Ringkasan Materi Kuliah

Bab II

FUNGSI

2.1 FUNGSI REAL, FUNGSI ALJABAR, DAN FUNGSI TRIGONOMETRI

2.2 TOPIK-TOPIK YANG BERKAITAN DENGAN FUNGSI

2.3 FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

2.1 FUNGSI REAL, FUNGSI ALJABAR, DAN FUNGSI TRIGONOMETRI

FUNGSI REAL

Misalkan P, $Q \subseteq R$(himpunan bilangan Real), *fungsi* $f : P \rightarrow Q$ adalah suatu aturan yang mengaitkan $\forall x \in P$ dengan tepat satu unsur $\in Q$. Pengkaitannya ditentukan oleh suatu aturan, yang diberi lambang $y = f(x)$, Pada definisi ini, daerah asal fungsi f adalah himpunan P, ditulis $D_f = P$; sedangkan daerah nilai fungsi f adalah himpunan $R_f = \{f(x) : x \in D\}$. Unsur $f(x) \in Q$ dinamakan nilai fungsi f. Bila pada suatu fungsi hanya diketahui aturannya saja, katakanlah $y = f(x)$, maka daerah asal fungsi f adalah himpunan

$$D_f = \{f(x) \in R : f(x) \in R\}$$

dan daerah nilainya adalah himpunan

$$R_f = \{f(x) \in R : f(x) \in D_f\}$$

Kita mempunyai fungsi $y = f(x)$ dengan daerah asal D_f dan daerah nilai R_f. Himpunan titik

$$\{(x,y) \in R^2 : y = f(x), x \in R_f\}$$

dinamakan *grafik fungsi f*

Ilustrasi

Kita akan menentukan daerah asal, daerah nilai, dan grafik fungsi

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

agar *$f(x) \in R$*, syaratnya adalah *$x+1 \geq 0$*, sehingga daerah asal fungsi *f* adalah

$$Df = \{x / x \geq -1\}$$

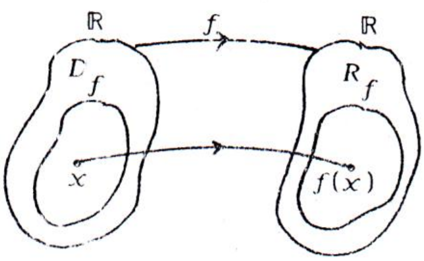
Kemudian, karena $\forall$ *$x \geq -1$* berlaku $\sqrt{x+1} \geq 0$, sehingga daerah nilai fungsi *f* adalah

$$Rf = \{x / x \geq 0\}$$

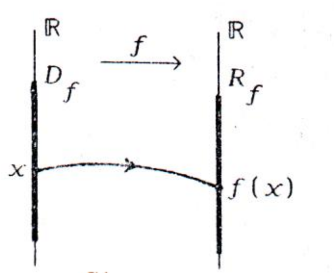
Grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x+1}$ diperlihatkan pada Gb. 1

Gb.1 Grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x+1}$

Pada konsep fungsi real, daerah asal dan daerah nilai fungsi f merupakan himpunan bagian dari R Fungsi f seperti ini dinamakan fungsi dengan *peubah real* dan *bernilai real*, disingkat *fungsi real*. Fungsi real dengan aturan y = f (x) dapat digambarkan sebagai diagram panah pada Gb.27 atau Gb.28.



Gb.2



Gb.3

Contoh 1 *Daerah asal dan daerah nilai fungsi pecahan linear.*

Tentukan daerah asal dan daerah nilai fungsi f (x) = $\frac{x-1}{x}$

Jawab

Agar $f(x) \in R$, syaratnya $x \neq 0$, jadi daerah asal fungsi f adalah

$$D_f = R. - \{0\}$$

Untuk menentukan daerah nilai fungsi *f*, misalkan) $y = f(x) = \frac{x-1}{x}$ kemudian nyatakan *x* dalam *y* dan perhatikan syaratnya, diperoleh

$$yx = x - 1$$

$$(y - 1)\,x = -1$$

$$x = \frac{-1}{y-1}`\, y \neq 1$$

Jadi daerah nilai fungsi *f* adalah R_f = R - {1}.

Contoh 2 *Daerah asal dan daerah nilai fungsi kuadrat.*

Tentukan daerah asal dan daerah nilai fungsi

$$f(x) = x^2 - 6x + 10 \text{ dan } g(x) = 4x - x^2$$

Jawab

Karena f (x) dan g (x) $\in R$ untuk setiap x $\in R$, maka daerah asal fungsi f dan g adalah

$$D_f = R \text{ dan } D_g = R$$

Untuk menentukan daerah nilai fungsi f, tulislah

$$f(x) = (x - 3)^2 + 1$$

karena $\forall$ R x $\in R$ berlaku $(x - 3)^2 \geq 0$, maka f (x) ≥ 1 $\forall$ x $\in$ R, akibatnya daerah nilai fungsi f adalah

$$Rf = [1, \infty)$$

Untuk menentukan daerah nilai fungsi g, tulislah

$$g(x) = 25 - 25 + 10x - x \;\; = 25 - (x-5)^2$$

Karena $\forall$ x $\in$ R berlaku $-(x-5)^2 \leq 0$, maka g (x) $\leq$ 25 $\forall$ x $\in$ R, akibatnya daerah nilai fungsi g adalah

$$Rg = \{x / x \leq 25\}$$

FUNGSI ALJABAR

Fungsi aljabar adalah suatu fungsi elementer yang diperoleh dari sejumlah berhingga operasi aljabar(penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, pemangkatan, dan penarikan akar ke-n, n = 2,3,…) atas *fungsi konstan* y = k dan *fungsi identitas* y = x. Fungsi elementer yang bukan fungsi aljabar dinamakan *fungsi transenden.*

Contoh

$$f(x) = \frac{x}{x-1}, g(x) = \sqrt{1-2x}, \text{ dan } h(x) = \frac{3x}{1+\sqrt[3]{x}}$$

semuanya adalah fungsi aljabar karena diperoleh dari sejumlah berhingga operasi aljabar atas y = k dan y = x. Tetapi fungsi

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = 2^x, \quad \text{dan } h(x) = \log(1 + x^2)$$

Semuanya bukan fungsi aljabar karena tidak mungkin diperoleh dari sejumlah berhingga operasi aljabar atas y = k dan y = x.

Suku banyak Bentuk umumnya adalah

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

Disini a_o, a_1,R, a_n dinamakan koefisien suku banyak, a_o dinamakan *koefisien pemuka (leading coefficient).* Bila $a_o \neq 0$, derajat suku banyak ini adalah n.

Kasus n = 1: Fungsi linier

Bentuk umum fungsi linier adalah y = f(x) = ax + b. Daerah asal dan daerah nilai fungsi linier adalah

$$D_f = R \text{ dan } R_f = \begin{cases} R, bila. a \neq 0 \\ \{b\}, bila, a = 0 \end{cases}$$

Grafik fungsi linear adalah garis lurus. Berbagai sifat tentang ini telah dipelajari pada Pasal 1.3. Sistem Koordinat dan Garis Lurus.

Kasus n = 2: Fungsi Kuadrat

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $y = f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. Daerah asal fungsi ini adalah $D_f = R$ Untuk menentukan daerah nilainya, tulislah

(*) $$y = f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a}, a \neq 0$$

Dengan $D = b^2 - 4ac$. Bilangan real D dinamakan diskriminan bentuk kuadratnya. Dari bentuk ini diperoleh $f(x) \geq \frac{-D}{4a}$ bila $a > 0$, dan $f(x) \leq \frac{-D}{4a}$ bila $a < 0$. Jadi daerah nilai fungsi kuadrat adalah

$$R_f = \left[\frac{-D}{4a}, +\infty\right) \text{ bila } a > 0, \qquad \text{dan} \qquad R_f = \left(-\infty, \frac{-D}{4a}\right] \text{ bila } a < 0$$

Dari bentuk (*) juga diperoleh

$$f(x) > \forall \in R \Leftrightarrow a > 0 \text{ dan } D < 0$$

$$f(x) < \forall \in R \Leftrightarrow a < 0 \text{ dan } D < 0$$

Fungsi kuadrat yang nilainya selalu positif untuk setiap $x \in R$ dinamakan *definit positif,* syaratnya adalah $a > 0$ dan $D < 0$. Fungsi kuadrat yang nilainya selalu negatif untuk setiap $x \in R$ dinamakan *definit negatif,* syaratnya adalah $a < 0$ dan $D < 0$.

Grafik fungsi kuadrat dinamakan parabol. Pada fungsi kuadrat $y = \pm x^2 + k$, bila peranan x diganti oleh (-x), maka akan diperoleh bentuk yang sama. Akibatnya, grafik fungsi ini simetri terhadap sumbu y (garis x = 0). Berdasarkan ini diperoleh bahwa grafik fungsi kuadrat

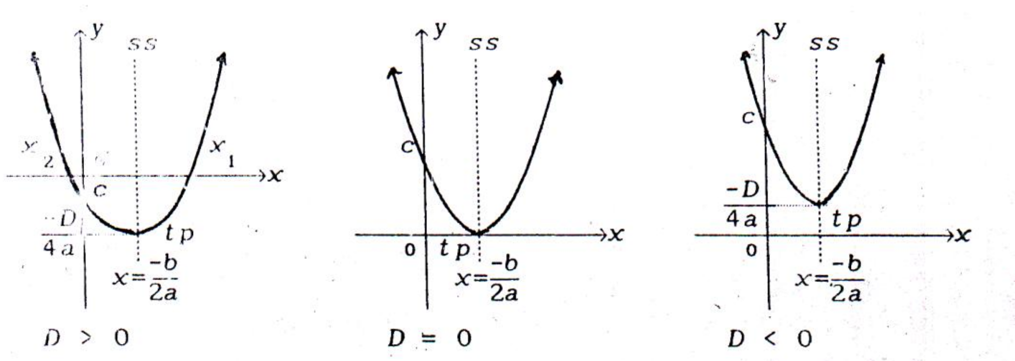
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a}, a \neq 0$$

Simetri terhadap garis $x = \frac{-b}{2a}$. (Jelaskan mengapa!). Garis $x = \frac{-b}{2a}$ ini dinamakan *sumbu simetri parabol.*

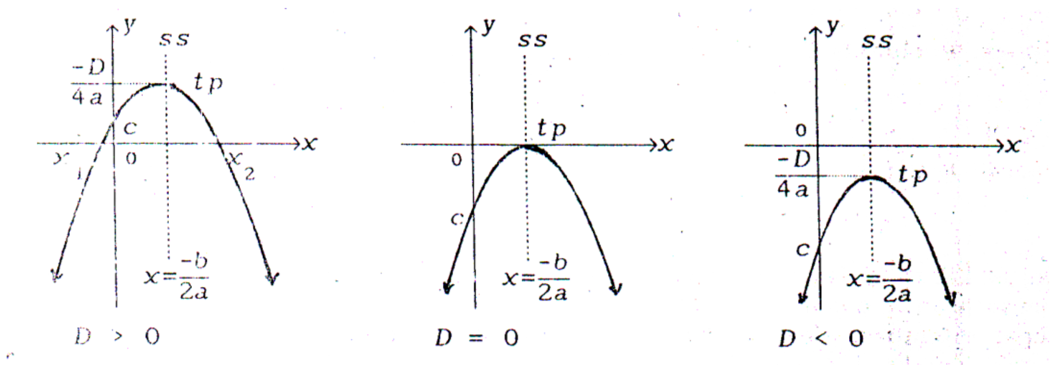
Sifat grafik fungsi $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ adalah sebagai berikut

- ○ Parabol terbuka ke atas bila $a > 0$, dan terbuka ke bawah bila $a < 0$.
- ○ Titik $\left[\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right]$ dinamakan titik puncak parabol.
- ○ Untuk kasus $D > 0$, parabol memotong sumbu x di titik $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ dengan $x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{4a}$ dan $x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$. Untuk kasus ini, $x_1 > x_2$ bila $a > 0$ dan $x_1 < x$ bila $a < 0$.
- ○ Untuk kasus $D = 0$, parabol menyinggung sumbu x di titik $\left[\frac{-b}{2a}, 0\right]$.
- ○ Untuk kasus $D < 0$, parabol terletak di atas sumbu x bila $a > 0$ (definit positif), dan terletak di bawah sumbu x bila $a < 0$ (definit negatif).

