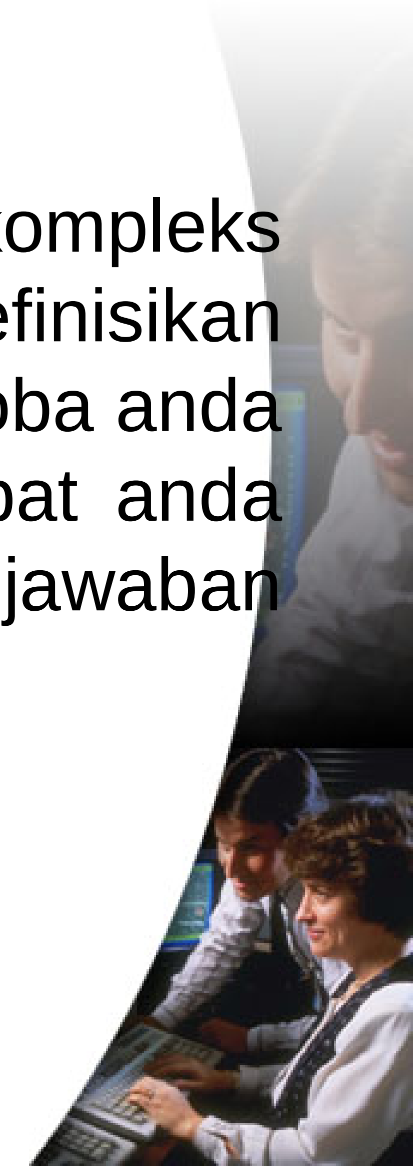
FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

Oleh:
Endang Dedy

Sistem Bilangan Kompleks (1)

- Diskusikan!

  Perhatikan definisi berikut: ”Bilangan kompleks z adalah suatu bilangan yang didefinisikan dengan z=x+iy, $x, y \in R$ dan $i = \sqrt{-1}$ ”.Coba anda analisis definisi tersebut,apa yang dapat anda katakan? Jelaskan yang mendasari jawaban anda!



Sistem Bilangan Kompleks (2)

DEFINISI:

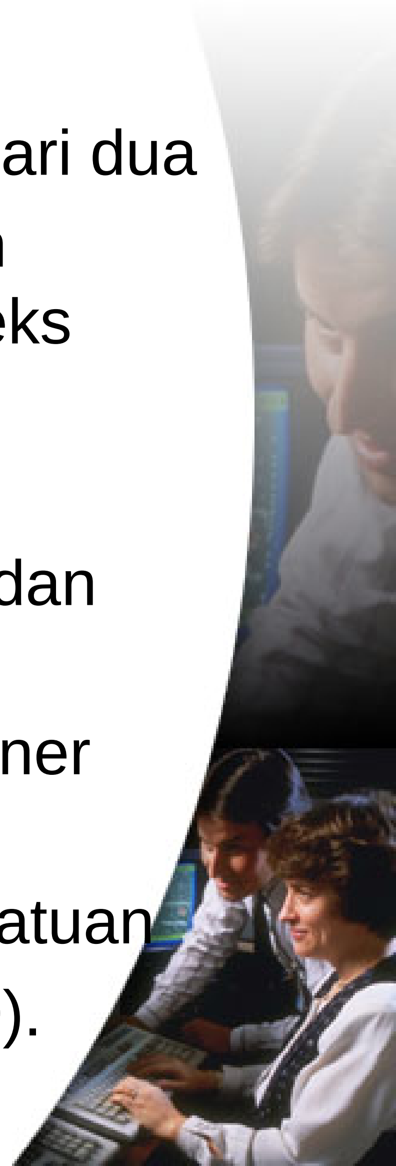
Bilangan kompleks adalah pasangan terurut dari dua bilangan real x dan y yang dinyatakan dengan lambang z=(x,y). Himpunan bilangan kompleks didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{C} = \{ z : z = (x,y) : x, y \in \boldsymbol{R} \}$$

a. Pada bilangan kompleks z=(x,y), x=Re(z) dan y=Im(z)

b. Bilangan kompleks z disebut bilangan imajiner murni, bila Re(z)=0

c. jika Re(z)=0 dan Im(z)=1, maka z disebut satuan imajiner yang dilambangkan dengan i=(1,0).



Sistem Bilangan Kompleks (3)

DEFINISI:

Diberikan bilangan kompleks $z_n=(x_n,y_n)$, n=1,2. Operasi pada himpunan bilangan kompleks didefinisikan dengan

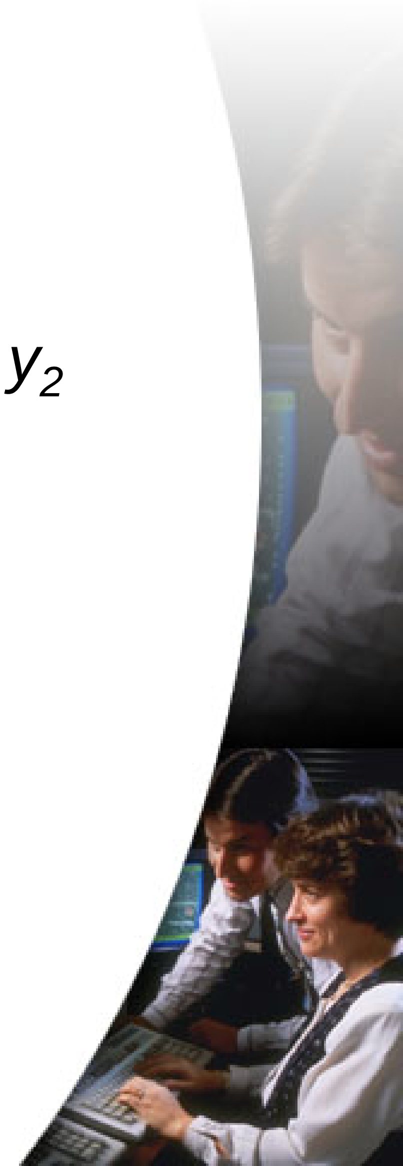
(a) $z_1 = z_2$ *jika dan hanya jika* $x_1 = x_2$ *dan* $y_1 = y_2$

(b) $z_1 + z_2 = (x_1+x_2,y_1+y_2)$

(c) $z_1 - z_2 = z_1+(-z_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2)$

(d) $kz_1 = (kx_1,ky_1)$, *k konstanta real*

(e) $z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$

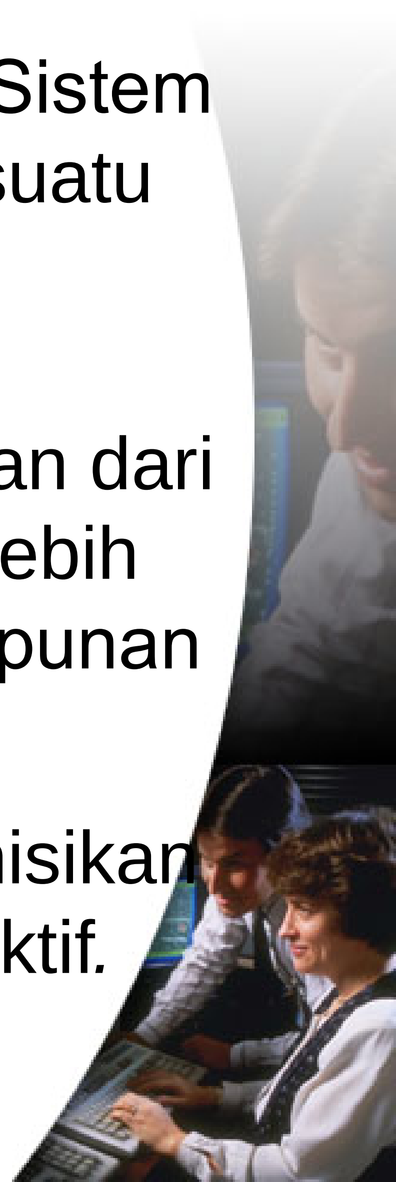


Sistem Bilangan Kompleks (4)

- Coba Anda buktikan teorema berikut: ”Sistem bilangan kompleks (C,+,.) merupakan suatu lapangan (field).
- Sebelum membicarakan bahwa sistem bilangan kompleks merupakan perluasan dari sistem bilangan real, coba buktikan terlebih dahulu teorema berikut: “Diberikan himpunan

$$\boldsymbol{C_0} = \{ z \in \boldsymbol{C} : z = (x,0),\ x \in \boldsymbol{R} \}.$$

Jika $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C_0}$ suatu fungsi yang didefinisikan dengan f(x,y)=(x,0), maka f fungsi bijektif.



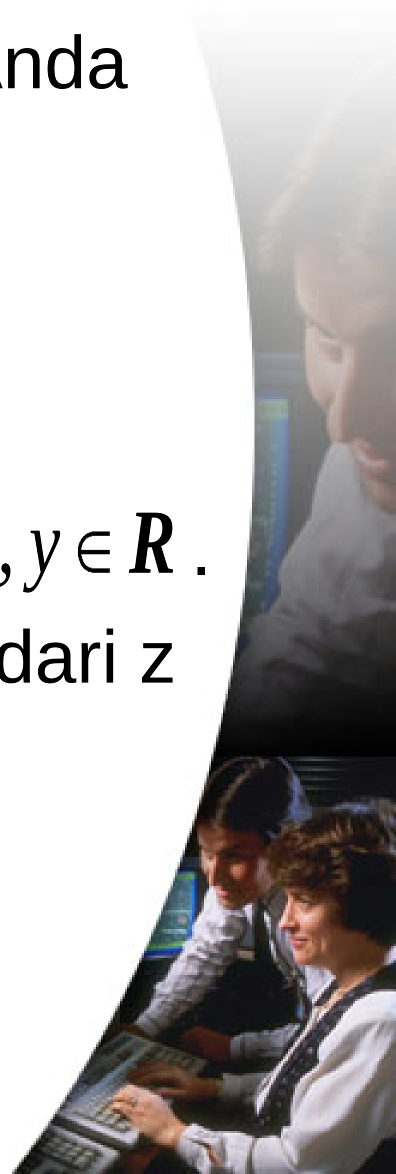
Sistem Bilangan Kompleks (6)

- Berdasarkan kesimpulan di atas, coba Anda tuliskan definisi operasi pada himpunan bilangan kompleks *C.*

- DEFINISI(Operasi Konjuget):

  Diberikan bilangan kompleks $z = x + iy;\ x, y \in \boldsymbol{R}$.

