Pertemuan 14
Deret Talor dan Maclaurin

Teorema A :

(Teorema Ketungalan.) Jika f memenuhi uraian

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots.$$

maka $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Teorema B:

(Teorema Taylor). Misalkan f sebuah fungsi yang memiliki turunan dari semua tingkatan dalam suatu selang (a-r,a+r). Syarat perlu dan cukup agar deret Taylor

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots.$$

menggambarkan fungsi f pada selang itu adalah $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ dengan $R_n(x)$ suku sisa dalam Rumus Taylor, yaitu

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ dengan suatu blangan dalam (a-r,a+r).

Perhatikan bahwa apabila a=0, kita peroleh deret Maclaurin

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \cdots.$$

Disksusikan!

1. Tentukan deret Taylor dari $f(x) = \frac{1}{1+x}$ disekitar x =1
2. Buktikan teoreme beikut:

$$(a)\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots, \quad |x| < \infty$$

$$(b)\quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots., \quad |x| < \infty$$

$$(c)\quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots., \quad |x| < \infty$$

$$(d)\quad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots., \quad |x| < \infty$$

$$(e)\quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots., \quad |x| < \infty$$

$$(f)\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots., \quad |x| < 1$$

$$(g)\quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots., \quad |x| < 1$$

3. Uraikan $f(x) = \dfrac{1-x}{1+2x}$ disekitar x=*1.*
4. Hitunglah $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^n$.

LATIHAN

1. Uraikan fungsi berikut atau deret Taylor disekitar x yang diberikan
   a. $f(x) = e^x$ disekitar x = *1*
   b. $f(x) = (x-1)^2 e^x$ disekitar x = *1*
   c. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x - \pi}$ disekitar x = π
   d. $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)(x+3)}$ disekitar x = *0*
   e. $f(x) = e^{x^2+2z}$ disekitar x= *1*
   f. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^3)^2}$ disekitar x = *0*
2. Tentukan jumlah deret berikut.
   a. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$
   b. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+3}}{n!}$
   c. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$
   d. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!} x^{2n-1}$
   e. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n$
   f. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+2)}{(n+1)!} x^{2n+1}$

4. Ekspansikan ke dalam deret Maclaurin dari fungsi

$$f(x) = \frac{x}{x^4+9} = \frac{x}{9}\left[\frac{1}{1+\frac{x^4}{9}}\right]$$

5. Buktikan bahwa $x\,Cosh(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(2n)!}$

6. Jika x ≠ 0, tunjukkan bahwa

   a. $\frac{Sin(x^2)}{x^4} = \frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \ldots$

   b. $\frac{Sinh\,x}{x^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+3)!}$

7. Jika 0 < $|x|$ < 4, perlihatkan bahwa

$$\frac{1}{4x-x^2} = \frac{1}{4x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n+2}}$$

8. Turunkan deret Taylor dalam pangkat (x + 2) untuk $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$,

selanjutnya

tentukan domain di mana ekspansi ini berlaku.

9. Buktikan $Cos\,x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}$ untuk $|x| < \infty$

10. Turunkan deret Maclaurin untuk cabang utama fungsi *ln*(x+1) dalam persekitaran $|x+1| < 1$.