Pada Gb. 29 dn Gb.30 diperlihatkan parabol untuk semua kasus yang mungkin.



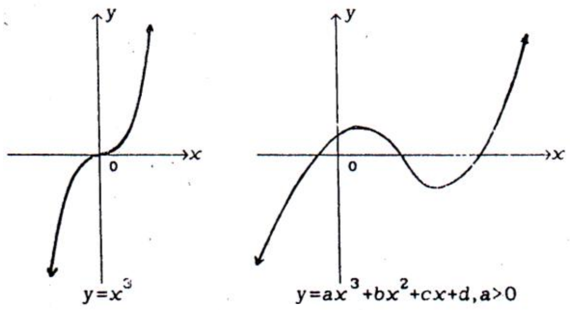
Gb.4. Parabol untuk kasus a > 0



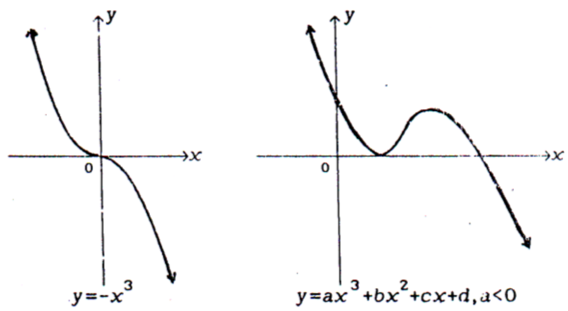
Gb.5 Parabol untuk kasus a < 0

Kasus n = 3: Fungsi kubik (Pangkat tiga)

Bentuk umum fungsi kubik adalah $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. Daerah asal dan daerah nilai fungsi ini adalah $D_f = R$ dan $R_f = R$. Fungsi ini selalu memotong sumbu x, paling sedikit di satu titik. Untuk kasus a > 0, grafiknya mempunyai dua kemungkinan, selalu naik, atau mempunyai dua titik pundak. Demikian juga untuk kasus a < 0, grafiknya selalu turun, atau mempunyai dua titik puncak. Perhatikan Gb.31. dn Gb.32 yang memperlihatkan model grafik untuk fungsi ini untuk kasus a > 0, dan a < 0.



Gb.31. Grafik f (x) = $ax^3 + bx^3 + cx + d$ untuk kasus a > 0



Gb.6. Grafik f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ untuk kasus a < 0

Fungsi Rasional Bentuk umum fungsi rasional adalah

$$y = f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}, \text{ A dan B suku banyak}$$

daerah asal fungsi ini adalah

$$D_f = \{ x \in R : B(x) \neq 0 \} = R - \{ x \in R : B(x) = 0\}$$

Untuk kasus Adan B berbentuk linear, daerah nilainya dapat ditentukan dengan menyatakan x dalam y. Untuk kasus A atau Bberbentuk kuadrat, daerah nilainya dapat ditentukan dengan sifat diskriminan dari bentuk kuadrat dalam x dan y.. Secara umum, daerah nilai fungsi rasional sukar ditentukan.

Fungsi Irasional Bentuk umum fungsi irasional adalah

$$y = f(x) = \sqrt[n]{g(x)}\text{, g fungsi rasional, n = 2, 3,}\ldots$$

Daerah asal fungsi ini adalah $D_f = \{x \in R : g(x) \geq 0\}$ bila n bilangan genap, dan $D_f = D_g$ bila n bilangan ganjil.

FUNGSI TRIGONOMETRI

Ukuran sudut

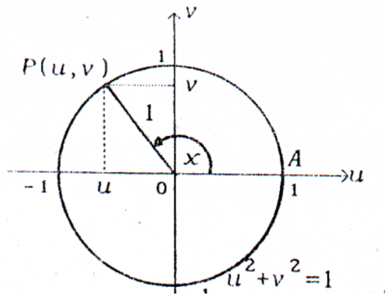
- Satu derajat, ditulis 1^o, adalah besarnya sudut pusat lingkaran di hadapan busur lingkaran yang panjangnya 1/360 keliling lingkaran.
- Satu radian, ditulis 1 rad, atau 1, adalah besarnya sudut pusat lingkaran berjari-jari r dihadapan busur lingkaran yang panjangnya juga r satuan.
- Hubungan antara ukuran derajat dan radian :

$$2\pi \text{ radian} = 360^o = \text{satu keliling lingkaran}$$

$$1^o = \frac{2\pi}{360^o} \approx 0{,}0175 \text{ rad,} \qquad \text{dan} \qquad 1 \text{ rad} = \frac{360^o}{2\pi} \approx 57{,}3^o$$

FUNGSI TRIGONOMETRI

Dalam lingkaran satuan $u^2 + v^2 = 1$, tetapkan sudut pusat x, $0 \leq x \leq 2\pi$ sehingga diperoleh sector OAP dengan koordinat P (u, v), perhatikan Gb. 33.



Gb. 7

Disini x adalah *sudut positif* karena diukur dari sumbu u positif ke *OP berlawanan arah putaran jarum jam. Sudut negatif* adalah sudut yang diukur dari sumbu u positif ke *OP searah dengan putaran jarum jam.*

Fungsi trigonometri dar x, x = <AOP, A (1,0) P (u,v) didefinisikan sebagai berikut.

Cosinus sudut x	: cos x = absis titik P (u,v) = u
Sinus sudut x	: sin x ordinat titik P (u, v) =
Tangent sudut x	: tan x = $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{v}{u}$, u $\neq$ 0
Contangent sudut x	: cot x = $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u}{v}$, v $\neq$ 0
Secant sudut x	: sec x = $\frac{1}{\cos x} = \frac{i}{u}$, u $\neq$ 0
Cosecant sudut x	: csc x = $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{v}$, v $\neq$ 0

Karena u dan v memenuhi $u^2 + v^2 = 1$, maka $-1 \leq u \leq 1$ dan $-1 \leq v \leq 1$, jadi -1 ≤ cos x ≤ 1 dan -1 ≤ x ≤ 1

Jika x = ∠AOP dengan A (1,0) dan P (u,v), maka –x = ∠AOQ dengan Q (u,v). Jadi sudut –x dan x berbeda hanya arah pengukuran sudutnya. Akibatnya kita mempunyai hubungan antara fungsi trigonometri sudut x dan sudut –x sebagai berikut.

Cos (-x) = cos x	cot (-x) = -cot x
Sin (-x) = -sin x	sec (-x) = sec x
Tan (-x) = -tan x	csc (-x) = -csc x

Karena titik P (u,v) terletak pada lingkaran satuan $u^2 + v^2 = 1$, maka dari definisi u = cos x dan v = sin x diperoleh rumus berikut yang dikenal sebagai kesamaan Pythagoras.

$$\text{Cos}^2 x + \sin^2 x = 1$$

Bila kedua ruas kesamaan Pythagoras dibagi oleh $\cos^2 x$, maka diperoleh

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ n bilangan bulat}$$

Kita mempunyai dua titik pada lingkaran satuan $u^2 + v^2 = 1$, P (cos x, sin x) dan Q (cos y, din y), dengan x = $\angle$(OP, sb-x positif) dan y = $\angle$(OQ, sb-x positif). Berdasarkan rumus jarak dua titik diperoleh

$$PQ^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$$
$$= 2 - 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y)$$

Disini $\angle$POQ = $|x - y|$, dengan cos $\angle$POQ = cos $|x - y|$ = cos (x – y). Bila titik Q digeserkan ke titik (1,0) maka Q (1,0) dan P (cos) $|x - y|$, sin $|x - y$, sehingga

$$PQ^2 = (\cos|x - y| - 1)^2 + \sin^2(x + y) = 2 - 2\cos(x - y)$$

Jadi kita mempunyai kesaman penting berikut, yang berlaku $\forall$ x,y $\in$ R

$$\text{Cos}(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Bila peranan y digantikan oleh –y, dengan menggunakan rumus cos (-y) = cos y dan sin (-y) = -sin y diperoleh

$$\text{Cos}(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Dari dua rumus terakhir kita mempunyai kaitan antara sinus dan cosinus, yaitu

$$\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ \sin x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

Tulislah t = $\frac{\pi}{2} - x$, maka x = t - $\frac{\pi}{2}$, sehingga sin (t- $\frac{\pi}{2}$) = -cos t. Dari sini diperoleh :

$$\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Dengan menggunakan kedua rumus terakhir dan rumus cosinus selisih dua sudut diperoleh :

$$\begin{aligned} \text{Sin}(x + y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x + y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ \sin y \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

Bila peranan y digantikan oleh –y, dengan menggunakan rumus cos (-y) = cos y dan sin (-y) = -sin y diperoleh :

Sin (x – y) = sin x cos y – cos x sin y

Kesimpulan Kita telah mengkonstruksi empat rumus trigonometri berikut.

(1) Cos (x – y) = cos x cos y + sin x sin y

(2) Cos (x + y) = cos x cos y - sin x sin y

(3) Sin (x + y) = sin x cos y + cos x sin y

(4) Sin (x – y) = sin x cos y - cos x sin y

Jumlah dan selisih rumus (1) dan (2) menghasilkan

(5) Cos (x – y) + cos (x + y) = 2 cos x cos y

(6) Cos (x – y) - cos (x + y) = 2 sin x sin y

Misalkan s = x – y dan t = x + y, maka x = $\frac{s+t}{2}$ dan y = $-\frac{s-t}{2}$, akibatnya

(7) Cos s + cos t = 2 cos $\frac{s+t}{2}$ cos $\frac{s-t}{2}$

(8) Cos s – cos t = -2 sin $\frac{s+t}{2}$ sin $\frac{s-t}{2}$

Jumlah dan selisih rumus (3) dan (4) menghasilkan

(9) Sin (x + y) + sin (x – y) = 2 sin x cos y

(10) Sin (x + y) – sin (x – y) = 2 cos x sin y

Misalkan s = s + y dan t = x – y,maka x = $\frac{s+t}{2}$ cos $\frac{s-t}{2}$, akibatnya

(11) Sin s + sin t = 2 sin $\frac{s+t}{2}$ coss $\frac{s-t}{2}$

(12) Sin s – sin t = 2 cos $\frac{s+t}{2}$ sin $\frac{s-t}{2}$

Hasil bagi rumus (3) dan (2) menghasilkan

Tan (x + y) $= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$

$$= \frac{\dfrac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Bila peranan y digantikan oleh –y, dengan menggunakan rumus tan (-y) = -tan diperoleh rumus

$$\tan (x\text{-}y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

Jadi kita mempunyai rumus berikut tentang tanget dari sudut ganda

(13) $\tan (x + y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

(14) $\tan (x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

Bila pada rumus (2), (3) dan (13), peranan y digantikan oleh x, maka kita mempunyai rumus tentang sudut ganda berikut.

