelumnya adalah persamaan diferensial yang mengandung satu fungsi yang tak diketahui.. Karena beberapa alasan, antara lain termasuk penerapan dan perampatan (generalisasi), orang menjadi tertarik untuk mempelajari sistem *n* buah persamaan diferensial dengan *n* buah fungsi tak diketahui, di mana *n* merupakan bilangan bulat positif ≥ 2. Dalam bab ini kita hanya memperhatikan sistem dari dua persamaan diferensial dengan dua fungsi yang tak diketahui yang berbentuk

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + f_2(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

dengan koefisien a_{22},a_{12}, n_{21}, a_{22}, dan fungsi-fungsi f_1 , f_2 ;semua merupakan fungsi t yang kontinu pada suatu selang *I* dan x_1, x_2 adalah fungsi t yang tak diketahui.

Dalam bagian ini, kita sajikan beberapa definisi dan beberapa teorema dasar tentang sistem (1) yang disampaikan tanpa bukti. Definisi-definisi dan teorema-teorema ini dengan mudah diperluas ke sistem n persamaan diferensial linear dengan n fungsi-fungsi yang tak diketahui dalam bentuk

$$\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,(t)x_j + f_i(t), \qquad i = 1, 2\,.\,.\,.\,, n \qquad (2)$$

Dalam bagian berikut kita akan menyajikan dua metode dasar untuk mencari penyelesaian eksplisit dari sistem (1) jika koefisien-koefisien a_{11}, a_{12}, a_{21} dan a_{22} semuanya konstanta. Metode-metode ini, dengan tingkat kesukaran yang berbeda, dapat diperluas untuk menyelesaikan sistem (2) jika koefisien a_{ij} semua konstanta.

Definisi 1

Suatu penyelesaian sistem (1) merupakan sepasang fungsi-fungsi $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ yang masing-masing dapat diturunkan pada suatu selang I dan yang jika disubstitusikan ke dalam kedua persamaan dari (1) membuat identitas dalam t untuk semua t di dalam I.

Sebagai contoh,

$$x_1(t) = -\frac{3}{2}t - \frac{5}{4},\ x_2(t) = -t - \frac{3}{2}$$

merupakan penyelesaian sistem

$$\dot{x}_1 = x_2 + t$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 + 1 \qquad (3)$$

untuk semua t, seperti pembaca dapat membuktikannya dengan mudah.

Kadang-kadang tepat (dan sesuai untuk mempelajari sistem yang lebih umum) untuk menyatakan penyelesaian (1) dengan vektor kolom

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Sebagai contoh,

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}t - \frac{5}{4} \\ -t - \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

merupakan penyelesaian sistem (3).

Definisi 2

Jika kedua fungsi f_1 dan f_2 dari (1) sama dengan not, sistem itu disebut homogen. Dalam hal lain sistem itu disebut takhomogen.

Sebagai contoh, sistem (3) adalah takhomogen. Sebaliknya, sistem

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 \qquad (4)$$

adalah homogen. Pembaca dapat membuktikan bahwa kedua vektor

$$\begin{bmatrix} .e^t \\ e^t \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

merupakan penyelesaian sistem (4).

Untuk sebagian besar, teori sistem linear mirip teori persamaan diferensial linear. Kita perhatikan sistem homogen

$$\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 \qquad (6)$$

di mana koefisien-koefisien a_{11}, a_{12}, a_{21}, dan a_{22} merupakan fungsi-fungsi kontinu pada suatu selang *I*. Seperti dalam hal persamaan diferensial linear, kita mempunyai teorema berikut ini.

Teorema 1

Setiap kombinasi linear dari penyelesaian-penyelesaian (6) juga merupakan suatu penyelesaian (6).

Sebagai contoh, kedua vektor kolom dalam (5) masing-masing adalah penyelesaian sistem (4); karena itu, untuk setiap konstanta c_1, dan c_2 kombinasi linear

$$c_1\begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^t + c_2e^{2t} \\ c_1e^t + 2c_2e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

juga suatu penyelesaian dari (4).

