Pertemuan 11
Barisan dan deret takterhingga

Barisan Takterhingga

DEFINISI :

Diberikan himpunan $A \subseteq R$. Barisan takterhingga adalah suatu fungsi $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{A}$ yang didefinisikan dengan $f(n) = a_n$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$

Nilai-nilai fungsi f dengan $f(n) = a_n$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$ dapat dinyatakan dengan $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ...

Fungsi f dengan $f(n) = a_n$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$ adalah suatu barisan yang dapat dinyatakan dengan notasi

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ atau secara singkat $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$

Bilangan-bilangan a_1, a_2, a_3, … disebut *suku-suku barisan* dan suku a_n disebut *suku umum* (suku ke n) barisan Sebagai contoh, fungsi f dengan $f(n) = 3n - 2$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$ adalah suatu barisan yang dinotasikan dengan

$$\{a_n\} = \{1, 4, 3, 10, 13, \ldots\}$$

yang sering pula dinyatakan dengan {3n-2}.

DEFINISI :

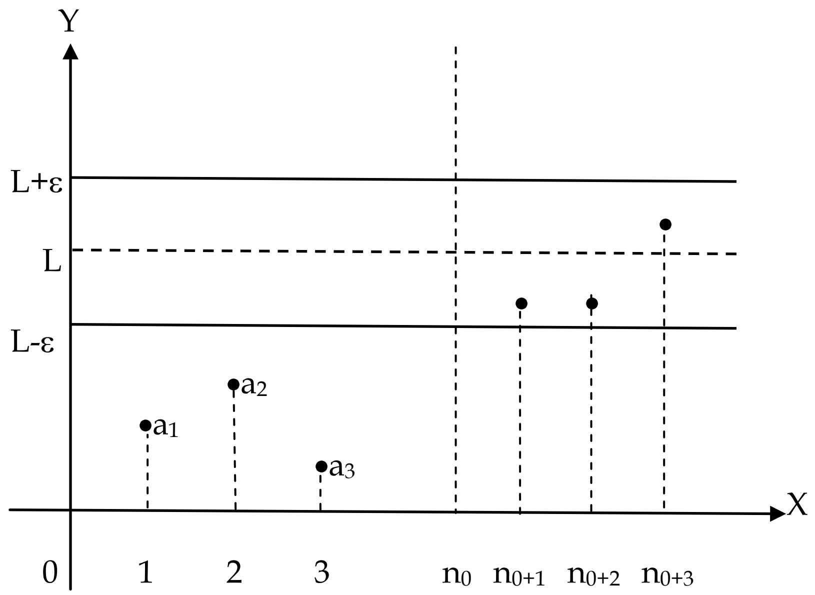
Diberikan barisan $\{a_n\}$. Barisan $\{a_n\}$ dikatakan konvergen ke L ditulis $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga jika $n>n_0$ berlaku $|a_n - L| < \varepsilon$.

Bilangan real L yang memenuhi definisi di atas disebut limit barisan $\{a_n\}$. Notasi barisan $\{a_n\}$ konvergen ke L adalah

$$a_n \to L \text{ atau } \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan *divergen,* jika barisan $\{a_n\}$ tidak konvergen. Dengan kata lain, barisan $\{a_n\}$ divergen (tidak konvergen ke L) jika dan hanya jika untuk setiap $L \in \boldsymbol{R}$ terdapat bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n>n_0$ terdapat bilangan a_n sehingga berlaku $|a_n - L| \geq \varepsilon$
.

Kekonvergenan barisan bilangan kompleks $\{a_n\}$ ke L secara geometri disajikan pada gambar di bawah ini.



Diskusikan!

1. Selidiki kekonvergenan barisan berikut ini:

   a. $\left\{2+\frac{1}{n}\right\}$

   b. $\left\{\frac{2n-1}{n+2}\right\}$

2. Buktikan Teorema Ketunggalan Limit: Jika barisan $\{a_n\}$ konvergen, maka barisan $\{a_n\}$ mempunyai limit tunggal.

3. Jika $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ barisan-barian yang konvergen dan k suatu konstanta, maka

   a. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$

   b. $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

   c. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

   d. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n . \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

   e. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, $bila \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

4. Tentukan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2}{7n^2+1}$

5. Apakah barisan $\left\{\frac{\ln n}{e^n}\right\}$ konvergen, jika demikian berapah limitnya?

6. Buktikan Teorema (Teorema Apit): Jika $\{a_n\}$ dan $\{c_n\}$ barisan yang konvergen ke L dan $a_n \leq b_n \leq c_n$ untuk $n \leq K$ (K bilangan asli yang tetap), maka barisan $\{b_n\}$ konvergen ke L

7. Buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{sin^3 n}{n} = 0$

LATIHAN:

1. Selidiki apakah barisan berikut konvergen atau divergen, jika konvergen tentukan limitnya

   a. $\left\{\frac{n}{2n-1}\right\}$ d. $\left\{e^{-n}\cos n\right\}$

   b. $\left\{\frac{3n+1}{n+2}\right\}$ e. $\left\{\frac{n\sin(n\frac{\pi}{2})}{2n+1}\right\}$

   c. $\left\{\frac{4n^2+1}{n^2-2n+3}\right\}$ f. $\left\{\frac{n+4}{2n^2+1}\right\}$

2. Tentukan rumus untuk a_n, kemudian tentukan apakah barisan itu konvergen atau divergen? Bila konvergen tentukan $\lim_{n\to\infty} a_n$.

   a. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots.$

   b. $1, \frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{1-\frac{2}{3}}, \frac{1}{1-\frac{3}{4}}, \ldots.$

   c. $\sin 1,\ 2sin\frac{1}{2},\ 3sin\frac{1}{3},\ 4sin\frac{1}{4}, \ldots.$

   d. $\frac{1}{2-\frac{1}{2}}, \frac{2}{3-\frac{1}{3}}, \frac{3}{4-\frac{1}{4}}, \ldots.$

3. Tentukan $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(sin\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

   Petunjuk: Tulislah sebuah integral yang setara

4. Buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}$

Deret Takterhingga

Diberikan barisan bilangan real $\{a_n\}$. Kemudian dari barisan $\{a_n\}$ dibentuk barisan lain $\{S_n\}$ yang suku-sukuya didefinisikan dengan

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dan seterusnya.

Jika barisan $\{S_n\}$ mempunyai limit, diperoleh jumlah tak berhingga

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Jadi dalam simbol dituliskan dengan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut *deret tak berhingga* (atau deret bilangan real). Bilangan-bilangan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dinamakan *suku-suku deret,* dan a_n dinamakan *suku ke-n* (suku umum). Barisan $\{S_n\}$ dengan $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ dinamakan *jumlah parsialan (bagian) ke)* dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

DEFINISI :

(1) *Deret* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dikatakan konvergen ke S*

jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

(2) *Deret* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dikatakan divergen*

jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} S_n$ *tidak ada.*

Diskusikan!

Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergen ke 1.