  Bilangan kompleks sekawan (konjuget) dari z didefinisikan dengan $\bar{z} = x - iy$



Sistem Bilangan Kompleks (7)

- Coba anda buktikan teorema berikut:

Diberikan $z_1, z_2 \in C$. Operasi konjuget pada sistem bilangan kompleks adalah

$(a)\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$(b)\ \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

$(c)\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

$(d)\ \overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2},\ z_2 \neq 0$

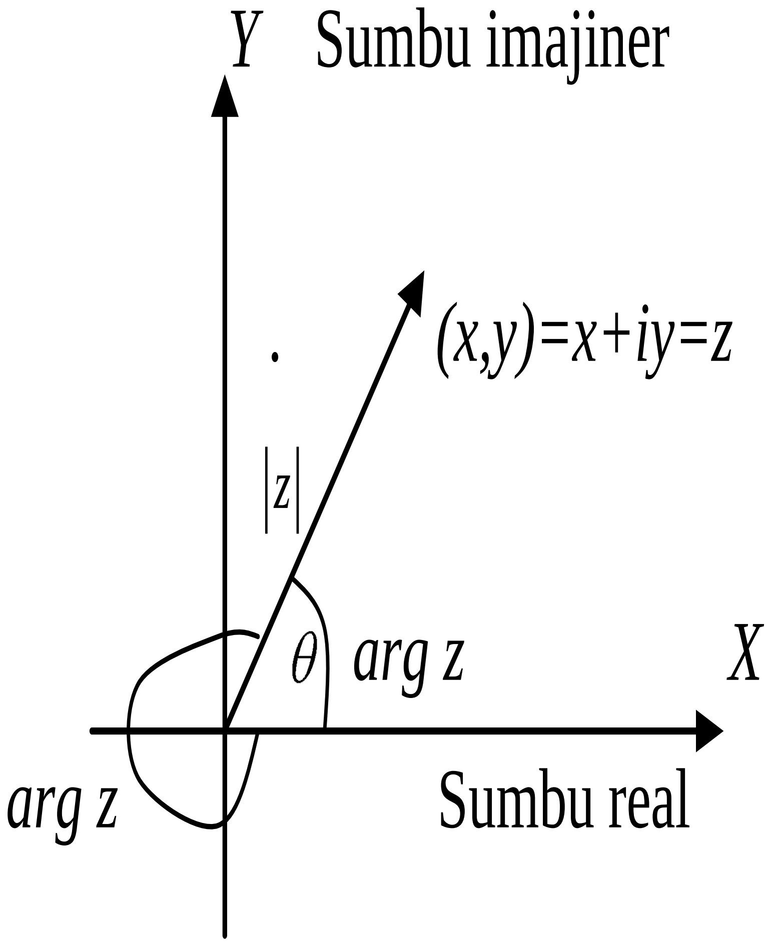
$(e)\ \overline{\overline{z}} = z$

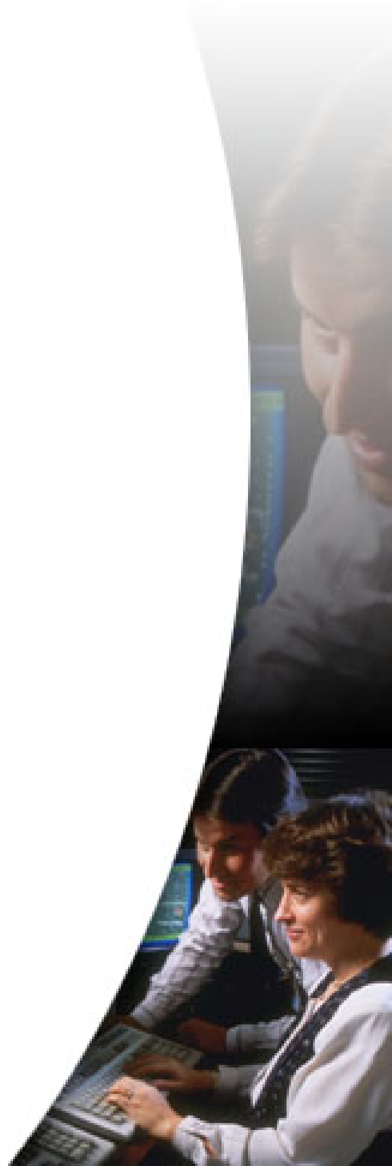
$(f)\ z\overline{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$

$(g)\ z + \overline{z} = 2\,Re(z)$

$(h)\ z - \overline{z} = 2i\,Im(z)$

Geometri bilangan kompleks (2)



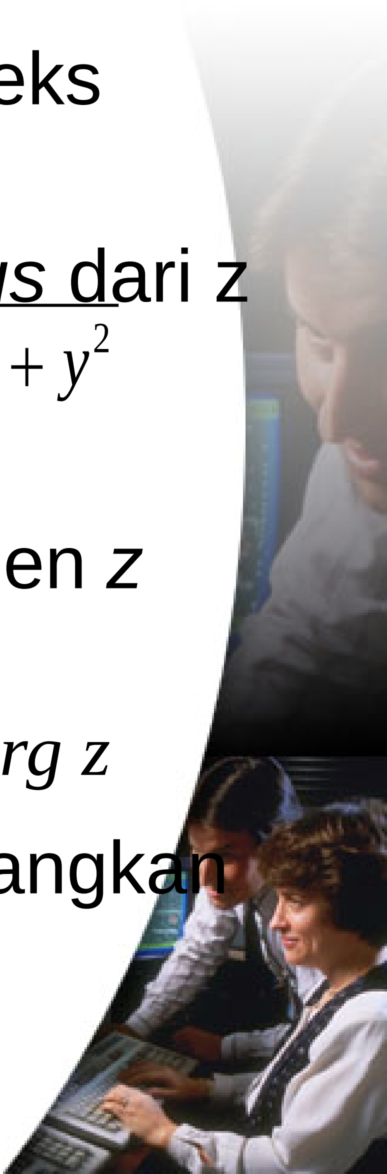


Geometri bilangan kompleks (3)

- Segmen oz menyatakan bilangan kompleks *z=x+iy*
- Panjang segmen oz menyatakan *modulus* dari z dan dilambangkan dengan $|z|$, dan $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Untuk sebarang *nilai utama argumen z* didefinisikan sebagai nilai tunggal argumen *z* yang memenuhi hubungan

$$\theta = \angle(\overline{oz}, \text{sumbu real positif}) = \text{argumen } z = arg\ z$$

Nilai tunggal argumen *z* tersebut dilambangkan dengan *Arg z.*



Geometri bilangan kompleks (4)

- Buktikan sifat-sifat modulus dari suatu bilangan kompleks berikut ini.

Jika $z, w \in \mathbf{C}$, ***maka berlaku***

$(a)\quad |z| = |-z| = |\bar{z}|$

$(b)\quad |z-w| = |w-z|$

$(c)\quad |z|^2 = |z^2| = z\,\bar{z}$

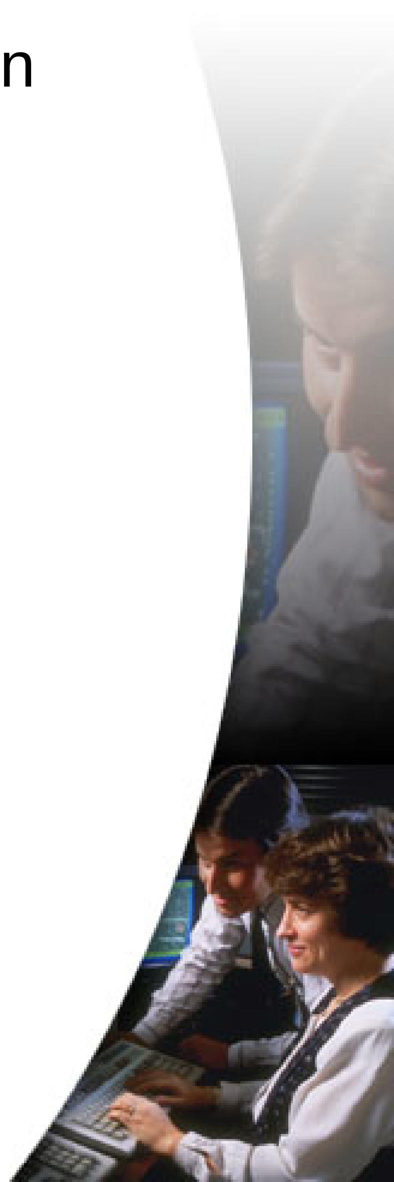
$(d)\quad |zw| = |z||w|$

$(e)\quad \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|},\ w \neq 0$

$(f)\quad |z+w| \leq |z| + |w|$

$(g)\quad \big||z| - |w|\big| \leq |z-w|$

$(h)\quad |z| - |w| \leq |z+w|$



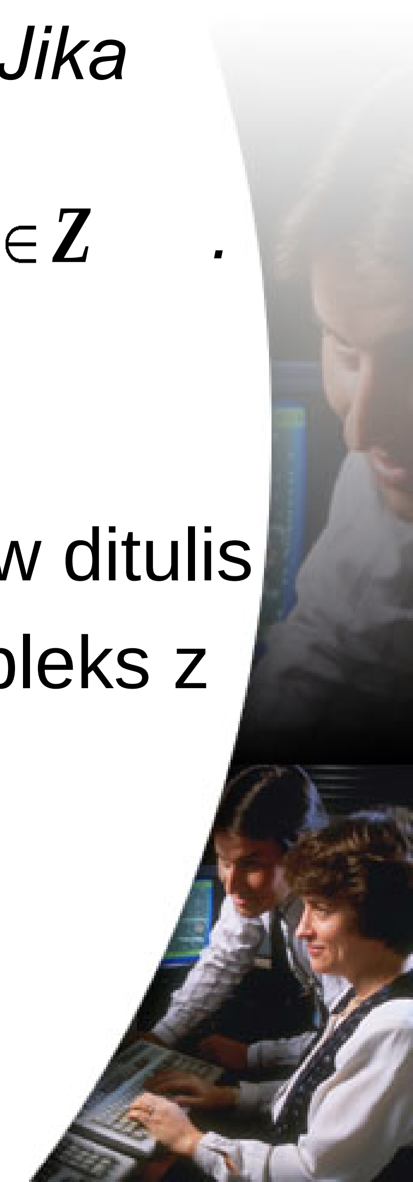
Akar Bilangan Kompleks (1)

- *Coba Anda buktika teorea De Moivre :" Jika* $z \in \boldsymbol{C}$ dengan $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *maka* $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ *untuk setiap* $n \in \boldsymbol{Z}$ *.*

- *DEFINISI (Akar):*

  Diberikan $z, w \in \boldsymbol{C}$. Akar pangkat n dari w ditulis $w^{\frac{1}{n}}$ didefinisikan sebagai bilangan kompleks z sehingga berlaku