Definisi 3

Vektor kolom

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

yaitu, x_1 (t) = 0, x_2 (t) ≡ 0, merupakan penyelesaian dari (6) untuk setiap pilihan koefisien-koefisiennya. Penyelesaian ini disebut penyelesaian trivial. Setiap penyelesaian dari (6) yang lain disebut penyelesaian taktrivial.

Definisi 4

Dua penyelesaian

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix} \textbf{\textit{dan}} \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} \qquad \textbf{\textit{(8)}}$$

ini berarti,

$$c_1 \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \textbf{\textit{untuk semua t dalam I}}$$

Ini berarti

$$c_1 x_{11}(t) + c_2 x_{12}(t) = 0 \quad dan \ c_1 x_{21}(t) + c_2 x_{22}(t) = 0$$

untuk semua t dalam I mengakibatkan c_l = c_2 = 0. Sebaliknya pernyataan (8) dikatakan penyelesaian tergantung linear.

Sebagai contoh, kita dapat menunjukkan bahwa kedua penyelesaian dalam (5) adalah penyelesaian bebas linear dari (4). Jelaslah, jika

$$c_1 \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

maka $c_1 e^t + c_2 e^{2t} = 0$ dan $c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} = 0$. Kurangkan persamaan pertama dari kedua, kita peroleh $c_2 e^{2t} = 0$. Jadi c_2 = 0. Akibatnya, persamaan pertama menjadi $c_1 e^t = 0$ dan dengan demikian c_1 = 0. Jadi c_1 = c_2 = 0, yang menentukan tuntutan kita. Pembaca dapat membuktikan bahwa

$$\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 6e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

merupakan penyelesaian dari (4) yang tergantung linear.

Kriteria berikut, mengingatkan bahwa determinan Wronski dapat digunakan untuk memeriksa ketergantungan atau kebebasan linear penyelesaian-penyelesaian dari sistem (6).

Teorema 2

Kedua penyelesaian

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix} dan \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}$$

dari sistem

$$\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2$$

adalah bebas linear pada suatu selang I, jika dan hanya jika determinan Wronski

$$\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

Sebagai contoh, kedua penyelesaian (5) dari sistem (4) adalah bebas linear, karena

$$\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 2e^{3t} - e^{3t} = e^{3t} \neq 0 \; untuk \;\; semua \;\; t$$

Sebaliknya, kedua penyelesaian (9) dari sistem (4) adalah tergantung linear, karena

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & 3e^{2t} \\ 2e^{2t} & 6e^{2t} \end{vmatrix} = 6e^{4t} - 6e^{4t} = 0.$$

Teorema dasar keujudan dan ketunggalan untuk sistem linear berikut disajikan tanpa bukti. Pembaca akan mengakui kemiripan yang sangat antara teorema ini dan teorema keujudan-ketunggalan dari Bab 2.

Teorema 3

Misalkan bahwa koefisien-koefisien a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} dan fungsi-fungsi f_1 dan f_2 dari sistem

$$\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t) \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

semua kontinu pada suatu selang I. Misalkan t_0 sebuah titik di dalam I dan misalkan x_{10} dan x_{20} dua konstanta yang diketahui. Maka MNA yang terdiri dari sistem (1) dan syarat awal

$$x_1(t_0) = x_{10}, \qquad x_2(t_0) = x_{20}$$

mempunyai penyelesaian tunggal.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, penyelesaian tunggal ini berlaku pada seluruh selang I.

