

Pertemuan 9
Bentuk Tak Tentu Jenis $0/0$ dan ∞/∞ , Teorema L'hopital, dan
Bentuk Tak Tentu Jenis Lainnya.

BENTUK TAK TENTU

A. Bentuk Tak Tentu Jenis $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\infty}{\infty}$

Diskusikan!

1. Buktikan Teorema 1: Misalkan f dan g fungsi yang dapat diturunkan pada selang I yang memuat a dan $g'(x) \neq 0$ untuk setiap $x \neq a$ dalam

I. Jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, maka $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2. Buktikan Teorema 2: Misalkan f dan g fungsi yang dapat diturunkan pada selang I yang memuat a dan $g'(x) \neq 0$ untuk setiap $x \neq a$ dalam

I. Jika $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, maka $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Catatan:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L; x \rightarrow a^-, x \rightarrow a^+, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty; L$: Berhingga, $+\infty$, atau $-\infty$

3. Hitunglah

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2e^x + 3}$

Latihan:

Hitunglah limit berikut:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{4 \sin x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^{\sqrt{x}} - 1}{3^{\sqrt{x}} - 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - 1}{x^2}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \int \sqrt{1+e^{-x}} dt}$

B. Bentuk Tak Tentu Lainnya

Limit fungsi berbentuk $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 dan 1^∞ dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat fungsi logaritma atau eksponen dan teorema L'Hopital.

Diskusikan!

1. Hitung

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{x}{\ln x} \right]$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \csc x$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

2. Selidiki apakah

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\tan x} = 1$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

3. Buktikan Teorema berikut: Misalkan u dan v fungsi dengan variable x yang terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat a kecuali mungkin di a sendiri. Jika $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} |v(x)| = \infty$ dan $\lim_{x \rightarrow a} u(x)v(x)$ ada dan takberhingga, maka

$$\lim_{x \rightarrow a} (1 + u(x))^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} u(x)v(x)}.$$

4. Gunakan teorema di atas untuk menghitung $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x^{\frac{1}{x^2}}$

Latihan :

Hitunglah limit berikut ini

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + e^{x/2} \right)^{2/x}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln(x+1) - \ln(x-1) \right)^{-1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x^{\frac{1}{\ln x}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \ln x^2 \right)^{-1}$