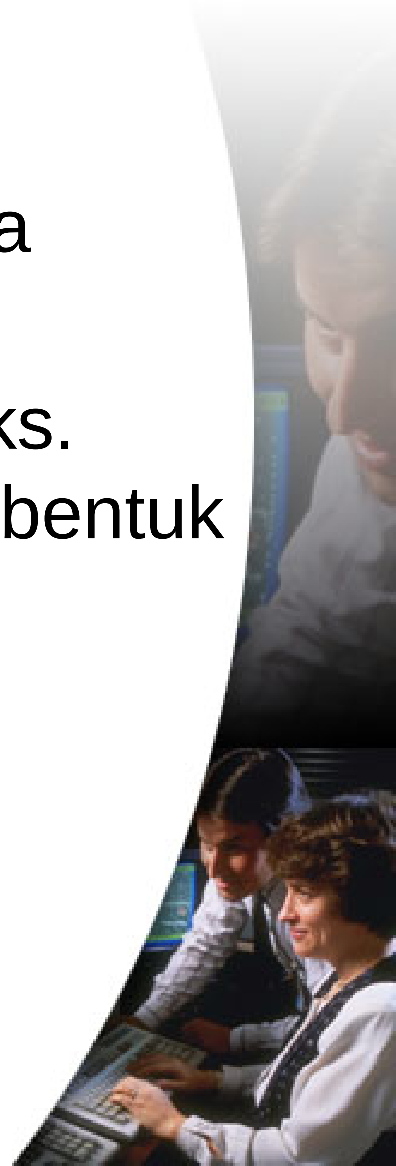
$$z^n = w,\ n \in \boldsymbol{N},\ \text{dan}\ n \geq 2.$$



Akar Bilangan Kompleks (2)

a. Hitunglah $i^{1/3}$

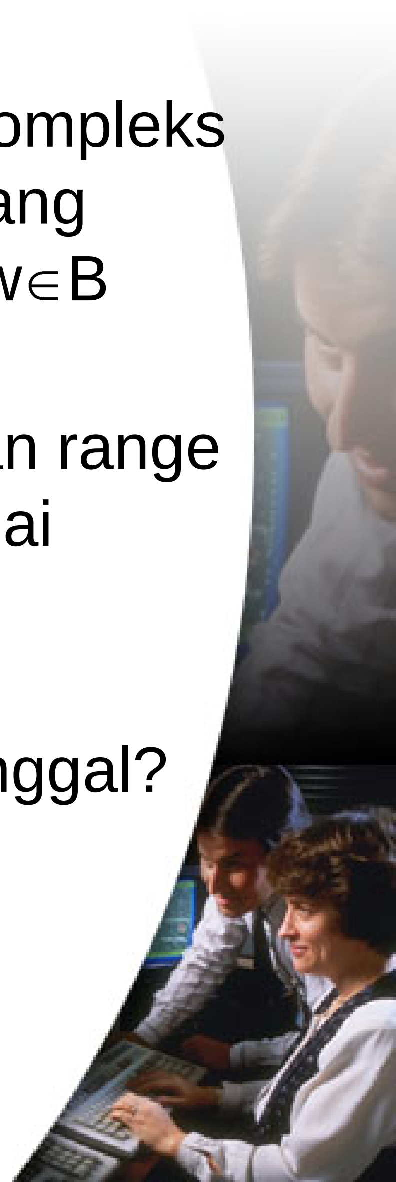
b. Berdasarkan penyelesaikan yang anda kerjakan, simpulkan bagimana cara menyelesaikan akar bilangan kompleks. Nyatakan kesimpulan tersebut dalam bentuk teorema, kemudian buktikan !



FUNGSI KOMPLEKS [1]

- **DEFINISI (Fungsi bernilai tunggal):**

  Diberikan himpunan $A \subseteq \boldsymbol{C}$ dan $\mathrm{B} \subseteq \boldsymbol{C}$. Fungsi kompleks bernilai tunggal $f : A \to B$ adalah suatu aturan yang memasangkan setiap $z \in A$ dengan tepat satu $w \in B$ yang dinotasikan dengan w = f(z).
- Berdasarkan definisi diatas, tuliskan domain dan range fungsi f, kemudian berikan contoh fungsi bernilai tunggal.
- Sekarang bandingkan apakah definisi berikut bertentangan dengan definisi fungsi bernilai tunggal? Berika penjelasan secukupnya.

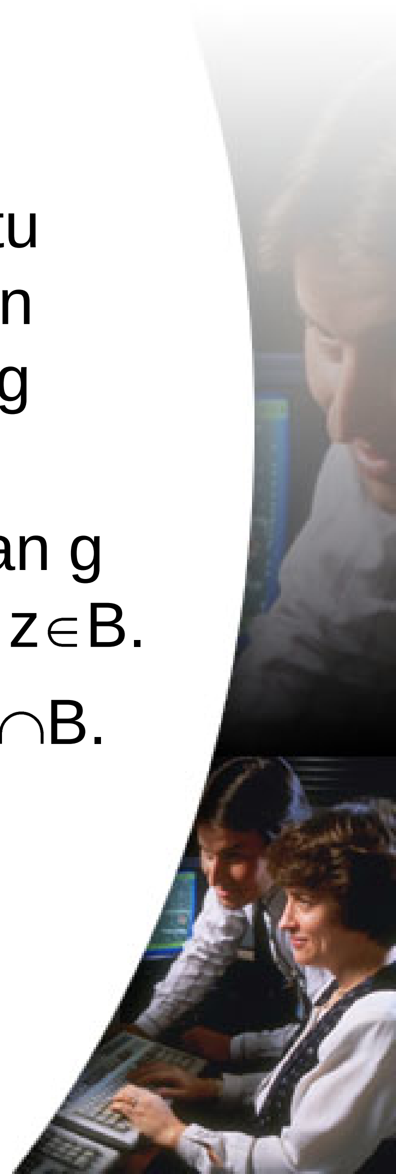


FUNGSI KOMPLEKS [2]

- **DEFINISI (Fungsi Bernilai Banyak):**

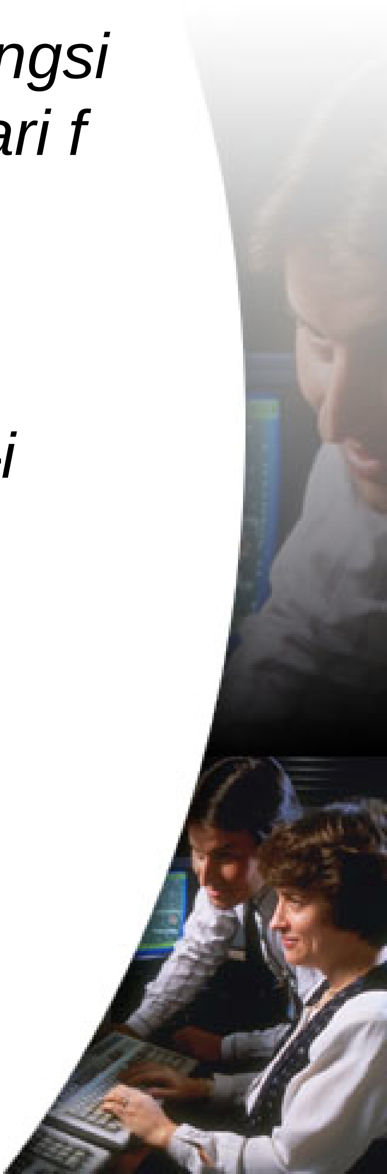
  Diberikan himpunan $A \subseteq C$ dan $B \subseteq C$. Fungsi kompleks bernilai banyak $f: A \rightarrow B$ adalah suatu aturan yang memasangkan setiap $z \in A$ dengan paling sedikit satu $w \in B$ dan terdapat $z \in A$ yang dipasangkan dengan paling sedikit dua $w \in B$.
- Diberikan himpunan $A \subseteq C$ dan $B \subseteq C$. Fungsi f dan g didefinisikan dengan $w = f(z), z \in A$ dan $s = g(z)$, $z \in B$.

  Tulisakan operasi dari fungsi f dan g pada$D = A \cap B$.



FUNGSI KOMPLEKS [3]

- *Diberikan $f : D_f \to R_f$ dan $g : D_g \to R_g$ adalah fungsi kompleks. Tuliskan definisi fungsi komposisi dari f dan g. Kemudian definisikan domain dan range fungsi komposisi g o f.*
- *Diskusikan!*
  Diberikan fungsi $f(z) = 3z+i$ dan $g(z) = z2+z+1–i$
  a. Tentukan $(f + g)(z)$
  b. Selidiki apakah fungsi g o f terdefinisi dan tuliskan aturan fungsinya.



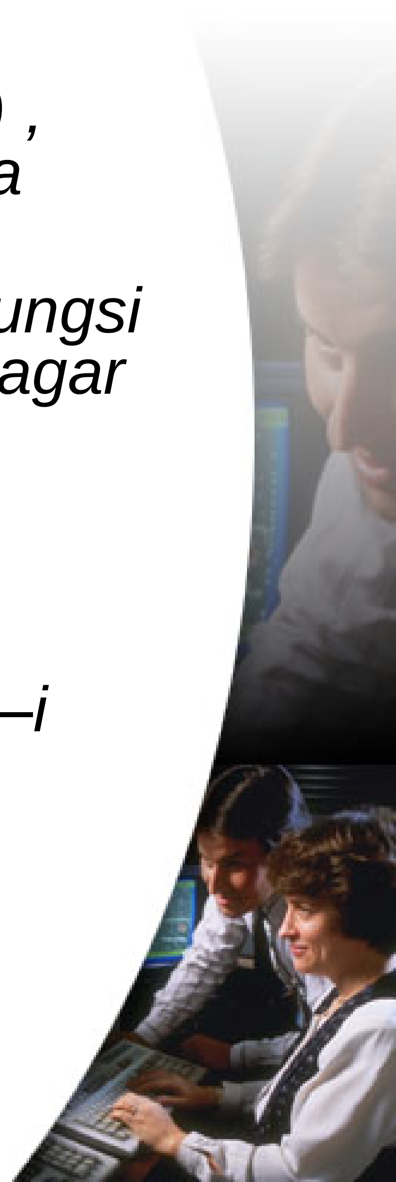
FUNGSI KOMPLEKS [4]

- *Diberikan $A \subseteq C$ dan $B \subseteq C$. Fungsi f dan g didefinisikan dengan $w = f(z)$, $z \in A$ dan $s=g(z)$, $z \in B$. Tuliskan Operasi dari fungsi f dan g pada $D = A \cap B$*
- *Diberikan $f : D_f \rightarrow R_f$ dan $g : D_g \rightarrow R_g$ adalah fungsi kompleks. Syarat apakah yang harus dipenuhi agar fungsi komposisi f dan g terdefinisi. Kemudian tuliskan persamaan fungsi komposisi f dan g, domain dan range gof*
- *Diskuskan!*

  Diberikan fungsi $f(z) = 3z+i$ dan $g(z) = z^2+z+1-i$

  a. Tentukan $(f + g) (z)$

  b. Selidiki apakah fungsi $g \circ f$ terdefinisi dan tuliskan aturan fungsinya.