(15) $\text{Cos } 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

(16) $\text{Sin } 2x = 2 \sin x \cos x$

(17) $\text{Tan } 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

Dengan menggunakan rumus $\cos^2 x = \dfrac{1}{\sec^2 x} = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$ diperoleh

$$\text{Sin } 2x = 2 \, \frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Dan

$$\text{Cos } 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 x} - 1 = \frac{2 - 1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

Jadi kita mempunyai dua rumus penting berikut tentang kaitan sinus dan cosinus sudut gnda dengan nilai tangentnya.

(18) $\text{Sin } 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

(19) $\text{Cos } 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

Dari rumus (2), (3) dan (13), diperoleh hasil berikut yang menyatakan periode fungsi trigonometri.

(20) $\text{Cos } (x + 2n\pi) = \cos x$, n bilangan bulat

(21) $\text{Sin } (x + 2n\pi) = \sin x$, n bilangan bulat

(22) $\text{Tan } (x + 2n\pi) = \tan x$, n bilangan bulat

(23) $\text{Cot } (x + 2n\pi) = \cot x$, n bilangan bulat

(24) $\text{Sec } (x + 2n\pi) = \sec x$, n bilangan bulat

(25) $\text{Csc } (x + 2n\pi) = \csc x$, n bilangan bulat

Kita dapat menentukan kaitan antara konstanta a, b, k, dan θ agar hubungan

$$a \cos x + b \sin x = k \cos (x - \theta)$$

berlaku untuk setiap nilai x. Dari bentuk yang diinginkan kita mempunyai

$$a \cos x + b \sin x = (k \cos \theta) \cos x + (k \sin \theta) \sin x$$

Karena hubungan ini berlaku $\forall\ x \in R$, maka $a = k \cos \theta$ dan $b = k \sin \theta$. Dari sini diperoleh

$$a^2 + b^2 = k^2, \quad \text{atau} \quad k = \sqrt{a^2} + b^2$$

dan sudut θ memenuhi

$$\cos \theta = a/\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{dan} \quad \sin \theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$$

Akibatnya, kita mempunyai kesamaan

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \cos x + b \sin x \leq \sqrt{a^2} + b^2$$

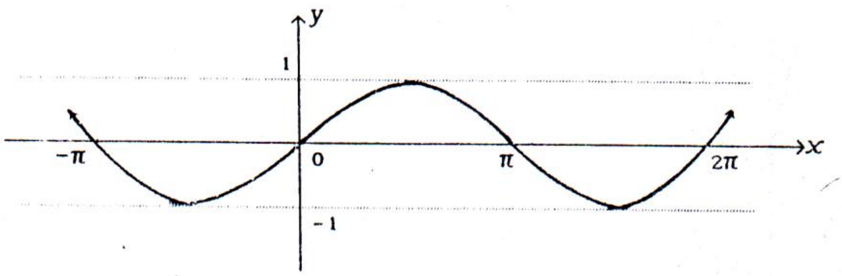
Catatan Hasil terakhir dapat juga diperoleh dengan membuat kesamaan

$$a \cos x + b \sin x = \ell \sin (x + \varphi)$$

Grafik Fungsi Trigonometri

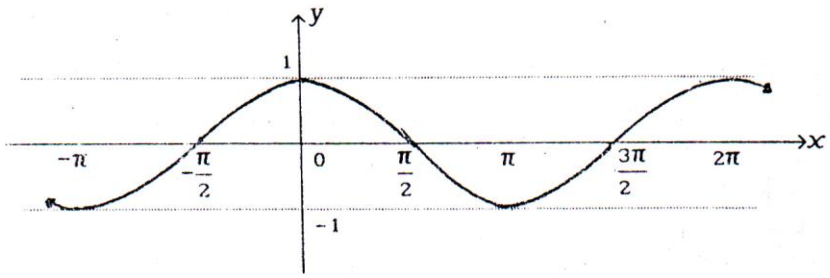
Berdasarkan konstruksinya, kaitan antara setiap nilai trigonometri dengan sudutnya membentuk suatu fungsi.

- *Fungsi sinus* : f (x) = sin x, D_f = R, R_f = [-1,1], f(x + 2π) = f (x) R x ∈ R
  Grafik fungsinya diperlihatkan pada Gb.8.



Gb.8, grafik fungsi f (x) = sin x

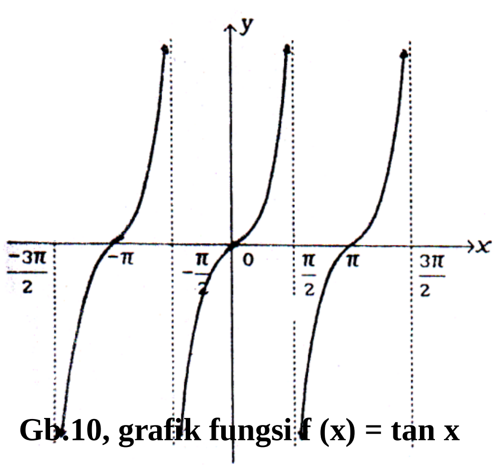
- *Fungsi cosinus* : f (x) = cos x, D_f = R, R_f = [-1,1], f (x + 2π) = f (x) R x ∈ R.
  Grafik fungsinya diperlihatkan pada Gb.9



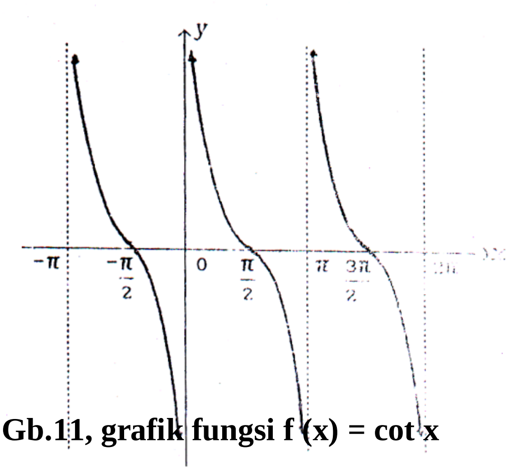
Gb.9, grafik fungsi f (x) = cos x

- *Fungsi tangent* : f (x) = tan x, D_f = R - {x : x ≠ $\frac{\pi}{2}$ + nπ, n bilangan bulat}.

  R_f = R, f (x + π) = f (x) R x ∈ D_f. Grafik fungsinya diperlihatkan pada Gb.10

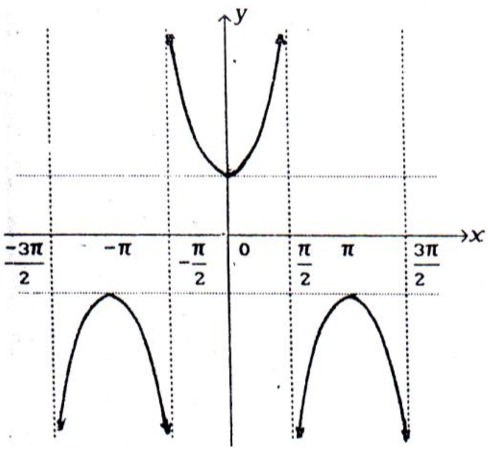


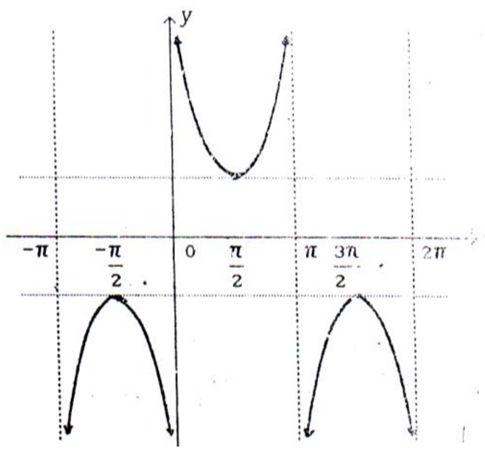
Gb.10, grafik fungsi f (x) = tan x



Gb.11, grafik fungsi f (x) = cot x

- *Fungsi contangent* : f (x) = cot x, D_f = R - {x : x $\neq$ nπ, n bilangan bulat), R_f = R, f (x + π) = f (x) R x $\in$ D_f. Grafik fungsinya diperlihatkan pada Gb.37.
- *Fungsi secant* : f (x) = sec x, D_f = R - {x : x $\neq$ $\frac{\pi}{2}$+ nπ, n bilangan bulat, R_f = $(_{-00},-1] \cup [1,_{+00})$, f (x + 2$\pi$) = f (x) R x $\in$ D_f. Grafik fungsinya diperlihatkan pada Gb.12





Gb.12 grafik fungsi f (x) = sec **Gb. 13 grafik fungsi fungsi f (x) = csc x**

- *Fungsi cosecant* : f (x) = csc x, D_f = R - {x : x $\neq$ nπ, n bilangan bulat}, R_f = $(_{-00},-1] \cup [1,_{+00})$, f (x + 2$\pi$) = f (x) /// x $\in$ D_f. Grafik fungsinya diperlihatkan pada Gb.13

Contoh. *Daerah nilai fungsi trigonometri*

Tentukan daerah asal dan daerah nilai fungsi f (x) = $\sin^2$x + sin x.

Jawab

Karena fungsi sinus terdefinisi untuk setiap x $\in$ R, maka daerah asal fungsi f adalah D_f = R Untuk menentukan daerah nilai fungsi f, tulislah

$$f(x) = (\sin x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

Gunakan batas nilai fungsi sinus dan sifat pertaksamaan untuk memperoleh batas nilai f (x), prosesnya sebagai berikut.

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$-\frac{1}{2} \le \sin x + \frac{1}{2} \le 1\frac{1}{2}$$

$$0 \le (\sin x + \frac{1}{2})^2 \le 2\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4} \le (\sin x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \le 2$$

$$-\frac{1}{4} \le f(x) \le 2$$

Jadi daerah nilai fungsi f adalah $R_f = [-\frac{1}{4}, 2]$.

Contoh. *Daerah nilai fungsi trigonometri*

Tentukan daerah asal dan daerah nilai fungsi

$$f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x \quad \text{dan} \quad g(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$$

Jawab

Karena nilai fungsi cosinus dan sinus terdefinisi untuk setiap $x \in R$, maka daerah asal fungsi f dan g adalah $D_f = R$ dan $D_g = R$

Untuk menentukan daerah nilai fungsi f dan g, gunakan berbagai sifat fungsi trigonometri untuk memperoleh bentuk lain dari fungsi f dan g.

$$f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

dan

$$g(x) = \cos^6 x + \sin^6 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^4 x - 3\sin^4 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

Kemudian gunakan batas nilai fungsi cosinus dan sifat pertaksamaan untuk memperoleh batas nilai f (x) dan g (x), prosesnya sebagai berikut.