Dengan menggunakan teorema di atas, pembaca dapat membuktikan (dengan substitusi langsung) bahwa penyelesaian tunggal MNA

$$\dot{x}_1 = x_2 + t$$

$$\dot{x}_t = -2x_1 + 3x_2 + 1 \qquad (10)$$

$$x_1(0) = -1$$

$$x_2(0) = -\frac{5}{4}$$

berbentuk

$$x_1(t) = \frac{1}{4}e^t - \frac{3}{2}t - \frac{5}{4} \qquad (11)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{4}e^t - t - \frac{3}{2}$$

Teorema 4

Ada dua penyelesaian bebas linear dari sistem

$$\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 \qquad \textbf{\textit{(6)}}$$

Selanjutnya, jika kedua vektor kolom

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix} \; dan \; \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}$$

merupakan penyelesaian bebas linear dari (60, maka penyelesaian umum dari sistem (6) diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix};$$

ini berarti,

$$x_1(t) = c_1 x_{11}(t) + c_2 x_{12}(t)$$
$$x_2(t) = c_1 x_{21}(t) + c_2 x_{22}(t),$$

dimana c_1 dan c_2 konstanta sebarang

Sebagai contoh, penyelesaian umum dari (4) diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{2t}\,] \\ 2e^{2t} \end{bmatrix};$$

ini berarti,

$$x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{et} \;\; dan \;\; x_2(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} \qquad (12)$$

Teorema 5

Jika kedua peyelesaian

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix} \; dan \; \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}$$

dari sistem

$$\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2$$

adalah bebas linier dan jika

$$\begin{bmatrix} x_{1p}(t) \\ x_{2p}(t) \end{bmatrix}$$

merupakan penyelesaian khusus dari sistem

$$\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t) \qquad \textbf{(1)}$$

penyelesaian umum dari* (1) *diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1p}(t) \\ x_{2p}(t) \end{bmatrix};$$

ini berarti

$$x_1(t) = c_1x_{11}(t) + c_2x_{12}(t) + x_{1p}(t)$$
$$x_2(t) = c_1x_{21}(t) + c_2x_{22}(t) + x_{2p}(t)$$

1.2 Metode Eliminasi

. Tujuan metode ini ialah untuk mengubah sistem linear yang diberikan ke suatu persamaan diferensial tunggal dalam satu fungsi yang tak diketahui dengan mengeliminasikan peubah bebas lainnya.

Contoh 1

Cari penyelesaian umum sistem linear homogen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + 3x_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Penyelesaian

Dengan menurunkan kedua ruas dari persamaan pertama menurut t, dan menggunakan persamaan kedua kita peroleh

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2.$$

Dari persamaan pertama dalam (1) diketahui bahwa $x_1 = \dot{x}_1$, jadi

$$\ddot{x} = -2x_1 - 3x_1$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 - 3\dot{x}_1 + 2x_1 = 0 \qquad (2)$$

. Penyelesaian umum Persamaan (2) berbentuk

$$x_1(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} \tag{3}$$

$$x_2(t) = c_1e^t + 2c_2e^{2t} \tag{4}$$

Metode eliminasi dapat juga diterapkan pada sistem takhomogen.

Contoh 2 Cari penyelesaian umum sistem takhomogen

$$\dot{x}_1 = x_2 + t$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 + 1 \tag{5}$$

Penyelesaian Seperti pada contoh sebelumnya, dengan menurunkan kedua ruas dari persamaan pertama menurut t dan menggunakan persamaan kedua, kita peroleh

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 + 1 = -2x_1 + 3x_2 + 2.$$

Dengan menggunakan persamaan pertama dalam (5) did apat

$$\ddot{x}_1 = -2x_1 + 3(\dot{x}_1 - t) + 2.$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 - 3\dot{x}_1 + 2x_1 = -3t + 2. \tag{6}$$

Jadi, kita telah berhasil mengeliminasikan peubah x_2 dari sistem (5), dan memperoleh diferensial takhomogen (6), yang memuat satu fungsi dan dapat diselesaikan. Penyelesaian persamaan homogen yang berkaitan dengan Persamaan (6) berbentuk.