FUNGSI EKSPONEN

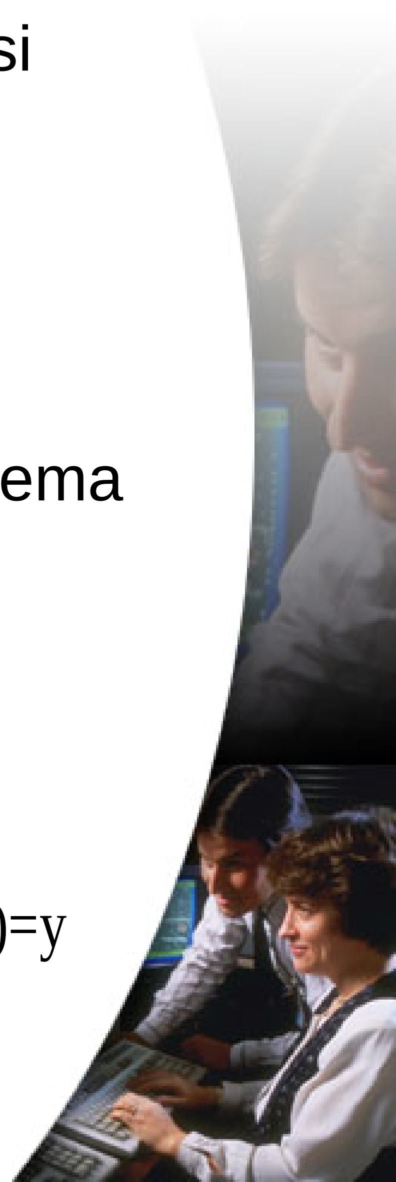
- Fungsi yang berbentuk $f(z)=e^z, z \in C$ disebut fungsi eksponen.
- DEFINISI:

  Untuk bilangan kompleks z = x + iy didefinisikan
  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.
- Gunakan definisi di atas untuk membuktikan teorema berikut: Jika $z,w \in C$, maka

(a) $e^z \neq 0$ (d) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$

(b) $e^{z+w} = e^z.e^w$ (e) $e^{z-w} = \dfrac{e^z}{e^w}$

(c) $e^z = e^{z+2\pi i}$ (f) Jika z=x+iy, maka $|e^z| = e^x$ dan $\text{Arg}(e^z)=y$



FUNGSI TRIGONOMETRI [1]

- DEFINISI: Untuk bilangan kompleks z didefinisikan

$$(a)\quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$(b)\quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$(c)\quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$(d)\quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$(e)\quad \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

$$(f)\quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

FUNGSI TRIGONOMETRI [2]

- Berdasarkan definisi di atas buktikan Teorema berikut:
  Jika z,w$\in$C, maka berlaku

$$(a)\quad \sin z = 0 \text{ jika dan hanya jika } z = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$(b)\quad \cos z = 0 \text{ jika dan hanya jika } z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$(c)\quad \sin(-z) = -\sin z$$

$$(d)\quad \cos(-z) = \cos z$$

$$(e)\quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

FUNGSI TRIGONOMETRI [3]

$$(f)\quad \sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w$$

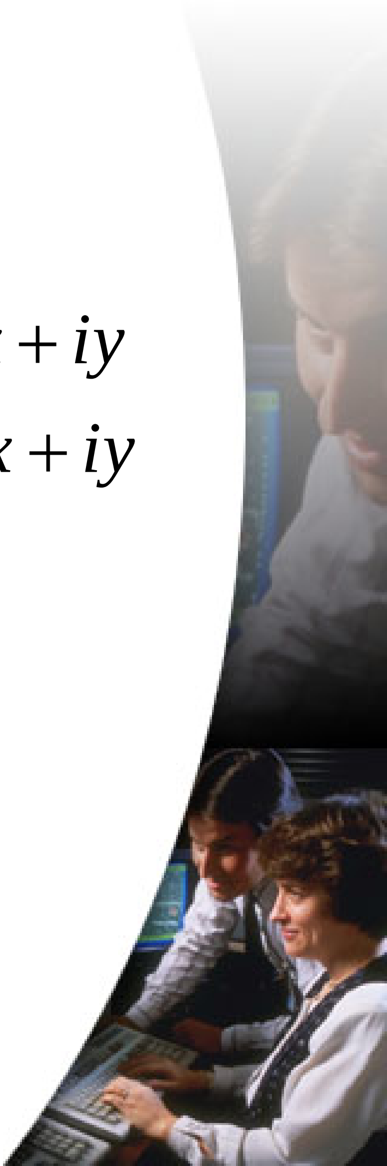
$$(g)\quad \cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$$

$$(h)\quad \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,\ z = x + iy$$

$$(i)\quad \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,\ z = x + iy$$

$$(j)\quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y,\ z = x + iy$$

$$(k)\quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y,\ z = x + iy$$



FUNGSI HIPERBOLIK [1]

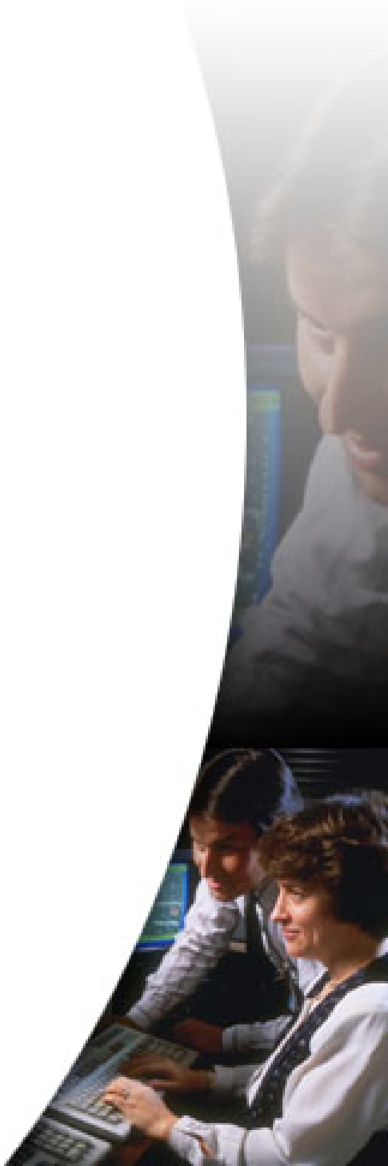
- DEFINISI :

Untuk variabel kompleks z didefinisikan fungsi hiperbolik

$$(a) \quad \sinh z = \tfrac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$$

$$(b) \quad \cosh z = \tfrac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$

$$(c) \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$



FUNGSI HIPERBOLIK [2]

- DEFINISI :

  Untuk variabel kompleks z didefinisikan fungsi hiperbolik

$$(d)\quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

$$(e)\quad \sec z = \frac{1}{\cosh z}$$

$$(f)\quad csh\, z = \frac{1}{\sinh z}$$

FUNGSI HIPERBOLIK [3]

- Berdasarkan definisi di atas, buktikan Teorema berikut:

  Jika z,w$\in$C, maka berlaku sifat-sifat

$$(a)\quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

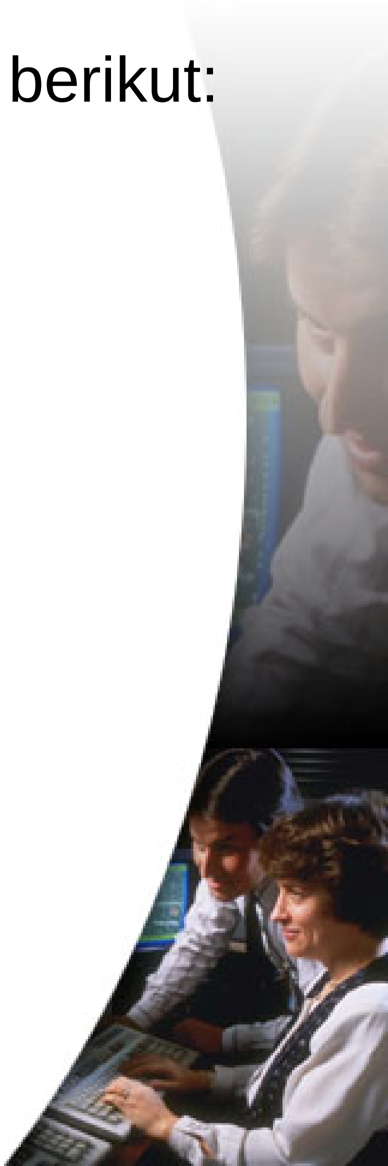
$$(b)\quad 1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$$

$$(c)\quad \coth^2 z - 1 = \operatorname{csch}^2 z$$

$$(d)\quad \sinh(-z) = -\sinh z$$

$$(e)\quad \cosh(-z) = \cosh z$$

$$(f)\quad \tanh(-z) = -\tanh z$$



FUNGSI HIPERBOLIK [4]

$$(g) \quad \sinh(z \pm w) = \sinh z \cosh w \pm \cosh z \sinh w$$

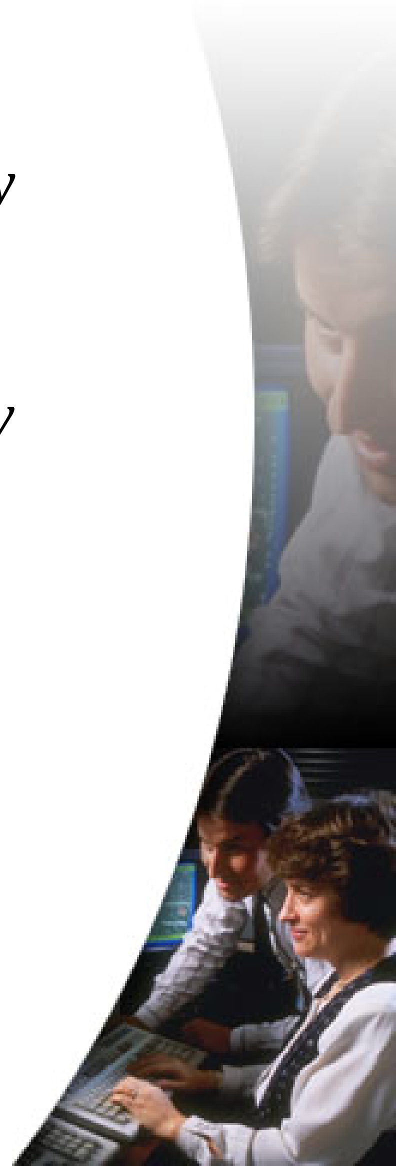
$$(h) \quad \cosh(z \pm w) = \cosh z \cosh w \pm \sinh z \sinh w$$