$-1 \leq \cos 4x \leq 1$

$-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \cos 4x \leq 1$

$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \leq 1$

$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$

$-1 \leq \cos 4x \leq 1$

$-\frac{3}{8} \leq \frac{3}{8} \cos 4x \leq \frac{3}{8}$

$\frac{1}{4} \leq \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x \leq 1$

$\frac{1}{4} \leq g(x) \leq 1$

Jadi daerah nilai fungsi f dan g adalah $R_f = [\frac{1}{2}, 1]$ dan $R_g = [\frac{1}{4}, 1]$.

LATIHAN 2.1.

Untuk soal 1 sampai dengan 30, tentukan daerah asal dan daerah nilai dari setiap fungsi yang diberikan.

1. $f(x) = 2 + \sqrt{-x}$
2. $f(x) = \sqrt{3-2x} - 4$
3. $f(x) = \frac{2x-3}{3x-2}$
4. $f(x) = \frac{2x+4}{3x-6}$
5. $f(x) = x^2 - 5x - 4$
6. $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$
7. $f(x) = 3 - 2x - x^2$
8. $f(x) = 3 - x - 2x^2$
9. $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x+2}$
10. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

11. f (x) = 2 + $\frac{1-x^2}{1+x^2}$

12. f (x) = x - $\frac{1}{x}+3$

13. f (x) = 2 - $\frac{1}{1+x^2}$

14. f (x) = $\frac{x^2-x+1}{x^2+x-1}$

15. f (x) = $\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}$

16. f (x) = $\sqrt{2-x-x^2}$

17. f (x) = $\sqrt{x^2-x-2}$

18. f (x) = $\sqrt{2x^2-5x+3}$

19. f (x) = $\sqrt{8-2x-2x^2}$

20. f (x) = $\sqrt{\frac{1-x}{1+2x}}$

21. f (x) = $\sqrt{\sin x}$

22. f (x) = $\sqrt{\cos 2x}$

23. f (x) = $\sin^2 x - 2\sin x$

24. f (x) = $\cos^2 x - 2\cos x + 3$

25. f (x) = $2\sin^2 x + \sin x$

26. f (x) = $\sin^4 x - \cos^4 x$

27. f (x) = $\cos x + \sin x$

28. f (x) = $3\cos x - 4\sin x$

29. f (x) = $2 - 3\tan 2x$

30. f (x) = $1 - \tan^2 x$

2.2. TOPIK-TOPIK YANG BERKAITAN DENGAN FUNGSI

Kesamaan Dua Fungsi Real

Fungsi f dan g dikatakan sama, ditulis f = g, jika

$$D_f = D_g = D \quad \text{dan} \quad f(x) = g(x) \;\; \forall\; x \in D$$

Sebagai ilustrasi, fungsi f (x) = 1 dan g (x) = x/x *tidak sama*, karena $D_f \neq D_g$, D_f = R dan D_g = R - {0}. Tetapi fungsi $f(x) = \cos^4 + \sin^4 x$ sama dengan fungsi g (x) = $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ karena $D_f = D_g = R$ dan $f(x) = g(x) \;\forall\; x \in R$ (lihat contoh 23 dihalaman 51).

Operasi Aljabar pada Fungsi Real

Pada dua fungsi yang daerah asalnya sama kita dapat mendefinisikan operasi aljabar, yang terdiri dari penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian atas kedua fungsi tersebut.

Kita mempunyai fungsi f dan g dengan $D_f = D_g = D$; jumlah, selisih, hasil kali dan hasil bagi dari fungsi f dan g, ditulis f + g, f – g, fg dann f/g, didefinisikan sebagai fungsi yang aturannya R $x \in D$ ditentukan oleh

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $\qquad$ $(fg)(x) = f(x).\,g(x)$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ $\qquad$ $(f/g)(x) = f(x)/g(x),\; g(x) \neq 0$

Catatan

Lambang operasi aljabar di ruas kiri dan di ruas kanan mempunyai arti yang berbeda. Ruas kiri adalah operasi aljabar atas fungsi, sedangkan ruas kanan adalah operasi aljabar atas nilai fungsi yang merupakan bilangan real.

Jika daerah asal fungsi hasil operasi aljabarnya ditentukan setelah aturan operasinya, maka fungsi f + g, f – g, fg, dan f/g mempunyai daerah asal

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D = D_f \cap D_g \quad \text{dan} \quad D_{f/g} = D - \{x \in R : g(x) = 0\}$$

Contoh *Operasi aljabar pada dua fungsi*

Jika f (x) = $\dfrac{1-x}{1+x}$ dan g(x) , $\dfrac{1}{x}$ tentukan fungsi f + g, f – g, fg, f/g, dan g/f beserta daerah asal setiap fungsinya.

Jawab

Jumlah f dan g : (f + g) (x) = $\dfrac{1-x}{1+x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - x^2 + 1 + x}{x(1+x)} = \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{x(x+1)}$

Selisih f dan g : (f – g) (x) = $\dfrac{1-x}{1+x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - x^2 - 1 - x}{x(1+x)} = \dfrac{x^2 + 1}{x(x+1)}$

Hasilkali f dan g : (fg)(x) = $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-x+1}{x(x+1)}$

dengan

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D = R - \{-1,0\}$$

Hasil bagi f dan g : (f/g)(x) = $\dfrac{1-x}{1+x} \bigg/ \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x^2 + x}{x+1}$

dengan

$D_{f/g} = D - \{x \in R : g(x) = 0\} = D - \varnothing = D = R - \{-1,0\}$

Hasil bagi g dan f : (f/g)(x) = $\dfrac{1}{x} \bigg/ \dfrac{1-x}{1+x} = -\dfrac{x+1}{x(x-1)}$

dengan

$D_{f/g} = D - \{x \in R : f(x) = 0\} = D - \{1\} = R - \{-1,0,1\}$

Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Fungsi f dikatakan *fungsi genap* jika f (-x) = f (x) $\forall$ x $\in D_f$, dan dikatakan *fungsi ganjil* jika f (-x) = -f (x) $\forall$ x $\in D_f$.

Ilustrasi

- fungsi f (x) = cos x adalah fungsi genap karena f (-x) = cos (-x) = cos x = f (x) $\forall$ x $\in D_{f} =$ R.
- fungsi f (x) = 1/x adalah fungsi ganjil karena f (-x) = 1/(-x) = -1/x = -f(x) $\forall$ x $\in D_f = R - \{0\}$

- fungsi f (x) = 0 adalah fungsi genap dan fungsi ganjil karena f (-x) = 0 = f (x) dan f (-x) = 0 = -0 = -f (x) $\forall$ x $\in D_f$ = R
- fungsi f (x) = x + cos x adalah fungsi yang tidak genap dan tidak ganjil karena $\exists$ x $\in$ D = R sehingga f (-x) = -x + cos x $\neq$ f (x) dan $\exists$ x $\in$ D = R sehingga f (-x) = -x + cos x $\neq$ -f (x). carilah suatu nilai x yang demikian.
- Fungsi f (x) = $\sqrt{x}$ tidak dapat dikelompokkan sebagai fungsi genap atau fungsi ganjil karena D_f tidak memuat x dan –x secara bersamaan.

Grafik fungsi y = f (x) dikatakan simetri terhadap sumbu y jika untuk setiap x $\in D_f$ berlaku (x,y) $\in$ grafik f $\Leftrightarrow$ (-x,y) $\in$ grafik f. Berdasarkan ini diperoleh bahwa grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu y. Selanjutnya, grafik fungsi y = f (x) dikatakan simetri terhadap titik asal 0 (0,0) Jika untuk setiap x $\in$ D berlaku (x,y) $\in$ grafik f $\Leftrightarrow$ (-x, -y) $\in$ grafik f. Berdasarkan ini diperoleh bahwa *grafik fungsi ganjil simetri terhadap titik 0.*

Fungsi Terbatas

Fungsi f dikatakan terbatas jika $\exists$ M > 0 $\ni$ $|$ f (x) $|$ $\leq$ M $\forall$ x $\in D_f$.

Ilustrasi

- Fungsi f (x) = sin x terbatas karena $|$f (x) $|$ $\leq$ 1 $\forall$ x $\in D_f$ = R
- Fungsi f (x) = 1/x tidak terbatas karena $\forall$ M > 0 $\exists$ x_o, $|x_o|$ < $\frac{1}{M}$, $x_0 \neq 0$

  sehingga $|$f (x_o) = $\frac{1}{|x_0|}$ > M.

Fungsi Periodik

Fungsi f dikatakan periodik jika

$\exists$ p $\neq$ 0 sehingga x + p $\in D_f$ dan f (x + p) = f (x) R x $\in D_f$

Bilangan p > 0 terkecil yang mengakibatkan f (x + p) = f (x) R x $\in D_f$ dinamakan *periode* fungsi f.

Ilustrasi

Fungsi f (x) = sin x adalah suatu fungsi periodic dengan periode p = 2π karena $\forall$ x $\in$ D_f = R berlaku

$$f(x + p) = \sin(x + 2\pi) = \text{xin } x \cos 2\pi + \cos x \sin 2\pi = \sin x = f(x)$$

dan p = 2π adalah bilangan positif terkecil yang memenuhi f (x + p) = f (x) $\forall$ x $\in$ D_f = R

Untuk membuktikan p = 2π adalah bilangan positif terkecil, andaikan terdapat p, $0 < p < 2\pi$ yang memenuhi sin (x + p) = sin x $\forall$ x $\in$ R Maka untuk x = 0 berlaku sin p =0. Karena $0 < p < 2\pi$, maka p = π. Ini mengakibatkan kesaman sin (x + π) = sin x berlaku $\forall$ x $\in$ R Hal ini tidak benar karena untuk x = $\pi/2$ mengakibatkan -1 = sin $3\pi/2$ = sin $\pi/2$ = 1, suatu pertentangan.

Pertentangan ini mengakibatkan pengandaian tidak benar, jadi p = 2π adalah bilangan positif terkecil yang memenuhi sin (x + p) = sin x $\forall$ x $\in$ R

Rumus umum untuk periode fungsi trigonometri adalah sebagai berikut.

1. Periode fungsi f (x) = A sinn (ωt + δ) dan f (x) = A cos (ωt + δ), dengan A, ω, δ konstanta adalah $2\pi/\omega$.
2. Periode fungsi f (x) = A tan (ωt + δ) dan g (x) = A cot (ωt + δ), dengan A, ω, δ konstanta adalah π/ω.

Ilustrasi

- Berdasarkan kesamaan $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ dan $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, periode fungsi f (x) = $\sin^2 x$ dan g (x) = $\cos^2 x$ adalah π.
- Berdasarkan kesamaan $f(x) = \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ (contoh 24 halaman 51), maka periode fungsi f adalah $\pi/2$.
- Berdasarkan kesamaan $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$ (contoh 24 halaman 51) maka periode fungsi f adalah $\pi/2$.

Pergeseran Grafik Fungsi

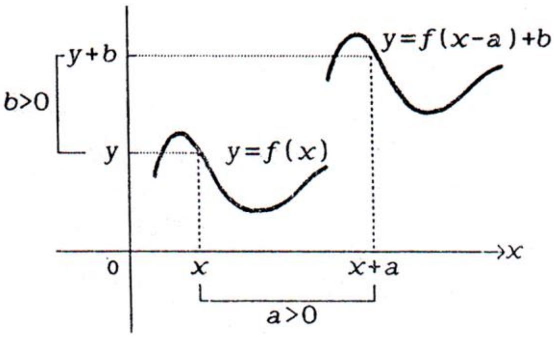
Kita ingat kembali bahwa grafik fungsi f adalah himpunan titik

$$\{(x,y) \in R^2 : y = f(x), x \in D_f \text{ dan } y \in R_f\}$$

Aturan pergeseran grafik fungsi f adalah sebagai berikut.