$$x_{1h} = c_1e^t + c_2e^{2t} \tag{7}$$

Penyelesaian khusus dari Persamaan (6) berbentuk $x_{1p} = At + \Rightarrow \dot{x}_{1p} = A,$

$$\ddot{x}_{1p} = 0 \Rightarrow -3A \quad 2At + 2B = -3t + 2 \Rightarrow 2A = -3$$

dan

$$-3A + 2B = 2 \Rightarrow A = -\tfrac{3}{2} \text{ dan } B = -\tfrac{5}{4} \Rightarrow x_{1p} = -\tfrac{3}{2}t - \tfrac{5}{4} \tag{8}$$

Dengan menjumlahkan (7) dan (8), kita peroleh penyelesaian umum Persamaan (6)

$$x_1(t) = c_1e^t + 2c_2e^{2t} - t - \tfrac{3}{2}t - \tfrac{5}{4} \tag{9}$$

Sekarang dari persamaan pertama (5), kita punyai $x_2 = \dot{x}_1 - t$, jadi

$$x_2(t) = c_1e^t + 2c_2e^{2t} - t - \tfrac{3}{2} \tag{10}$$

Persamaan (9) dan (10) merupakan penyelesaian umum dari (5)

Contoh 3 Selesaikan MNA

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + 4x_2 \tag{11}$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 \tag{12}$$

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 3 \tag{13}$$

Penyelesaian

Dengan menurunkan kedua ruas dari (11) dan dengan menggunakan (12) kemudian menggunakan (11) lagi, kita peroleh

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -3\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 = -3\dot{x}_1 + 4(-2x_1 = 3x_2) \\ &= -3\dot{x}_1 - 8x_1 + 12x_2 = -3\dot{x}_1 - 8x_1 + 3(\dot{x}_1 + 3x_1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 - x_1 = 0,$$

Jadi,

$$x_1(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}. \tag{14}$$

Jadi, dari Persamaan (11) kita dapatkan

$$4x_2 = \dot{x}_1 + 3x_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-t} - 3c_1e^t + 3c_2e^{-t} = 4c_1e^t + 2c_2e^{-t},$$

Dan juga.

$$x_2(t) = c_1e^t + \tfrac{1}{2}c_2e^{-t} \tag{15}$$

Dengan menggunakan syarat awal (13) dalam persamaan (14) dan (15), kita peroleh

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -1 \\ c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 &= 3. \end{aligned}$$

Jadi, $c_1 = 7$, $c_2 = -8$, dan penyelesaian MNA (11)-(13) berbentuk

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 7e^t - 8e^{-t} \\ x_2(t) &= 7e^t - 4e^{-t}. \end{aligned}$$

Contoh 4

Cari penyelesaian umum sistem

$$\dot{x}_1 = x_2 + 1$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

Penyelesaian

Turunkan kedua ruas dari persamaan pertama menurut t dan gunakan persamaan kedua, kita peroleh $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = x_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$. Setelah kita mendapatkan $x_1(t)$, kita cari $x_2(t)$ dari persamaan pertama atau dari persamaan kedua dalam sistem itu. Jika kita gunakan persamaan pertama, kita dapatkan $x_2(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} - 1$, dan bagaimana kita harapkan, penyelesaian umum sistem itu mengandung dua konstanta sebarang. Tetapi, jika kita mencari $x_2(t)$ dari persamaan kedua dalam sistem itu, kita harus mengintegralkan dan menghasilkan konstanta sebarang yang ketiga. Dalam hal ini $x_1(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$ dan $x_2(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3$. Jika kita substitusikan fungsi-fungsi itu ke dalam sistem di atas dan suku-suku yang serupa disamakan, kita dapatkan bahwa c_3 sama dengan -1. Jadi penyelesaian umum itu berbentuk

$$x_1(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}, \qquad x_2(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} - 1$$

1.3. Metode Matriks

Metode dalam bagian ini, yang dikenal sebagai *metode matriks*, mempunyai keuntungan karena dapat dengan mudah dikembangkan ke sistem persamaan diferensial linear dalam n buah fungsi yang takdiketahui dan dengan koefisien konstan.