$$(i) \quad sinh\, z = sinh\, x \cos y + i\, cosh\, x \sin y, z = x + iy$$

$$(j) \quad cosh\, z = cosh\, x \cos y + i\, sinh\, x \sin y, z = x + iy$$

$$(k) \quad \left| sinh\, z \right|^2 = sinh^2 x + sin^2 y, z = x + iy$$

$$(l) \quad \left| cosh\, z \right|^2 = cosh^2 x - sin^2 y, z = x + iy$$



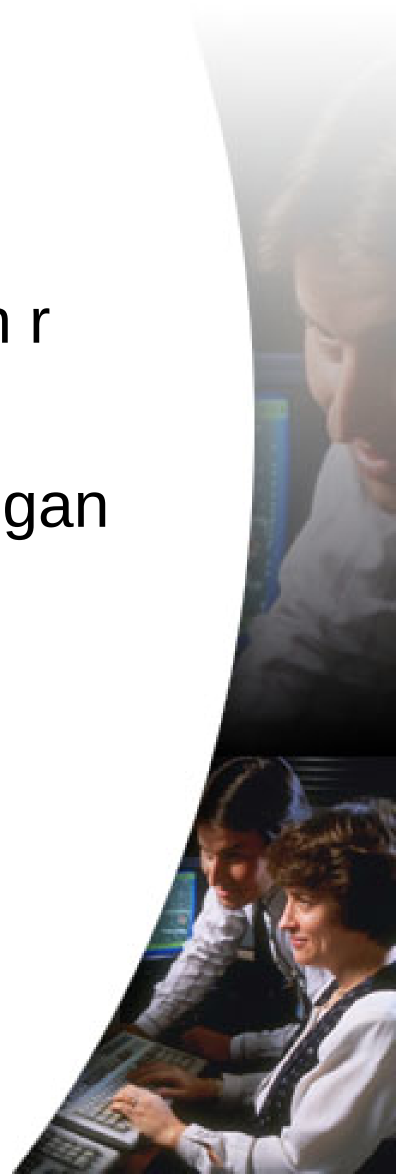
Konsep Dasar Dalam Topologi di Bidang Kompleks [1]

- DEFINISI :

  Diberikan $z_o \in \mathbf{C}$, $r \in \mathbf{R}$, dengan $r>0$.

  (a) $N(z_o,r)=\{z \in \mathbf{C}: |z - z_o| < r\}$ disebut lingkungan r dari z_o

  (b) $N^*(z_o,r)=\{z \in \mathbf{C}: 0 < |z - z_o| < r\}$ disebut lingkungan r dari z_o tanpa z_o



Konsep Dasar Dalam Topologi di Bidang Kompleks [2]

- DEFINISI :

Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbf{C}$.

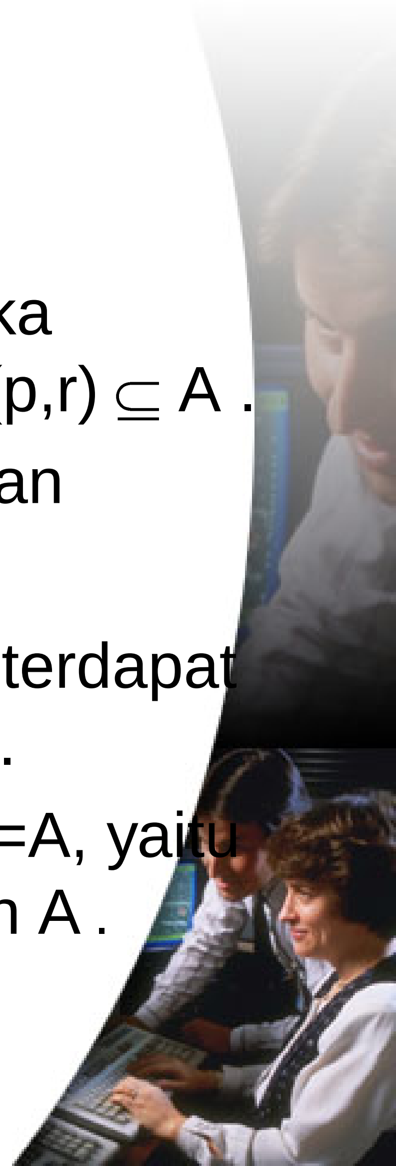
a. Titik $p \in \mathbf{C}$ disebut titik dalam himpunan A, jika terdapat bilangan $r>0$, sehingga berlaku $N(p,r) \subseteq A$.

b. Himpunan titik dalam A didefinisikan dengan

$A^0 = \{p \in \mathbf{C}$: p titik dalam himpunan A$\}$.

c. Titik $p \in \mathbf{C}$ disebut titik luar himpunan A, jika terdapat bilangan $r>0$, sehingga berlaku $N(p,r) \subseteq A^C$.

d. A disebut himpunan terbuka jika berlaku $A^0=A$, yaitu setiap $z \in A$ merupakan titik dalam himpunan A .



Konsep Dasar Dalam Topologi di Bidang Kompleks [3]

- DEFINISI :

Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbf{C}$.

a. Titik $p \in \mathbf{C}$ disebut titik limit himpunan A, jika untuk setiap bilangan $r>0$ berlaku $N(p,r) \cap A - \{p\} \neq \phi$.

b. Himpunan titik limit A didefinisikan dengan

$A' = \{ p \in \mathbf{C}: \text{ p titik limit himpunan } A \}$

c. A disebut himpunan tertutup, jika berlaku $A' \subseteq A$.

d. Titik $p \in \mathbf{C}$ disebut titik terasing (terpencil) himpunan A, jika dan p bukan titik limit A, yaitu terdapat bilangan $r>0$ sehingga berlaku $N(p,r) \cap A = \phi$.

Konsep Dasar Dalam Topologi di Bidang Kompleks [4]

- DEFINISI:

  Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbf{C}$.

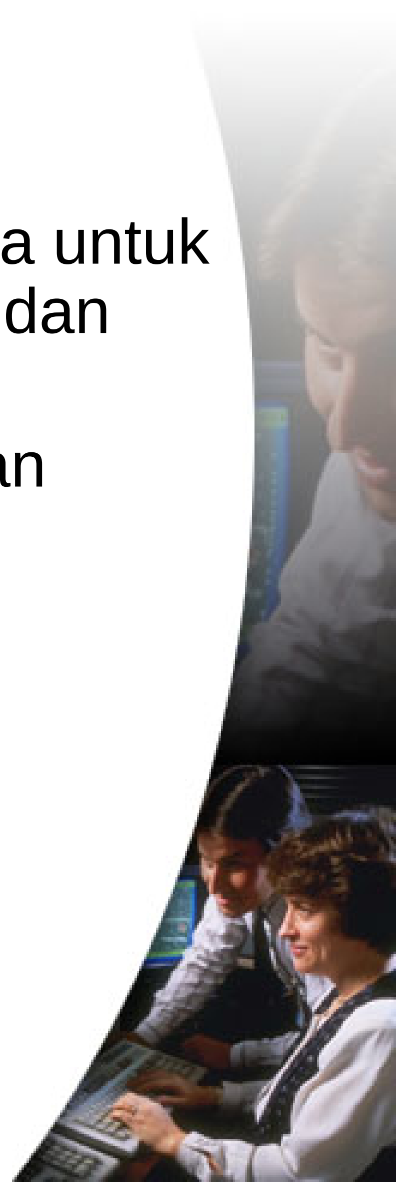
  a. Titik $p \in \mathbf{C}$ disebut titik batas himpunan A, jika untuk setiap bilangan r>0 berlaku $N(p,r) \cap A \neq \phi$ dan $N(p,r) \cap Ac \neq \phi$.

  b. Himpunan titik batas A didefinisikan dengan $\delta(A)$ = {p: p titik batas himpunan A}

  c. Interior himpunan A didefinisikan dengan Int(A) = {z: z titik dalam A}

  d. Eksterior himpunan A didefinisikan dengan Eks(A) ={z: z titik luar A}

  e. Penutup himpunan A didefinisikan dengan $\overline{A} = A \cup A' = A \cup \delta(A)$



Konsep Dasar Dalam Topologi di Bidang Kompleks [5]

- Definisi :

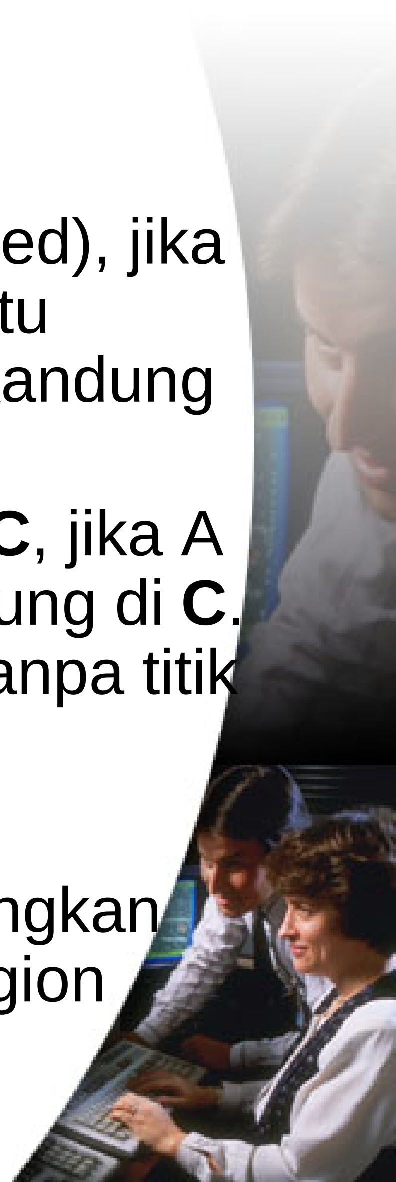
  Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbf{C}$

  a. Himpunan A dikatakan terhubung (connected), jika setiap $z_1, z_2 \in A$ dapat dihubungkan oleh suatu lengkungan kontinu C yang seluruhnya terkandung di A

  b. Himpunan A dikatakan daerah (domain) di **C**, jika A adalah suatu himpunan terbuka dan terhubung di **C**. Region adalah suatu daerah dengan atau tanpa titik batasnya.

- Catatan:

  Daerah seringkali disebut region terbuka sedangkan suatu daerah beserta titik batasnya disebut region tertutup.