Grafik fungsi y = f (x – a) + b, a, b > 0 diperoleh dengan menggeserkan grafik fungsi y = f (x) sejauh a satuan ke kanan (kea rah sumbu x positif) dan b satuan ke atas (ke arah sumbu y positif).

Dasar pembuktian rumus pergeseran grafik fungsi adalah bahwa titik (p,q) terletak pada grafik fungsi y = f (x) $\Leftrightarrow$ q = f (p) adalah suatu pernyataan benar. Perhatikan Gb.40, grafik fungsi y + f (x) digeser a satuan ke kanann dan b satuan ke atas sehingga menjadi y + f (x - a) + b.



Gb.40, pergeseran grafik fungsi

Arah pergeseran grafik fungsi f untuk a dan sebarang ditentukan oleh

- ○ a > 0 dan b > 0 : grafik f digeser a satuan ke kanan dan b satuan ke atas,
- ○ a < 0 dan b > 0 : grafik f digeser a satuan ke kiri dan b satuan ke atas,
- ○ a > 0 dan b < 0 : grafik f digeser a satuan ke kanan dan b satuan ke bawah,
- ○ a < 0 dan b < 0 : grafik f digeser a satuan ke kiri dan b satuan ke bawah,

Ilustrasi

- ○ Berdasarkan kesamaan f (x) = $x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 4$, maka grafik fungsi f dapat diperoleh dengan menggeserkan grafik fungsi y = x^2 sejauh 1 satuan ke kanan dan 4 satuan ke bawah.

- Berdasarkan kesamaan cos x = sin (x + $\frac{\pi}{2}$), maka grafik fungsi y = cos x dapat diperoleh dengan menggeserkan grafik fungsi y = sin x sejauh π/2 satuan ke kiri.

Fungsi dengan Banyak Aturan

Berdasarkan definisi nilai mutlak, fungsi f (x) = x + 2 $|x|$ dapat dituliskan sebagai :

$$f(x) = x + 2|x| = \begin{cases} x - 2x, x < 0 \\ x + 2x, x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x, x < 0 \\ 3x, x \geq 0 \end{cases}$$

perhatikan bahwa di sini fungsi f mempunyai dua aturan, $f_1(x) = -x$, yang berlaku pada selang ($_{-00}$,0) dan f_2 (x) = 3x, yang berlaku pada selang [0,$_{+00}$). Gambarkan grafiknya!

Fungsi yang mempunyai lebih dari satu aturan dinamakan fungsi dengan banyak aturan. Sebagai ilustrasi, fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x < 1 \\ 1 + x, x \geq 1 \end{cases}$$

dengan daerah asal D_f = R ini mempunyai dua aturan, yaitu f_1 (x) = 1- x^2 pada selang ($_{-00}$,1) dan f_2 (x) = 1 + x pada selang [1, $_{+00}$). Gambarkan grafiknya!

Contoh 26. *Grafik fungsi dengan nilai mutlak.*

Tulislah aturan fungsi f (x) = $|2|x| - x^2|$ dalam bentuk tanpa nilai mutlak, kemudian gambarkan grafiknya.

Jawab

Dengan menggunakan definisi nilai mutlak $|x|$ = x bila x ≥ 0, $|x|$ = -x bila x < 0, dan sifat nilai mutlak $|-u|$, maka aturan fungsi f dapat ditulis

$$f(x) = \begin{cases} |-2x - x^2|, x < 0 \\ |2x - x^2|, x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} |x(x+2|, x < 0 \\ |x(x-2|, x \geq 0 \end{cases}$$

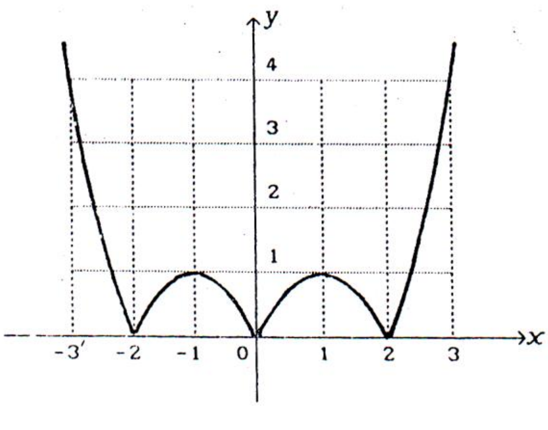
karena $|x(x+2)|$ berganti tanda di -2 dan $|x(x-2)|$ berganti tanda di 2, maka untuk menghilangkan nilai mutlak pada bentuk terakhir kita mempunyai empat kasus.

1. *Kasus* x < -2 : Di sini x < 0 dan x + 2 < 0, sehingga x (x + 2) > 0, akibatnya $|x(x+2)| = x(x+2)$.
2. *Kasus* -2 ≤ x < 0 : Di sini x < 0 dan x + 2 ≥ 0, sehingga x (x + 2) ≤ 0, akibatnya $|x(x+2)| = -x(x+2)$.
3. *Kasus* 0 ≤ x < 2 : Di sini x ≥ 0 dan x – 2 < 0, sehingga x (x – 2) ≤ 0, akibatnya $|x(x-2)| = -x(x-2)$
4. *Kasus* x ≥ 2 : Di sini x ≥ 0 dan x -2 ≥ 0, sehingga x (x - 2) ≥ 0, akibatnya $|x(x-2)| = x(x-2)$.

Jadi aturan fungsi f dalam bentuk tanpa nilai mutlak adalah

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2, x<-2 \\ -x(x+2), -2 \le x < 0 \\ -x(x-2), 0 \le x \le 2 \\ x(x-2), x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2+2x, x<-2 \\ -x^2-2x, -2 \le x < 0 \\ -x^2+2x, 0 \le x \le 2 \\ x^2-2x, x \ge 2 \end{cases}$$

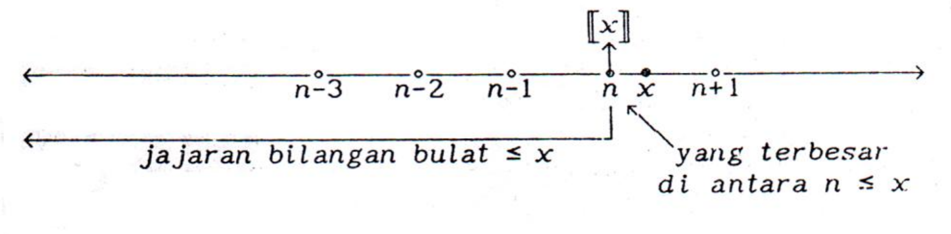
grafik fungsi f diperlihatkan pada Gb.41.



Gb.41, grafik fungsi f (x) = |2|x| \ x²|

Fungsi Bilangan Bulat Terbesar

Untuk sebarang $x \in R$ terdapat tak hingga banyaknya bilangan bulat yang lebih kecil atau sama dengan x. Bilangan bulat n yang memenuhi $n \leq x$ semua terletak di sebelah kiri x pada garis bilangan, yang diperlihatkan pada Gb.42. Diantara semua jajaran bilangan bulat tersebut, yang terbesar dinamakan bilangan bulat terbesar dari x, dan ditulis dengan lambang [x].



Gb.42, bilangan bulat terbesar dari x

Dari definisi ini, untuk sebarang $x \in R$ kita mempunyai

$$[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1, \text{ n bilangan bulat}$$

Ilustasi Berdasrkan sifat ini, $[-1,5] = -2$, karena $-2 \leq -1,5 < -1$.

Perhatikan bahwa diantara jajaran bilangan bulat yang lebih kecil dari -1,5; yaitu R, -4, -3, -2, terlihat bahwa -2 adalah yang terbesar.

Fungsi yang memuat bentuk $[^{o}]$ dinamakan *fungsi bilangan bulat terbesar*.

Ilustrasi Kita ingin menggambarkan grafik fungsi $f(x) = [x]$, $x \in R$ Daerah asal dan daerah nilai fungsi ini adalah $D_f = R$ dan $R_f = Z$, himpunan bilangan bulat. Ambilah beberapa nilai n tertentuk, diperoleh

$$n = -2 : -2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = [x] = -2$$

$$n = -1 : -1 \leq x \; 0 \Rightarrow f(x) = [x] = -1$$

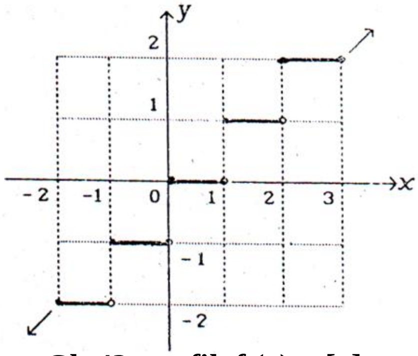
$$n = 0 : 0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = [x] = 0$$

$$n = 1 : 1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = [x] = 1$$

$$n = 2 ; 2 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = [x] = 2$$

Hasilnya adalah aturan fungsi f dan grafik fungsi f (x) = [x] yang diperlihatkan pada Gb.43.

$$f(x) = [x] = \begin{cases} -2, -2 \le x < -1 \\ -1, -1 \le x < 0 \\ 0, 0 \le x < 1 \\ 1, 1 \le x < 2 \\ 2, 2 \le x < 3 \end{cases}$$



Gb.43, grafik f (x) = [x]

Catatan Grafik fungsi bilangan bulat terbesar dikenal sebagai *fungsi tangga*.

Contoh 27. *Grafik fungsi yang memuat bentuk* [^{o}]

Gambarkan grafik fungsi

f (x) = |x| + [$\frac{1}{2}$] -4 ≤ x ≤ 4 dan g (x) = [x^2], -2 ≤ x 2

Jawab

Berdasarkan konsep bilangan bulat terbesar,

$$\left[\frac{1}{2}x\right] = n \Leftrightarrow n \le \frac{1}{2}x < n+1 \Leftrightarrow 2n \le x < 2n+2$$

Agar -4 ≤ x < 4 ambillah n = -2, -1, 0, dan 1; untuk x = 4, f (4) = 4 + 2 = 6.

n = -2 : -4 ≤ x < -2 $\Rightarrow \left[\frac{1}{2}x\right] = -2 \Rightarrow f(x) = -x - 2$

n = -1 : -2 ≤ x < 0 $\Rightarrow \left[\frac{1}{2}x\right] = -1 \Rightarrow f(x) = -x - 1$

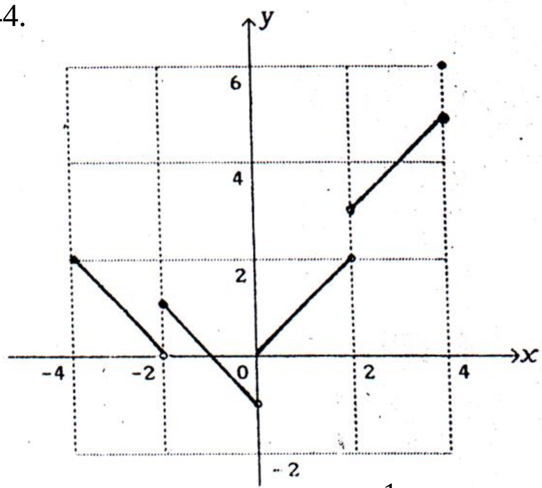
n = 0 : 0 ≤ x < 2 $\Rightarrow \left[\frac{1}{2}x\right] = 0 \Rightarrow f(x) = x$

n = 1 : 2 ≤ x < 4 $\Rightarrow \left[\frac{1}{2}x\right] = 2 \Rightarrow f(x) = x - 1$