Demi kemudahan, kita sajikan segi utama dari metode ini dalam kasus khusus dari sistem linear homogen dengan koefisien konstanta dari bentuk

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{12}x_2 + a_{22}x_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Kita akan mencari penyelesaian sistem (1) dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 e^{\lambda t} \\ A_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Konstanta A_1, A_2, dan λ akan ditentukan kemudian dengan persyaratan bahwa $x_1 = A_1 e^{\lambda t}$ dan $x_2 = A_2 e^{\lambda t}$ memenuhi sistem (1). Dengan melakukan substitusi (2) ke dalam (1), kita dapatkan bahwa A_1, A_2, dan λ harus memenuhi persamaan

$$A_1 \lambda e^{\lambda t} = a_{11} A_1 e^{\lambda t} + a_{12} A_2 e^{\lambda t}$$

$$A_2 \lambda e^{\lambda t} = a_{21} A_1 e^{\lambda t} + a_{22} A_2 e^{\lambda t}$$

Dengan membagi seluruhnya oleh $e^{\lambda t}$ dan mengelompokkan suku-suku yang serupa, kita peroleh padanan sistem

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) A_1 + a_{12} A_2 &= 0 \\ a_{21} A_1 + (a_{22} - \lambda) A_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Sistem (3) hanya terdiri dari dua persamaan, yang memuat tiga besaran yang takdiketahui, λ, A_1, dan A_2. Meskipun demikian, kita dapat menyelesaikan sistem ini dengan cara berikut. Kita tinjau sistem (3) sebagai suatu sistem persamaan diferensial linear homogen, karena $(A_1, A_2) = (0,0)$ menghasilkan peyelesaian trivial $x_1(t) = 0,\ x_2(t) = 0$ dari sistem (1). Jadi, (A_1, A_2) harus berbeda dari (0,0). Sekarang kita tinjau kembali (Apendik A) bahwa suatu sistem persamaan aljabar yang homogen mempu nyai penyelesaian taktrivial jika dan hanya jika determinan koefisiennya sama degan nol. Dalam hal sistem (3), ini berarti ada penyelesaian $(A_1, A_2) \neq (0,0)$ jika dan hanya jika

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0; \tag{4}$$

atau

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0. \tag{4'}$$

Definisi 1

Persamaan (4') dsebut persamaan karakteristik dari sistem (1), dan akar-akar persamaan karakteristik itu disebut akar-akar karakteristik dari sistem.

Akan berguna bagi pembaca untuk mencatat keadaan ini, bahwa determinan dalam persamaan (4) diperoleh dari determinan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Dari koefisien sistem (1) dengan mengurangi unsur diagonal utamanya oleh λ. Dalam analisis matriks, persamaan (4) disebut *persamaan karakteristik* dari matriks

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Dan akar-akar persamaan karakteristik itu disebut *akar-akar karakteristik* atau *nilai eigen* matriks (5).

Andaikan λ_1 dan λ_2 akar-akar karakteristik sistem (1), maka ada tiga kemungkinan yang terjadi, yaitu;

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$. selesaiannya adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 e^{\lambda t} \\ A_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 e^{\lambda t} \\ A_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

2) $\lambda_1 = \lambda_2$, selesaiannya adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 e^{\lambda t} \\ A_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 t = b_1) e^{\lambda_1 t} \\ (a_2 t = b_2) e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

3) $\lambda_1 = a + bi, \cdots \lambda_2 = a - bi$ ..