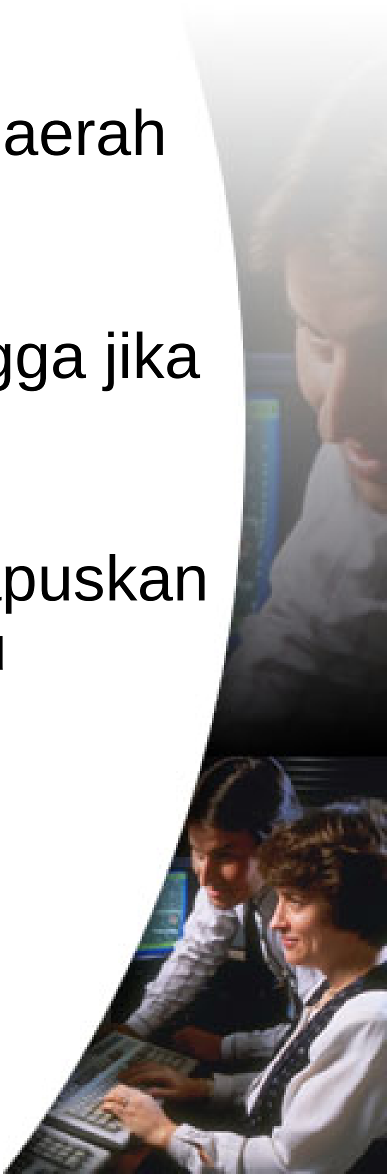
Limit Fungsi Kompleks [1]

- DEFINISI :

Diberikan suatu fungsi f yang terdefinisi pada daerah $D \subseteq C$ dan $z_0 \in D'$.

a. $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |z - z_o| < \delta$, $z \in D$ berlaku $|f(z) - L| < \varepsilon$

b. $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ jika dan hanya jika untuk setiap lingkungan $N(L,\varepsilon)$ terdapat lingkungan terhapuskan $N^*(z_0,\delta)$ sehingga jika $z \in N^*(z_0,\delta) \cap D$ berlaku $f(z) \in N(L,\varepsilon)$.



Limit Fungsi Kompleks [2]

- Buktikan bahwa:

  a. $\lim\limits_{z \to 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$ b. $\lim\limits_{z \to 2i} (2x + iy^2) = 4i$

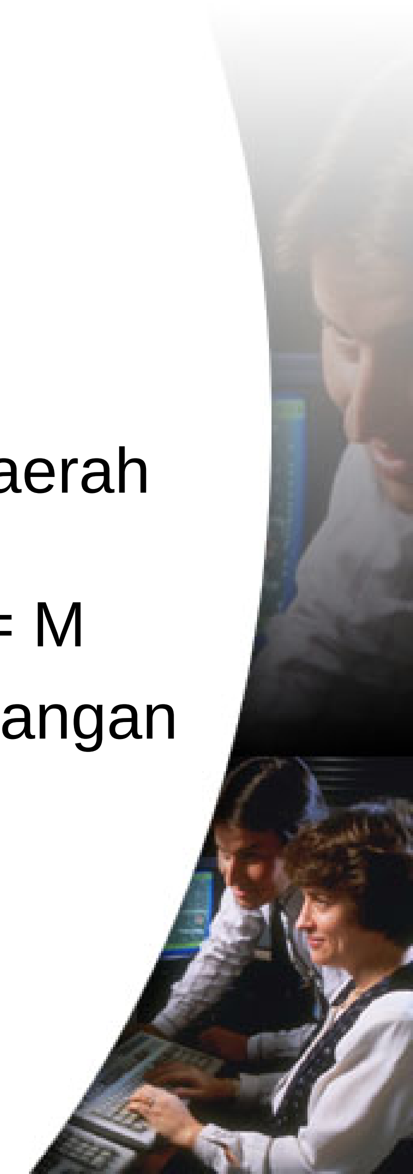
- TEOREMA :

  Diberikan fungsi kompleks f terdefinisi pada daerah $D \subseteq$ **C** dengan $z_o \in D'$ dan $L, M \in$ **C**.

  a. jika $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = L$ dan $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = M$, maka L = M

  b. $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = L$ jika dan hanya jika terdapat bilangan k>0 dan bilangan δ>0 sehingga berlaku

  $$|f(z)| < k \ \ untuk \ \ setiap \ \ z \in N^*(z_o, \delta) \cap D$$



Limit Fungsi Kompleks [3]

- TEOREMA:

Diberikan fungsi kompleks f dan g yang terdefinisi pada daerah $D = D_f \cap D_g \subseteq \mathbf{C}$ dengan $z_o \in D'$. Jika

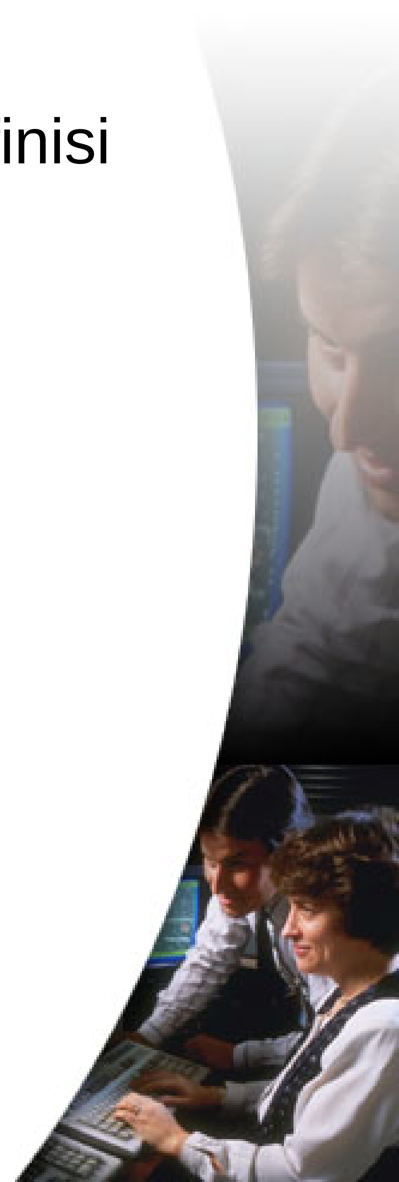
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \ dan \ \lim_{z \to z_0} g(z) = M,$$ maka

a. $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = L + M$

b. $\lim_{z \to z_0} kf(z) = kL, k \in C$

c. $\lim_{z \to z_0} [f(z).g(z)] = LM$

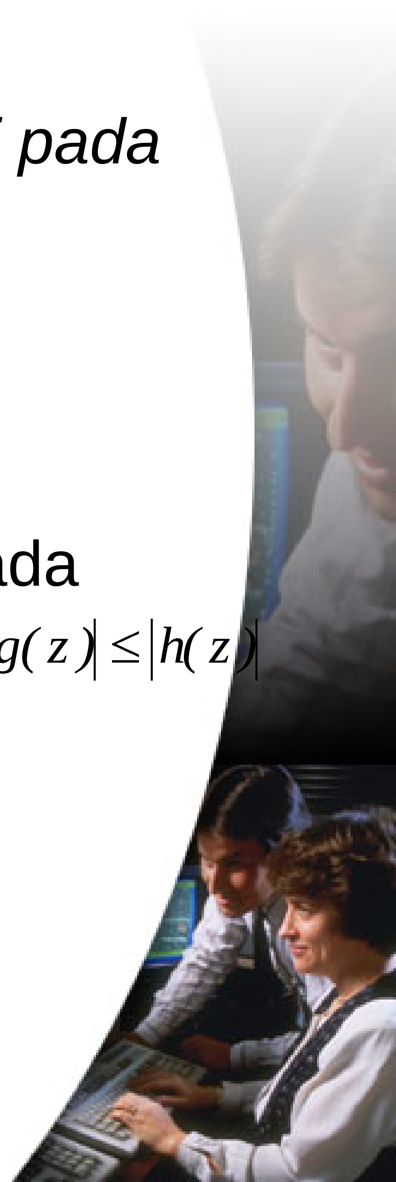
d. $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{L}{M}, \ \mathrm{M} \neq 0$



Limit Fungsi Kompleks [4]

- *TEOREMA :*
  1. *Diberikan fungsi kompleks f yang terdefinisi pada daerah $D \subseteq \mathbf{C}$ dengan $z_o \in D'$.*
     a. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$ *jika dan hanya jika* $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = 0$
     b. *jika* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L, L \neq 0$ *maka* $\lim\limits_{z \to z_o} |f(z)| = |L|$

  2. Diberikan fungsi f, g, dan h didefinisikan pada daerah $D = D_f \cap D_g \subseteq \mathbf{C}$ dan $z_o \in \mathbf{D}'$. Jika $|f(z)| \leq |g(z)| \leq |h(z)|$ untuk setiap $z \in N^*(zo, \delta) \cap D$, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ dan $\lim\limits_{z \to z_0} h(z) = L$, maka $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = L$



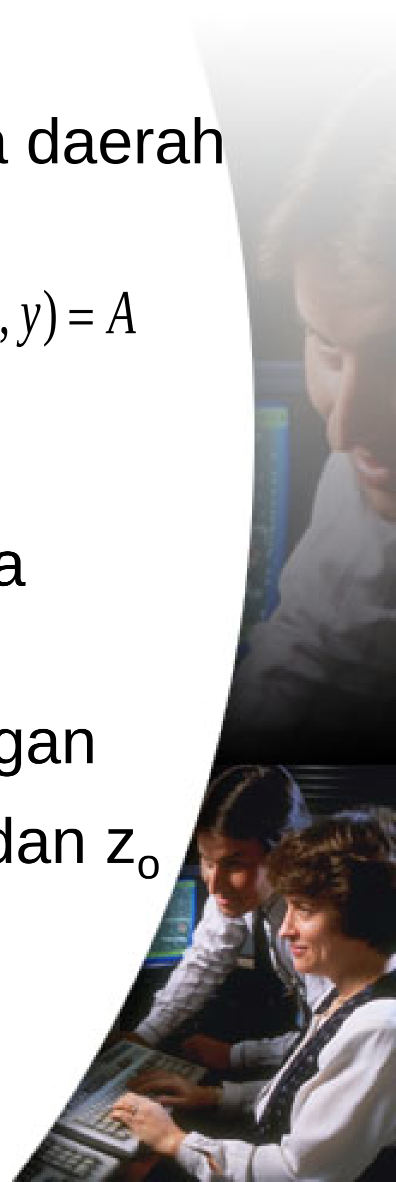
Limit Fungsi Kompleks [5]

- TEOREMA :
  1. Diberikan f(z)=u(x,y)+iv(x,y) terdefinisi pada daerah $D \subseteq \mathbf{C}$ dan zo=a+ib$\in$ D'.

     $\lim_{z \to z_0} f(z) = A + iB$ jika dan hanya jika $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = A$

     dan $\lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y) = B$
  2. Diberikan f(z)=u(x,y)+iv(x,y) terdefinisi pada daerah D $\subseteq$ **C** dan zo=a+ib$\in$ D'.