Hasilnya adalah aturan fungsi f dan grafik fungsi f (x) = |x| + $\left[\frac{1}{2}x\right]$ untuk -4 ≤ x ≤ 4 yang diperlihatkan pada Gb.44.

f (x) = |*x*| + [$\frac{1}{2}$] *-4 ≤ x ≤ 4*

$$f(x)=\begin{cases}-x-2, -4\le x<-2\\ -x-1, -2\le x<0\\ x, 0\le x<2\\ x+1, 2\le x<4\\ 6, \quad x=4\end{cases}$$



Gb. 44, grafik *f(x)* = |*x*| + [$\frac{1}{2}$] *-4 ≤ x ≤ 4*

Berdasarkan konsep bilangan bulat terbesar,

$[x^2] = n \Leftrightarrow 0 \le n \le x^2 < n + 1 \Leftrightarrow -\sqrt{n+1} < x \le -\sqrt{n}$ atau $\sqrt{n} \le x < \sqrt{n+1}$

Agar -2 ≤ x ≤ 2, ambillah n = 0, 1, 2, dan 3; untuk x = -2 atau 2, g (x) = 4.

n = 0 ; -1 < x ≤ 0 atau 0 ≤ x < 1 $\Rightarrow 0 \le x^2 < 1 \Rightarrow \left[x^2\right] = 0$

n = 1 ; $-\sqrt{2} < x \le -1$ atau $1 \le x < \sqrt{2} \Rightarrow 1 \le x^2 < 2 \Rightarrow \left[x^2\right] = 1$

n = 2 ; $-\sqrt{3} < x \le -\sqrt{2}$ atau $\sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \Rightarrow 2 \le x^2 < 3 \Rightarrow \left[x^2\right] = 2$

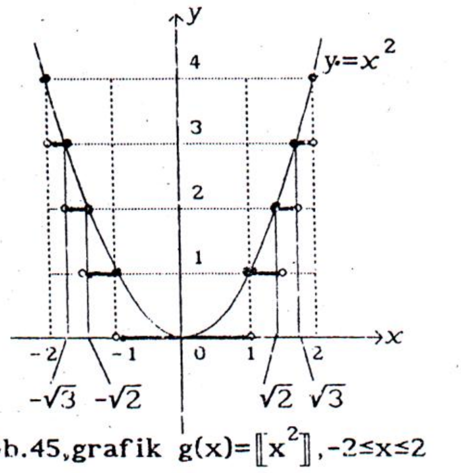
n = 2 ; $-2 < x \le -\sqrt{3}$ atau $\sqrt{3} \le x < 2 \Rightarrow 3 \le x^2 < 4 \Rightarrow \left[x^2\right] = 3$

x = -2 atau x = 2 $\Rightarrow$ $x^2 = 4 \Rightarrow \left[x^2\right] = 4$

Hasilnya adalah aturan fungsi g dan grafik fungsi g (x) = [x^2], -2 ≤ x ≤ 2 yang diperlihatkan pada Gb.45.

g(x) = [x^2], -2 ≤ *x* ≤ 2

$$f(x)=\begin{cases}0,\ -1 < x \le 0 \quad \text{atau } 0 \le x < 1\\ 1,\ -\sqrt{2} < x \le -1 \quad \text{atau } 1 \le x < \sqrt{2}\\ 2,\ -\sqrt{3} < x \le -\sqrt{2} \ \text{atau } \sqrt{2} \le x < \sqrt{3}\\ 3,\ -2 < x \le -\sqrt{3} \ \text{atau } \sqrt{3} \le x < 2\\ 4, \quad x \le -2 \quad \text{atau} \quad x = 2\end{cases}$$



Gb.45,grafik g(x)=⟦x²⟧,-2≤x≤2

Fungsi Implisit

Jika diberikan aturan fungsi y = f (x), maka aturan fungsi f ini dapat ditulis dalam bentuk F (x, y) = 0 dengan F (x,y) = 0 dengan F (x,y) = y – f (x) dinamakan fungsi eksplisit. Sebaliknya, jika diberikan aturan F (x,y) = 0, maka y bergantung dari x, atau y fungsi dari x yang terkandung secara implicit dalam aturan F (x,y) = 0. Pada bentuk aturan F (x,y) = 0, y merupakan fungsi dari x, dan x merupakan fungsi dari y. Fungsi y = y (x) dan x = x (y) yang termuat dalam aturan F (x,y) = 0 dinamakan fungsi implicit.

Ilustrasi

- Pada bentuk persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$, a > 0 termuat pengertian bahwa y fungsi dari x, dan x fungsi dari . Fungsi ini dapat dinyatakan secara eksplisit, yaitu

  $$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{atau} \quad y = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

  dan

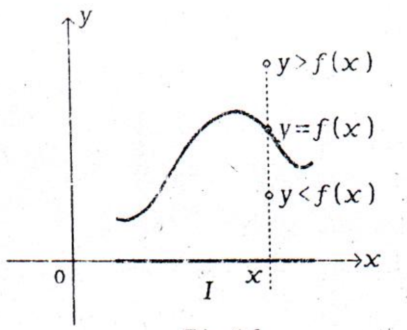
  $$x = \sqrt{a^2 - y^2} \quad \text{atau} \quad x = -\sqrt{a^2 - y^2}$$

- Pada bentuk persamaan $x^5 - 3x^3y^2 + 2xy^4 = 4$ juga termuat pangertian bahwa y fungsi dari x, dan x fungsi dari y. Fungsi ini tidak dapat dinyatakan secara eksplisit. Dalam hal ini kita katakana bahwa y adalah fungsi implicit dari x, atau x adalah fungsi implicit dari y, yang termuat dalam aturan yang diberikan.

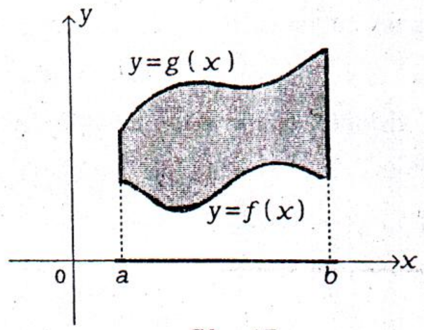
Daerah di Bidang Datar

Pada aturan F (x,y) = 0 yang terdefinisi pada selang tertentu, dapat dibuat aturan baru dengan mengganti lambing “ = “ oleh “ <,>, ≤, atau ≥ “. Grafik dari aturan F (x,y) < 0, F (x,y) > 0, F (x,y) ≥ 0 berbentuk daerah di bidang datar.

Demikian juga dalam hal F (x,y) = y – f (x), kita mempunyai aturann y < f (x), y < (f (x), atau y ≥ f (x). Perhatikan grafik y = f (x) pada selang I pada Gb.46.



Gb.46



Gb . 47

Untuk x yang dibuat tetap, titik (x, f (x)) terletak pada grafik f. Koordinat titik diatasnya adalah (x,y) dengan y > f (x), sedangkan koordinat titik di bawahnya adalah (x,y) dengan y < f (x). Secara umum, himpunan titik

$$\{(x,y) \in R : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)$$

Berbentuk daerah di bidang datar yang proyeksinya terhadap sumbu x adalah selang tertutup [a, b], di atas dibatasi oleh grafik y = g (x), dann di bawah oleh grafik y = f (x). Lihat Gb.46.

Ilustrasi

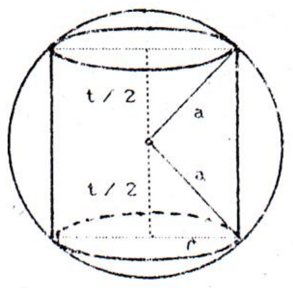
- Persamaan lingkaran yang berjari-jari a > 0 adalah L : $x^2 + y^2 = a^2$. Aturan $x^2 + y^2 \leq a^2$ adalah himpunan titik yang terletak di dalam dan pada lingkaran L. Aturan x+2 $^{+\ y+2}$ > a^2 adalah himpunan titik yang terletak di luar L.
- Himpunan titik {(x,y) ∈ R : -1, $-x^2 \leq y \leq 1 + x^2$} adalah himpunan titik yang proyeksinya terhadap sumbu x adalah selang [-1,1], di atas dibatasi oleh parabol $y = 1 + x^2$, dan di bawah dibatasi oleh parabol $y = -x^2$.

Perumusan Masalah Nyata dalam Bentuk Fungsi

Banyak masalah nyata yang melibatkan dua pubah real, di mana peubah yang satu bergantung pada peubah lainnya. Setelah diidentifikasi, masalah demikian dapat ditampilkan sebagai fungsi satu peubah, berikut adalah ilustrasi sederhana tentang ini.

Ilustrasi

Dalam sebuah bola berjari-jari a > 0 dibuat silinder lingkaran tegak yang lingkaran alas dan atasnya terletak pada permukaan bola. Kita ingin menyatakan isi silinder sebagai fungsi dari jari-jari lingkaran alasnya, atau sebagai fungsi dari tingginya. Perhatikan Gb.48.



Gb.48

Misalkan jari-jari lingkaran alas dan tinggi silinder adalah r dan t, maka diperoleh hubungan

$$a^2 = (\frac{1}{2}t)^2 + r^2 = \frac{1}{4}t^2 + r^2$$

Dari sini diperoleh

$$r = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}t^2} \quad \text{atau} \quad t = 2\sqrt{a^2 - r^2}$$

Karena itu isi silinder dinyatakan sebagai fungsi dari t adalah

$$I = \pi r^2 t = \pi\,(a^2 - \frac{1}{4}t^2)t, \text{ a konstanta}$$

Dan isi silinder dinyatakan sebagai fungsi dari r adalah

$$I = \pi r^2 = 2\,\pi r^2\,\sqrt{a^2 - r^2}, \text{ a konstanta}$$

LATIHAN 2.2.

1. Jika f (x) = $\frac{1-x}{x}$ dan g (x) = $\frac{x}{1+x}$, tentukan aturan fungsi f + g, f – g, g –f, f_g,f/g, dan g/f beserta daerah definisinya.
2. Jika f (x) = $\begin{cases} 1-x, x \geq 1 \\ 2x-1, x > 1 \end{cases}$ dan g (x) = $\begin{cases} 0, x < 2 \\ -1, x \geq 2 \end{cases}$, tentukan aturan fungsi f + g, f – g, g – f, f_g, f/g, dan g/f beserta daerah definisinya.
3. Jika f (x) = $x^{1/2} + x^{-1/2}$ dan g (x) = $x^{1/2}$, tentukan aturan fungsi f + g, f – g, g – f, f_g, f/g dan g/f beserta daerah definisinya.

Untuk soal 4 sampai dengan 12, ubahlah aturan setiap fungsi yang diberikan sehingga menjadi fungsi dengan banyak aturan kemudian gambarkan grafiknya.