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 e^{(a+bi)t} \\ A_2 e^{(a+bi)t} \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 e^{(a-bi)t} \\ A_2 e^{(a-bi)t} \end{bmatrix}$$

(6)

Contoh 1 Cari penyelesaian umum sistem homogen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 + 6x_2 \end{aligned} \qquad (7)$$

Penyelesaian

Akan kita cari suatu penyelesaian dari sistem (7) yang berbentuk

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 e^{\lambda_1 t} \\ A_2 e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \tag{8}$$

λ adalah akar persamaan karakteristik (ingat bahwa $a_{11} = 2,\ a_{12} = 1,\ a_{21} = -3,\ dan\ a_{22} = 6$)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad atau\ \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0.$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 5$. Jika $\lambda = \lambda_1 = 3$, konstanta A_1 dan A_2 dari penyelesaian (8) harus memenuhi sistem homogen (3), yaitu,

$$\begin{aligned} -A_1 + A_2 &= 0 \\ -3A_1 + 3A_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow A_1 = A_2$$

Dengan memilih $A_1 = A_2 = 1$, kita dapatkan penyelesaian

$$\begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Jelaslah, setiap penyelesaian taktrivial dari sistem ini (misalnya, $A_1 = A_2 = 2$) akan memberikan penyelesaian lain yang bergantung linear dengan (9)]. Jika $\lambda = \lambda_2 = 5,$ sistem (3) menjadi

$$\begin{aligned} -3A_1 + A_2 &= 0 \\ -3A_1 + 3A_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow A_2 = 3A_1$$

Pilihan $A_1 = 1$ memberikan $A_2 = 3$, dan kita peroleh penyelesaian lain dari (7)

$$\begin{bmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Mudah dilihat (dengan menerapkan Teorema 2 daei Bagian 3.1) bahwa kedua penyelesaian (9) dan (10) dari sistem (7) adalah bebas linear, dan karena itu penyelesaian umum dari (7) adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{bmatrix};$$

Ini berarti,

$$x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t}$$
$$x_2 = c_1 e^{3t} + 3c_2 e^{5t}$$

Contoh 2

Cari penyelesaian umum sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= 9x_1 + 2x_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Penyelesaian

Persamaan karakteristik dari sistem (11) adalah

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 9 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \ atau \ \ \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

Dengan akar-akar karakteristtik $\lambda_1 = 2 + 3i \ dan \ \lambda_2 = 2 - 3i$. Bila $\lambda_1 = 2 + 3i$, konstanta-konstanta A_1 dan A_2 dari penyelesaian (8) memenuhi sistem homogen (3) dengan $a_{11} = 2,\ a_{12} = -1,\ a_{22} = 2,$ dan $\lambda_1 = 2 + 3i$. Jadi,

$$\begin{aligned} -3iA_1 - A_2 &= 0 \\ 9A_1 3iA_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow A_2 = -3iA_1$$

Dengan memilih A_1 = 1, kita dapatkan A_2 = -3i, dan karena itu.

$$\begin{bmatrix} e^{(2+3i)t} \\ -3ie^{(2+3i)t} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Merupakan sebuah penyelesaian dari (11). Jika $\lambda_2 = 2 - 3i$, konstanta-konstanta A_1 dan A_2 dari penyelesaian (8) memenuhi sistem homogen (3) dengan $a_{11} = 2,\ a_{12} = -1,\ a_{22} = 2,$ dan $\lambda_1 = 2 + 3i$. Jadi

$$\begin{bmatrix} e^{(2-3i)t} \\ 3ie^{(2-3i)t} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Merupakan penyelesaian (11). Dengan menerapkan Teorema 2 dari Bagian 3.1, mudah dilihat bahwa penyelesaian (12) dan (13) dari sistem (11) adalah bebas linear, dan karena itu penyelesaian umum dari (11) berbentuk

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{(2+3i)t} \\ -3ie^{(2+3i)t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{(2-3i)t} \\ 3ie^{(2-3i)t} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

Di mana c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang.

