

## Pertemuan 10

### Integral Tak Wajar dan Sifat-sifatnya

#### A. Integral Tak Wajar

Bentuk  $\int_a^b f(x)dx$  disebut integral tak wajar jika dan hanya jika

- (i) Batas integrasinya tak berhingga ( $a = -\infty$  atau  $b = +\infty$ ) atau
- (ii) Terdapat  $c \in [a, b]$  sehingga fungsi  $f$  tak terbatas pada  $c$

$$\left( \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty \right)$$

Definisi 1:

- (1) Jika  $f$  kontinu pada selang  $[a, +\infty)$ , maka

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

- (2) Jika  $f$  kontinu pada selang  $(-\infty, b]$ , maka

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

- (3) Jika  $f$  kontinu pada selang  $(-\infty, +\infty)$  dan  $c \in (-\infty, +\infty)$ , maka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx$$

- (4) Jika  $f$  kontinu pada selang  $[a, b)$  dan  $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = +\infty$ , maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$$

- (5) Jika  $f$  kontinu pada selang  $(a, b]$  dan  $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = +\infty$ , maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$$

- (6) Jika  $f$  kontinu pada selang  $[a, c) \cup (c, b]$  dan  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$ , maka

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x)dx$$

Definisi 2:

(1) Jika integral tak wajar  $\int_a^b f(x)dx$  mempunyai limit yang terhingga, maka integral itu konvergen. Jika limitnya tidak ada atau tak berhingga, maka integral itu divergen.

(2) Apabila  $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$  dan  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  konvergen, maka dikatakan  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  konvergen dengan nilai  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$ . Dalam hal lain  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  dikatakan divergen.

Diskusikan!

1. Apakah integral berikut termasuk integral tak wajar? Kemudian simpulkan apakah integral tersebut konvergen atau divergen?

a.  $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$       b.  $\int_0^3 \frac{1}{x-2} dx$       c.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Definisi 3:

Misalkan  $f$  kontinu pada  $[a, +\infty)$ . Luas daerah  $A$  antara kurva  $y=f(x)$  dan sumbu  $x$ , di kanan  $x=a$  adalah  $A = \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ , jika integral tak wajar ini konvergen.

Diskusikan!

Periksa bahwa luas daerah di bawah kurva  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  dan di atas sumbu  $x$  sama dengan  $\pi$

**Latihan :**

1. Selidiki apakah integral di bawah ini termasuk integral tak wajar? Mengapa? Hitunglah integral tersebut, kemudian simpulkan apakah integral itu konvergen atau divergen?

a.  $\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2} dx$       b.  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$       c.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$       d.  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}$

2. Selesaikanlah persoalan di bawah ini:

a. Tentukan luas daerah di kanan  $x=3$  di antara kurva  $y = \frac{8}{4x^2 - 1}$  dan sumbu  $x$ .

a. Tentukan luas daerah di uadran pertama di bawa kurva  $y=e^{-x}$ .

b. Misalkan  $D$  suatu daerah yang dibatasi kurva  $y = \frac{1}{x-1}$ ,  $x=2$ ,  $x=0$  dan sumbu  $x$ . Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika  $D$  diputar pada sumbu  $x$ .