4. f (x) = 1 + x |x|
5. f (x) 2 |x| - |x - 1|
6. f (x) = 3 – 2 |x| - x^2
7. f (x) = 2 - $\sqrt{|x|}$
8. f (x) = $\sqrt{4-|x-1|}$
9. f (x) = 2 - $\frac{x}{|x|}$
10. f (x) = |x| - R
11. f (x) = x^2 - R
12. f (x) = 1 – sin |x|
13. Tunjukan fungsi f (x) = x^2 dan g (x) = $1/x^2$ adalah tak terbatas pada daerah definisinya.
14. Tunjukan fungsi f (x) = x + $\frac{1}{x}$ - 3, x ≠ 0 adalah terbatas, kemudian tentukan suatu batas-batasnya.
15. Tunjukan fungsi f (x) = 1 – x + $\frac{1}{x}$, x ≠ 0 tidak terbatas.
16. Tunjukan periode fungsi f (x) = tan x adalah π.
17. Gambarkan fungsi periodic f (x) = x, $-1 \le x < 1$, f (x + 2) = f (x) $\forall x \in R$
18. Gambarkan fungsi periodic g (x) = x^2, $-1 \le x < 1$, g (x + 2) = g (x) $\forall x \in R$
19. Jika f dan g fungsi genap, buktikan f_g dan f + g juga fungsi genap.
20. Jika f fungsi genap dann g fungsi ganjil, buktikan f_g fungsi ganjil.
21. Jika P (x,y) sebuah titik pada parabol y = x^2, nyatakan jarak titik (-3,0) ke titik P sebagai fungsi dari x.
22. Sebuah kotak akan dibuat dari sehelai karton berukuran 45 x 24 cmdengan menggunting keempat bujursangkar di sudut karton. Nyatakan isi kotak sebagai fungsi dari panjang rusuk bujursangkar yang dibuang.

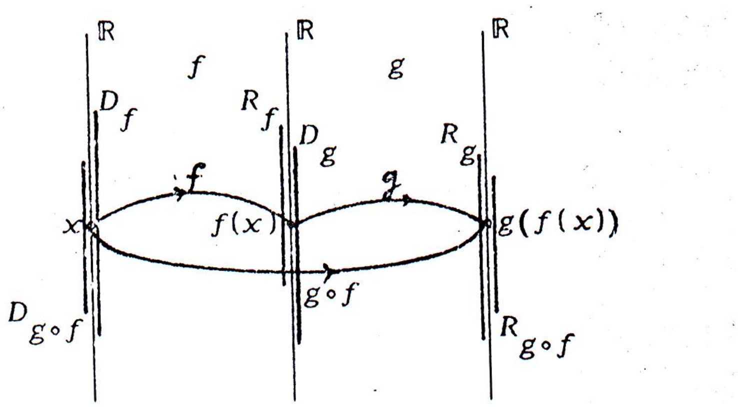
2.3. FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

Fungsi Komposisi

Misalkan fungsi f dan g memenuhi $R_f \cap D_g \neq \emptyset$. Fungsi komposisi dari g dan f, (f dilanjutkan g), ditulis $g^o f$, adalah fungsi dengan daerah asal himpunan bagian dari D_f dan aturannya ditentukan oleh $(g^o f)(x) = g\ (f(x)$. Daerah asal dan daerah nilai fungsi $g^o f$ adalah

$D_{gof} = \{x \in D_f : f\ (x) \in D_g\}$ dan $R_{gof} = \{y \in R_g : y = g\ (t), t \in R_f$.

Perhatikan syarat agar fungsi komposisi $g^o f$ terdefinisi, yaitu $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ pada Gb.49.



Gb.49, diagram pemetaan fungsi komposisi $g^o f$

Fungsi komposisi fog dirancang dengan cara yang sama, f dan g saling bertukar peran. Misalkan fungsi f dan g memenuhi $R_g \cap D_f \neq \emptyset$. Fungsi komposisi dari f dan g, (g dilanjutkan f), ditulis fog, adalah fungsi dengan daerah asal himpunan bagian dari D_g dann aturannya ditentukan oleh (fog)(x) = f (g(x)). Daerah asal dan daerah nilai fungsi fog adalah

$D_{fog} = \{x \in D_g : g\ (x) \in D_f\}$ dan $R_{fog} = \{y \in R_f : y = f\ (t), t \in R_g\}$

Contoh 28, Fungsi komposisi gof dan fog.

Misalkan f (x) $\sqrt{x}$ dan g (x) = 1 – x^2, tentukan fungsi gof dan fog beserta derah asal dan daerah nilai fungsi komposisinya.

Jawab

Daerah asal dan daerah nilai fungsi f dan g adalah

$$D_f = [0,_{+00}),\quad R_f = [0,_{+00}),\quad D_g = R \text{ dan } \quad R_g = (_{-00},1]$$

Karena $R_f \cap D_g = [0,_{+00}) \neq \emptyset$, maka fungsi gof terdefinisi dengan aturan

$$(gof)(x) = g\,(f(x)) = g(\sqrt{x} = 1\text{- }x$$

Daerah asal fungsi gof adalah

$$D_{gof} = \{x \in D_f : f\,(x) \in D_g\} = \{x \in [0,_{+00}) : \sqrt{x} \in R\}$$
$$= \{\, x \geq 0 : \sqrt{x} \in R.\} = [0,_{+00})$$

Dan daerah nilai fungsi gof adalah

$$R_{gof} = \{y \in R_g : y = g\,(t),\, t \in R_f\}$$
$$= \{y \in (_{-00},1] : y = 1\ t^2,\, t \geq 0\} = (_{-00},1]$$
$$= \{y \leq 1 : y = 1 - t^2,\, t \geq 0\} = (_{-00},1]$$

Catatan

Berdasarkan konsep fungsi komposisi, meskipun aturan fungsi komposisinya adalah (gof)(x) = 1 – x, derah asal fungsi ini bukan R, tetapi hukmpunan diperoleh y ≤ 1, sehingga daerah nilai fungsi gof adalah $R_{gof} = (_{-00},1]$

Kita akan menentukan fungsi fog dengan f (x) = $\sqrt{x}$ dan g (x) = 1 – x^2. Ingat bahwa daerah asal dan daerah nilai fungsi f dan g adalah

$$D_f = [0,_{+00}),\quad R_f = [0,_{+00}),\quad D_g = R, \quad \text{dan} \quad R_g = (_{-00},1].$$

Karena $R_g \cap D_f = (_{-00},1] \cap [0,_{+00}) = [0,1] \neq \emptyset$, maka fungsi fog terdefinisi dengan aturan

$$(fog)(x) = f\,(g(x)) = f\,(1 - x^2) = \sqrt{1 - x^2}$$

Daerah asal fungsi fog adalah

D_{fog} $= \{ x \in D_g : g\ g(x) \in D_f\} = \{x \in R : 1 - x^2 \in [0,_{+00})$

$= \{ x \in R : 1 - x^2 \geq 0\} = \{x \in R : -1 \leq x \leq 1\} = [-1,1]$

Dan daerah nilai fungsi fog adalah

R_{fog} $= \{y \in R_f : y = f(t), t \in R_g\}$

$= \{y \in [0,_{+00}) : y = \sqrt{t}\ , t \in (_{-00},1]\}$

$= \{y \geq 0 : y = \sqrt{t}\ , 0 \leq t \leq 1\} = [0,1]$

Fungsi Invers

Fungsi $f : D_f \to R_f$ dikatakan satu-kesatu jika $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v\ \forall u, v \in D_f$. Sebagai ilustrasi, fungsi $f : R \to R$, $f(x) = x^3$ satu-kesatu karena

$$F(u) = f(v) \Rightarrow u = v\ \forall\ u, v \in D_f = R$$

(Jelaskan alasannya!). Fungsi kuadrat $g(x) = x^2$ tidak satu-kesatu karena $-2,2 \in D_f$ memenuhi $f(-2) = f(2) = 4$, tetapi $-2 \neq 2$.

Jika fungsi $f : D_f \to R_f$ satu-kesatu, maka terdapat fungsi $g : R_f \to D_f$ sehingga $f(g(y)) = y\ \forall\ y \in R_f$. Invers fungsi f (fungsi invers dari f) didefinisasikan sebagai rungsi $f^{-1} : R_f \to D_f$ yang memenuhi $f(f^{-1}(y)) = y\ \forall\ y \in R_f$. Dari sini, jika aturan fungsi f adalah $y = f(x)$, maka $f(f^{-1}(y)) = f(x)$. Karena f satu-kesatu, maka $f^{-1}(y) = x$, atau $f^{-1}(f(x)) = x\ \forall\ x \in D_f$. Akibatnya, untuk fungsi $f : D_f \to R_f$ yang satu-kesatu berlaku

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

ini berarti bahwa

$$\underbrace{(x,y) \in \text{grafik } f \Leftrightarrow (y,x)}_{\text{simetri terhadap } y = x} \in \text{grafik } f^{-1}$$

karena titik (x,y) dan (y,x) simetri terhadap garis y = x, maka dari sini diperoleh

grafik f dan f^{-1} simetri terhadap garis y = x

Contoh. Cara menentukan fungsi invers

Diketahui fungsi f : (-00,0] $\rightarrow$ [0,+00), f (x) . Tentukan invers fungsi f dan sebutlah f^{-1}. Kemudian gambarkan grafik fungsi f dan inversnya pada satu sistem koordinat.

Jawab

Karena f (u) = f (v) $\Rightarrow$ $\sqrt{u}$ = $\sqrt{v} \Rightarrow -u = -v \Rightarrow u = v \forall u, v \in D_f$ =R, maka fungsi f satu kesatu; akibatnya fungsi f mempunyai invers.

Dari hubungan

$$y = \sqrt{-x} \Rightarrow y^2 = -x \Leftrightarrow x = -y^2, x \le 0 \text{ dan } y \ge 0$$

diperoleh bahwa invers dari fungsi f adalah x = f^{-1} (y) = $-y^2$. Agar fungsi f^{-1} dan f dapat digambarkan pada system koordinat yang sama, maka peubah bebasnya mesti sama. Jadi invers dari fungsi f (x) = $\sqrt{-x}$, x $\le$ 0 harus ditampilkan dalam bentuk f^{-1} (x) = $-x^2$, x $\ge$ 0.

Hasil ini dapat juga diperoleh dari hubungan

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

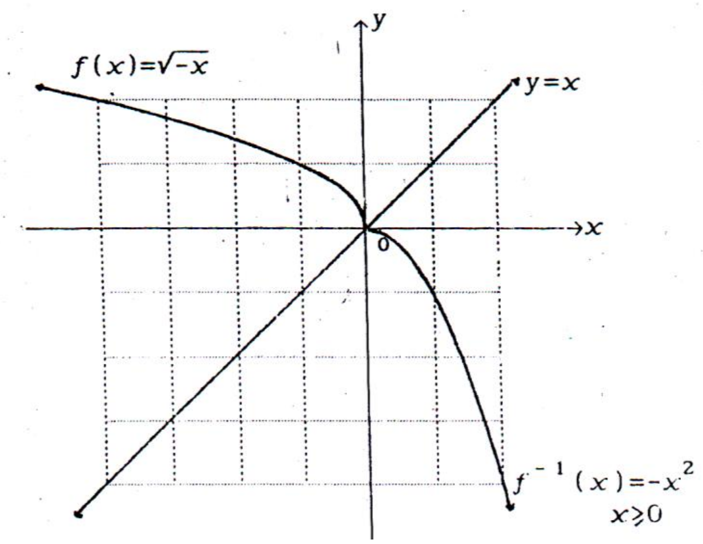
Yang memperlihatkan bahwa kaitan antara aturan f dan f^{-1} adalah x dan y saling bertukar peran. Berdasarkan ini, dari aturan fungsi

$$y = \sqrt{-x}, x \le 0 \text{ dan } y \ge 0$$

buatlah x dan y saling bertukar peran, diperoleh bahwa invers fungsi f adalah

$$x = \sqrt{-y}, y \le 0, x \ge 0$$

yang memberikan x^2 = -y, atau y = $-x^2$, x $\ge$ 0; sama dengan hasil diatas. Perhatikan grafik fungsi f dan inversnya pada Gb.50.