Contoh 3

Cari penyelesaian umum sistem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_2\end{aligned} \tag{15}$$

Penyelesaian

Persamaan karakteristik dari (15) adalah

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad atau \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Dengan akar-akar karakteristik $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$ Karena itu, konstanta A_1 dan A_2 dari sistem (8) memenuhi sistem homogen (3) dengan $a_{11} = 0,\ a_{12} = -1,\ a_{22} = 2,\ dan\ \lambda = 1.$ Jadi

$$\begin{aligned} -A_1 + A_2 &= 0 \\ -A_1 + A_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow A_1 = A_2.$$

Dengan memilih $A_1 = A_2 = 1$, kita peroleh penyelesaian

$$\begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} \tag{16}$$

Karena akar-akar karakteristiknya sama, kita cari penyelesaian kedua dari (15) yang bebas linear, berbentuk (6),

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 t + b_1)e^t \\ (a_2 t + b_2)e^t \end{bmatrix}, \tag{17}$$

Dimana konstanta-konstanta a_1, b_1, a_2, dan b_2 ditentukan demikian sehingga (17) penyelesaian dari (15) yang bebas linear dari (16). Dengan mensubstitusikan $x_1 = (a_1 t + b_1)e^t\ dan\ x_2 = (a_2 t + b_2)e^t$ ke dalam (15), kita peroleh

$$\begin{aligned} a_1 e^t + (a_1 t + b_1)e^t &= (a_2 t + b_2)e^t \\ a_2 e^t + (a_2 t + b_2)e^t &= -(a_1 t + b_1)e^t + 2(a_2 t + b_2)e^t. \end{aligned}$$

Dengan membagi oleh e^t dan menyamakan koefisien dari t yang berpangkat sama, kita dapatkan

$$a_1 + b_1 = b_2, \qquad a_1 = a_2$$
$$a_2 + b_2 = -b_1 + 2b_2, \quad a_2 = -a_1 + 2a_2 \tag{18}$$

Atau karena dua persamaan terakhir dalam (18) sepadan dengan dua yang pertama

$$a_1 + b_1 = b_2, \qquad a_1 = a_2 \tag{19}$$

Sekarang sebarang pilihan dari a_1, b_1, a_2, dan b_2 yang memenuhi (19) dan memberikan suatu penyelesaian yang bebas linear dari (16), dapat diterima. Misalnya, pilihan $a_1 = a_2 = 1$ dan $b_1 = 0$, dan $b_2 = 1$ menghasilkan penyelesaian

$$\begin{bmatrix} te^t \\ (t+1)e^t \end{bmatrix}, \tag{20}$$

Yang bebas linear dari (16) (Mengapa ?). jadi, penyelesaian umum dari (15) berbentuk

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} te^t \\ (t+1)e^t \end{bmatrix};$$

atau

$$x_1 = c_1 e^t + c_2 te^t \quad dan \quad x_2 = c_1 e^t + c_2 (t+1)e^t,$$

Dimana c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang.

Contoh 4

Cari penyelesaian umum sistem

$$\dot{x}_1 = x_1$$
$$\dot{x}_2 = x_2. \tag{21}$$

Penyelesaian

Persamaan karakteristik dari sistem (21) adalah

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad yakni, \ \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Dengan akar-akar karakteristik $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$ Karena itu, konstanta-konstanta A_1 dan A_2 dari penyelesaian (8) memenuhi sistem homogen (3) dengan $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$, dan $\lambda = 1.$ Maka,

$$\begin{matrix} 0.A_1 + 0.A_2 = 0 \\ 0.A_1 + 0.A_2 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow A_1 \text{ dan } A_2 \text{ merupakan konstanta sebarang.}$$

Mula-mula kita pilih $A_1 = 1,\ A_2 = 0$ dan kemudian $A_1 = 0,\ A_2 = 1,$ kita peroleh dua penyelesaian yang bebas linear.

$$\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} \quad dan \quad \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}$$

Jadi, penyelesaian umum dari sistem (21) berbentuk

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix};$$

atau

$$x_1 = c_1 e^t \quad dan \quad x_2 = c_2 e^t.$$

Sumber Bacaan:

Santoso, Widiarti. (1998). *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern edisi 2*. Jakarta: Erlangga