     Jika $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$, maka $\lim_{z \to z_0} f(z)$ selalu ada dengan nilai L untuk $z \to z_o$ sepanjang kurva S$\subseteq$D dan z_o suatu titik limit S.



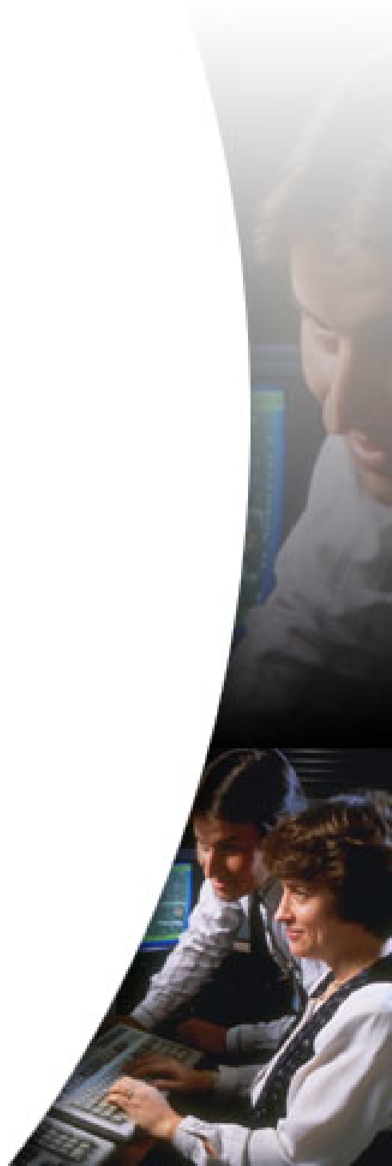
Limit Fungsi Kompleks [6]

- **Diskusikan !**

1. Diketahui $f(z)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}+\dfrac{ix^2}{y+1}$. Selidiki apakah $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ ada.

2. Buktikan bahwa $\lim\limits_{z\leftarrow 0}\left(\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}+\dfrac{xyi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0$

Selidikilah apakah $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{x+y-1}$ ada?



Kekontinuan Fungsi Kompleks [1]

- DEFINISI :

a. Diberikan fungsi kompleks f terdefinisi pada region $D \subseteq C$ yang memuat z_o dengan z_o suatu titik limit dari D. Fungsi f dikatakan kontinu di zo jika $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

b. Diberikan fungsi f terdefinisi pada region $D \subseteq C$ yang memuat z_0 . Fungsi f dikatakan kontinu di z_o jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $|z - z_0| < \delta, z \in D$ berlaku $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

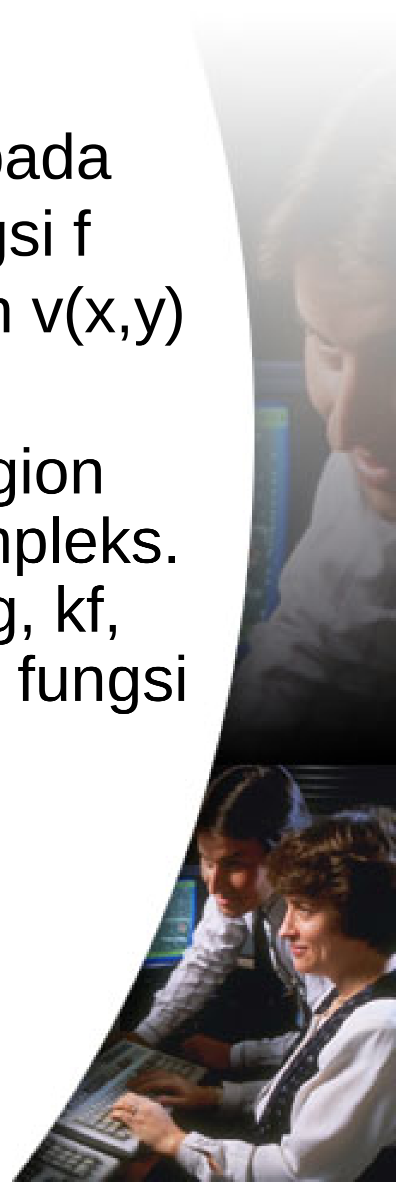
c. Fungsi f dikatakan kontinu pada region $D \subseteq C$ jika f kontinu di setiap titik pada D

Kekontinuan Fungsi Kompleks [2]

- Diskusikan bukti teorema berikut:

  a. Diberikan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ terdefinisi pada region $D \subseteq \mathbf{C}$ yang memuat $z_o = a + ib$. Fungsi f kontinu di z_o jika dan hanya jika $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ kontinu di (a,b).

  b. Diberikan fungsi f dan g terdefinisi pada region $D \subseteq \mathbf{C}$ dan $z_o \in D$ dan k suatu konstanta kompleks. Jika f dan g kontinu di z_o, maka fungsi $f + g$, kf, dan fg semuanya kontinu di z_o. Sedangkan fungsi f/g kontinu di z_o asalkan $g(z_o) \neq 0$.



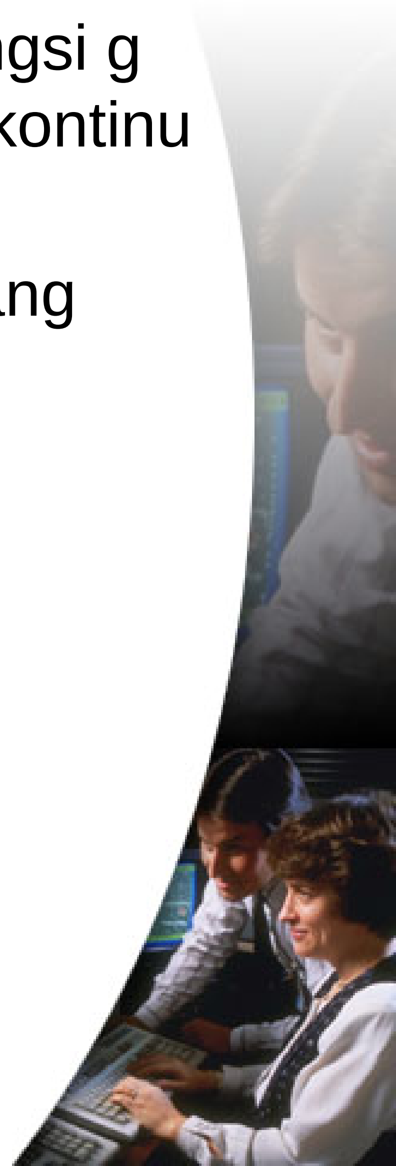
Kekontinuan Fungsi Kompleks [3]

c. Jika fungsi kompleks f kontinu di z_o dan fungsi g kontinu $f(z_o)$, maka fungsi komposisi g o f kontinu di z_o.

d. Fungsi polinom f kontinu pada seluruh bidang kompleks.

e. Fungsi rasional $f(z) = \dfrac{h(z)}{g(z)}$ (h dan g fungsi

polinom) kontinu pada **C** – {z$\in$**C**: g(z) = 0}



Turunan Fungsi Kompleks [1]

- *DEFINISI :*

  a. Diberikan fungsi f terdefinisi pada region $D \subseteq \mathbf{C}$ dan $z_o \in D$. Turunan fungsi f di z_o didefinisikan dengan

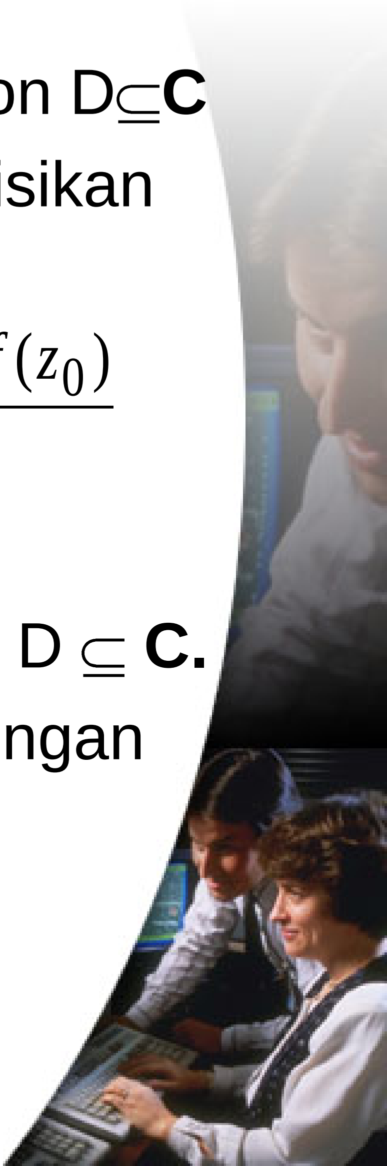
$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

  jika limit ini ada.

  b. Diberikan fungsi f terdefinisi pada region $D \subseteq \mathbf{C}$. Turunan fungsi f pada D didefinisikan dengan

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

  jika limit ini ada.



Turunan Fungsi Kompleks [2]

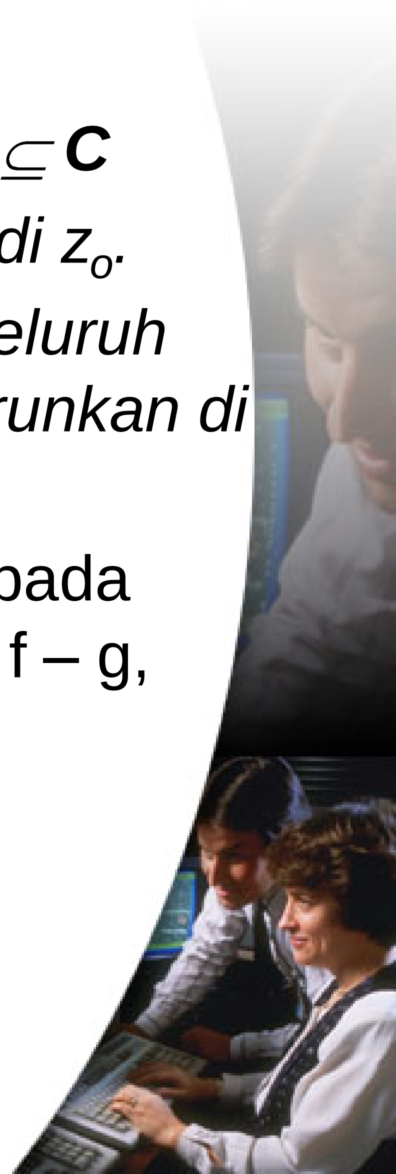
- *Diskusikan bukti teorema berikut:*

  *Diberikan fungsi f terdefinisi pada region $D \subseteq$ **C***

  dan $z_o \in D$. Jika $f'(z_o)$ ada, maka f kontinu di z_o.