Gb.50, grafik f (x) = $\sqrt{-x}$ dan inversnya f^{-1} (x) = $-x^2$, x $\geq$ 0

Invers Fungsi Trigonometri

Dengan membatasi daerah definisinya pada selang tertentu, fungsi trigonometri dapat dibuat satu-kesatu, sehingga inversnya dapat didefinisikan sebagai berikut.

Invers dari f (x) = sin x, $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ adalah f^{-1} (x) = $\sin^{-1}x$, $|x| \leq 1$

Invers dari f (x) = cos x, $0 < x \leq \pi$ adalah f^{-1} (x) = $\cos^{-1}x$, $|x| \leq 1$

Invers dari f (x) = tan x, $|x| < \frac{\pi}{2}$ adalah f^{-1} (x) = $\tan^{-1}x$, $x \in R$

Invers dari f (x) = cot x, $0 < x < \pi$ adalah f^{-1} (x) = $\cot^{-1}x$, $x \in R$

Invers dari f (x) = sec x, $0 \leq x \leq \pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ adalah f^{-1} (x) = $\sec^{-1}x$, $|x| \geq 1$

Invers dari f (x) = csc x, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$ adalah f^{-1} (x) = $\csc^{-1}x$, $|x| \geq 1$

Berdasarkan sifat yang mengkaitkan aturan suatu fungsi dan inversnya, maka diperoleh hubungan antara invers fungsi trigonometri dengan fungsi asalnya.

1. $y = \sin^{-1}x$, $|x| \leq 1 \Leftrightarrow x = \sin y$, $|y| \leq \frac{\pi}{2}$
2. $y = \sin^{-1}x$, $|x| \leq 1 \Leftrightarrow x = \cos y$, $0 \leq y \leq \pi$
3. $y = \tan^{-1}x$, $x \in R \Leftrightarrow x = \tan y$, $|y| < \frac{\pi}{2}$
4. $y = \cot^{-1}x$, $x \in R \Leftrightarrow x = \cos y$, $0 < y < \pi$
5. $y = \sec^{-1}x$, $|x| \geq 1 \Leftrightarrow x \sec y$, $0 \leq y \leq \pi$, $y \neq \frac{\pi}{2}$

6. $y = \csc^{-1}x$, $|x| \geq 1 \Leftrightarrow x = \csc y$, $|y| \leq \frac{\pi}{2}$, $y \neq 0$

Hubungan antara invers fungsi trigonometri diberikan dalam rumus berikut.

Teorema

1. $\sin^{-1} x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \leq 1$
2. $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $x \neq\in R$
3. $\csc^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \geq 1$
4. $\sec^{-1}x = \cos^{-1} \frac{1}{x}$, $|x| \geq 1$
5. $\csc^{-1}x = \cos^{-1} \frac{1}{x}$, $|x| \geq 1$

Kita hanya akan membuktikan rumus pertama saja, rumus lainnya dibuktikan dengan cara serupa dan diserahkan untuk latihan pembaca. Untuk ini, misalkan

$$Y = \sin^{-1}x,\ |x| \leq 1 \text{ dan } |y| \leq \frac{\pi}{2}$$

Dari sini diperoleh

$$x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right),\ 0 \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \pi$$

(periksa!). Ini mengakibatkan

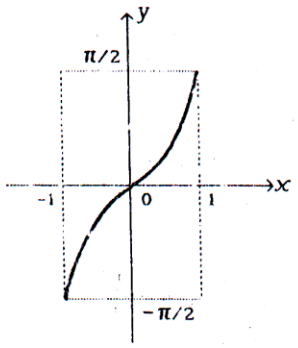
$$\frac{\pi}{2} - y = \cos^{-1}x$$

atau

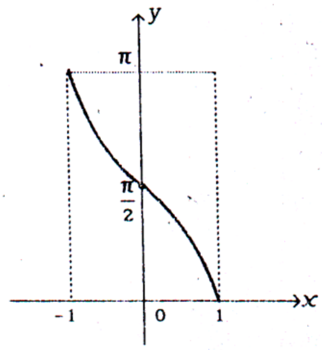
$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2},\ |x| \leq 1$$

sehingga terbuktilah yang diinginkan.

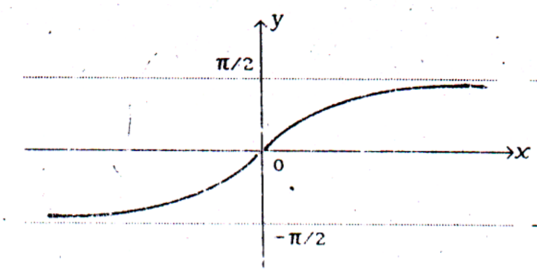
Grafik invers fungsi trigonometri diperoleh dengan cara mencerminkan grafik fungsi asalnya terhadap garis y = x, hasilnya diperlihatkan pada Gb.51. sampai dengan Gb.56.



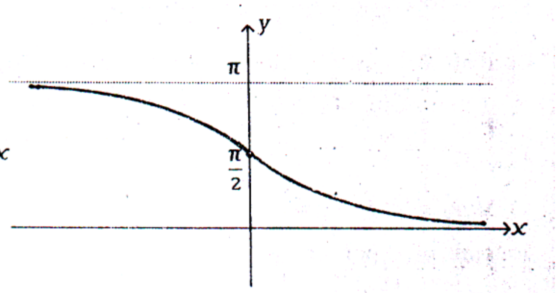
Gb.51, grafik $y = \sin^{-1} x$



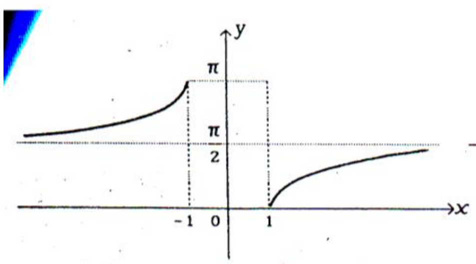
Gb.52, grafik $y = \cos^{-1} x$



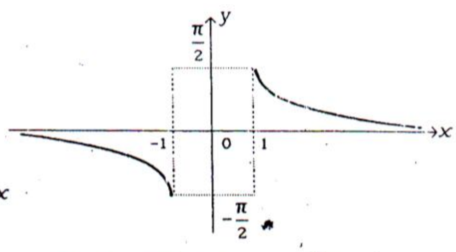
Gb.53, grafik $y = \tan^{-1} x$



Gb.54, grafik $y = \cot^{-1} x$



Gb.55, grafik $y = \sec^{-1} x$



Gb.56, grafik $y = \csc^{-1} x$

Contoh 30, Nilai eksak yang berkaitan dengan invers fungsi trigonometri

Tunjukkan

(a) $\cos\left(2 \sin^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{9}$, (b) $2 \tan^{-1} \frac{1}{3} = \tan^{-1} \frac{3}{4}$, (c) $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

Jawab

(a) Misalkan t = 2 $\sin^{-1}(-\frac{2}{3})$, maka $\sin^{-1}(-\frac{2}{3}) = \frac{t}{2}$, sehingga $\sin \frac{t}{2} = \frac{2}{3}$. Jadi

$\cos(2\sin^{-1}(-\frac{2}{3})) = \cos t = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2} = 1 - 2\,\frac{4}{9} = \frac{1}{9}$

(b) Misalkan t = 2 $\tan^{-1}\frac{1}{3}$, maka $\tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{t}{2}$, sehingga $\tan\frac{t}{2} = \frac{1}{3}$.

Akibatnya $\tan t = \dfrac{2\tan\frac{t}{2}}{1-\tan^2\frac{t}{2}} = \dfrac{2.\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \dfrac{3}{4}$, dari sini diperoleh $t = \tan^{-1}\frac{3}{4}$.

Jadi $2\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

(c) Misalkan $s = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ dan $t = \tan^{-1}\frac{1}{3}$, maka $\tan s = \frac{1}{2}$ dan $\tan t = \frac{1}{3}$. Kita akan menunjukkan $s + t = \frac{\pi}{4}$. Dari rumus trigonometri diperoleh

$$\text{Tan }(s+t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

Akibatnya $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = s + t = \frac{\pi}{4}$.

Contoh, Kesamaan invers fungsi trigonometri

Tunjukkan $\sin(\tan^{-1}x) + \cos(\tan^{-1}x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

Jawab

Misalkan $t = \tan^{-1}x$, maka $\tan t = x$ dengan $|t| < \frac{\pi}{2}$. Berdasarkan rumus trigonometri diperoleh $\sec^2 t = 1 + \tan^2 t = 1 + x^2$. Karena $|t| < \frac{\pi}{2}$, maka

$$\text{Sec } t = \sqrt{\sec^2 t = \sqrt{1+x^2}}$$

Jadi

$\sin(\tan^{-1}x) + \cos(\tan^{-1}x) = \sin t + \cos t = \cos t(\tan t + 1)$

$$= \frac{1}{\sec t}(x+1) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Contoh 32, Daerah definisi, daerah nilai, dan invers dari invers fungsi trigonometri

Tentukan daerah asal, daerah nilai, dan invers fungsi f (x) = $\cos^{-1} \frac{2x-3}{5}$.

Jawab

Agar f (x) $\in$ R, syaratnya adalah -1 $\geq \frac{2x-3}{5} \leq 1$, yang menghasilkan

$$-5 \leq 2x - 3 \leq 5$$

$$-2 \leq 2x \leq 8$$

$$-1 \leq x \leq 4$$

Jadi daerah nilai fungsi f adalah $D_f = [-1,4]$.

Jika $-1 \leq x \leq 4$, maka $-1 \leq \frac{2x-3}{5} \leq 11$, akibatnya

$$0 \leq f(x) = \cos^{-1} \frac{2x-3}{5} \leq \pi$$

Jadi daerah nilai fungsi f adalah $R_f = [0, \pi]$.

Untuk menentukan invers fungsi f, misalkan

$$y = \cos^{-1} \frac{2x-3}{5}, \ -1 \leq x \leq 4 \text{ dan } 0 \leq y \leq \pi$$

kemudian buatlah x dan y saling bertukar peran, diperoleh

$$x = \cos^{-1} \frac{2y-3}{5}, \ -1 \leq y \leq 4 \text{ dan } 0 \leq x \leq \pi$$

$$\cos x = \frac{2y-3}{5}$$

$$2y - 3 = 5 \cos x$$

$$y = 2\frac{1}{2} \cos x + 1\frac{1}{2}, \ 0 \leq x \leq \pi \text{ dan } -1 \leq y \leq 4$$

jadi fungsi invers f adalah

$$f^{-1}(x) = 2\frac{1}{2}\cos x + 1\frac{1}{2},\ 0 \le x \le \pi \text{ dan } -1 \le y \le 4$$

Sumber Bacaan.

Matono, K.(1992). *Seri Matematika Kalkulis jilid 1*.Bandung: Jurusan Matematika FMIPA ITB