- *Perlihatkan bahwa $f(z) = |z|^2$ kontinu di seluruh bidang kompleks, tetapi f hanya dapat diturunkan di $z = 0$.*

- Diberikan fungsi f dan g dapat diturunkan pada region $D \subseteq$ **C**, tuliskan turunan fungsi f + g, f – g, kf (k konstanta) dan fg pada D.



Turunan Fungsi Kompleks [3]

- Buktikan teorema berikut:

  Diberikan fungsi f yang dapat ditunkan pada **C**.

  a. Jika $f(z) = k$ untuk setiap $z \in \mathbf{C}$ dengan k suatu konstanta, maka $f'(z) = 0$

  b. Jika $f(z) = z$ untuk setiap $z \in \mathbf{C}$, maka $f'(z) = 1$

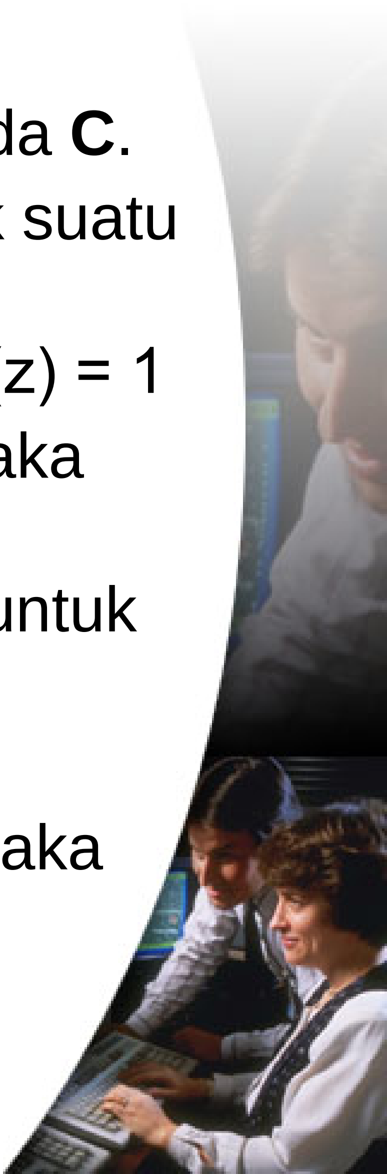
  c. Jika $f(z) = z^n$ untuk setiap $z \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, maka $f'(z) = nz^{n-1}$

  d. Jika $f(z) = a_o z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ untuk setiap $z \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, maka

  $$f'(z) = a_o n z^{n-1} + a_1 (n-1) z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$$

  e. Jika $f(z) = z^n$ untuk setiap $z \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$, maka

  $$f'(z) = nz^{n-1}$$



Persamaan Cauchy Reimann [1]

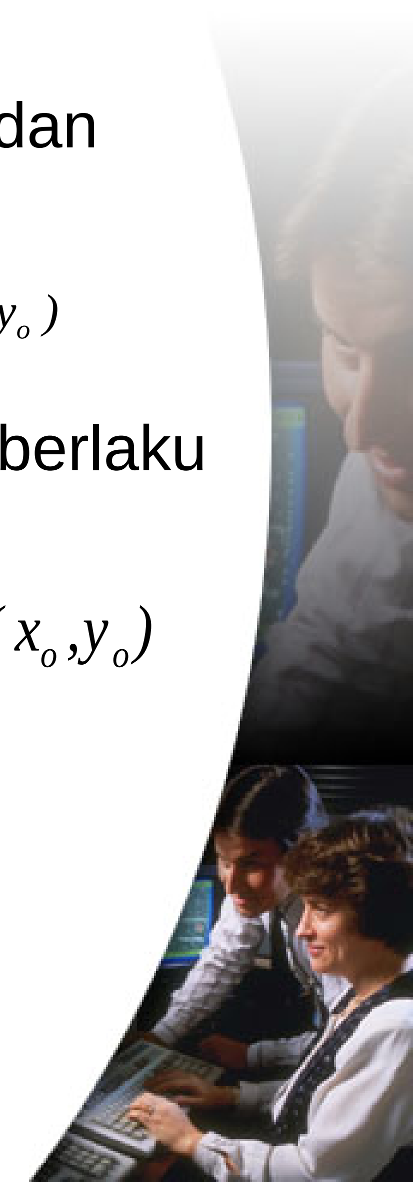
- Buktikan teorema berikut:

  a. Diberikan terdefinisi pada region D$\subseteq$**C** dan $z_o = x_o + iy_o \in D$. Jika $f'(z_o)$ *ada*, maka

$$f'(z_o) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o)$$

  sehingga persamaan Cauchy Reimann berlaku yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o) \;\; dan \;\; \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o)$$



Persamaan Cauchy Reimann [2]

b. Diberikan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ terdefinisi pada region $D \subseteq \mathbf{C}$ dan $zo = x_o + iy_o \in D$. Jika

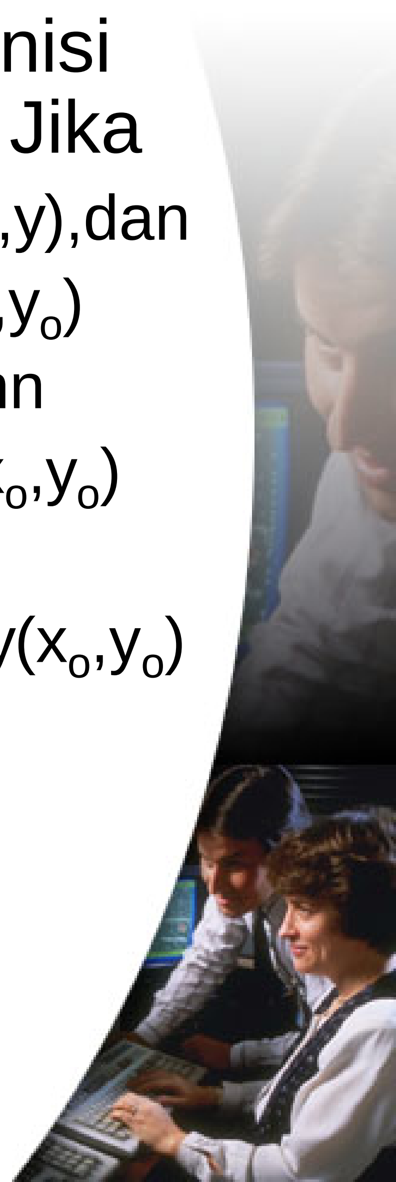
(1) fungsi $u(x,y)$, $v(x,y)$, $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$, $v_x(x,y)$,dan $v_y(x,y)$ semuanya kontinu di titik $z_o = (x_o,y_o)$

(2) Memenuhi persamaan Cauchy Reimann

$$u_x(x_o,y_o) = v_y(x_o,y_o) \text{ dan } u_y(x_o,y_o) = - v_x(x_o,y_o)$$

maka $f'(z_o)$ ada dan

$$f'(z_o) = u_x(x_o,y_o) + i\, v_x(x_o,y_o) = v_y(x_o,y_o) - i\, uy(x_o,y_o)$$



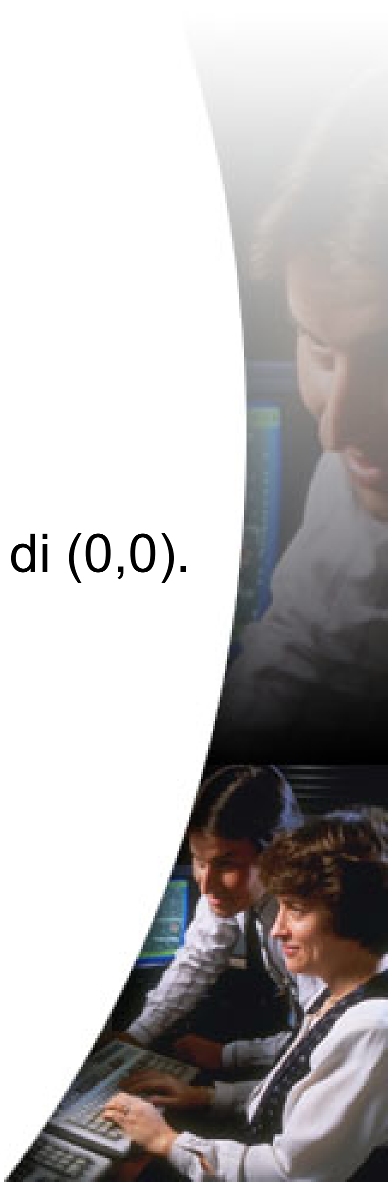
Persamaan Cauchy Reimann [3]

- Diskusikan !

  1. Diberikan fungsi f dengan aturan

$$f(z)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Perlihatkan bahwa f ’(0) ada tetapi tak kontinu di (0,0).

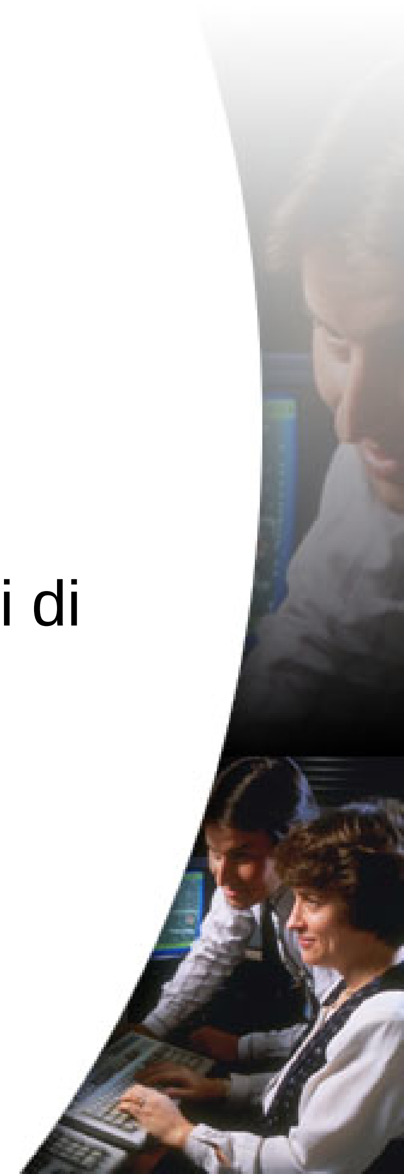


Persamaan Cauchy Reimann [4]

2. Diberikan fungsi f dengan aturan

$$f(z)=\begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa persamaan C–R dipenuhi di $z = 0$, tetapi $f'(0)$ tidak ada.



Persamaan Cauchy Reimann [5]

3. Selidiki dimanakah fungsi berikut dapat diturunkan, kemudian tentukan fungsi turunannya.
   a. $f(z) = x^2 - iy^2$
   b. $f(z) = \bar{z}$
   c. $f(z) = \left|z\right|^2$

Sekian
Terima Kasih