

Pertemuan 3
Luas Daerah Bidang Datar, dan Volume Benda Padat dengan Metode
Bidang Irisan Sejajar

A. Luas Daerah Bidang Datar

**1. Luas Daerah Bidang Datar Yang Dibatasi Oleh Kurva $y = f(x)$,
sumbu X, Garis $x = a$ dan Garis $x = b$**

DEFINISI:

Misalkan D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh kurva $y=f(x)$ yang kontinu pada $[a,b]$ dengan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, sumbu X, garis $x=a$, dan garis $x=b$. Luas daerah D adalah

$$L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Diskusikan!

1. Tuliskan definisi Luas daerah D, jika D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ yang kontinu pada $[a,b]$ dengan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, sumbu X, $x = a$, dan garis $x = b$.
2. Tuliskan Luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi yang kontinu pada selang tertutup $[a,b]$, sumbu X, $x = a$, dan garis $x = b$.
3. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3 - 3x - x^2 + 3$ sumbu X, $x = 0$, dan garis $x = 2$

**2. Luas Daerah Bidang Datar Yang Dibatasi Oleh Kurva $x = f(y)$,
Sumbu Y, Garis $y = a$, dan Garis $y = b$**

Diskusikan!

1. Tuliskan definisi luas daerah yang dibatasi kurva $x = f(y)$ yang kontinu pada selang tertutup $[a,b]$, sumbu Y, garis $y = a$, dan garis $y = b$
3. Carilah luas daerah yang dibatasi kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu y, garis $y = 1$, dan garis $y = 2$.

3. Luas Daerah Bidang Datar Antara dua Kurva

Diskusikan!

1. Tuliskan definisi luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) \geq g(x) \geq 0$ pada selang $[a,b]$, garis $x = a$, dan garis $x = b$.
2. Tuliskan definisi luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) \geq g(x) \geq 0$ pada selang $[a,b]$, garis $x = a$, dan garis $x = b$
3. Tuliskan definisi luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) < g(x) < 0$ pada selang $[a,b]$, garis $x = a$, dan garis $x = b$.
4. Misalkan fungsi f dan g kontinu pada $[a,b]$ dan $f(x) \geq g(x)$ pada $[a,b]$. Tuliskan definisi luas daerah L yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = f(x)$, $y = g(x)$, garis $x = a$, dan garis
5. Carilah luas daerah yang batasi kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$

Latihan 1:

A. Carilah luas daerah antara

1. $y = 4x - x^2$, sumbu X, $x = 1$ dan $x = 3$
2. $y = \sqrt{x-4}$, sumbu X dan $x = 3$

3. $y = x^2 - 2$ dan $y = 2x^2 + x - 4$

4. $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 6$, dan $y = 1$

B. Hitunglah:

1. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = e^{-x}$ dan garis yang

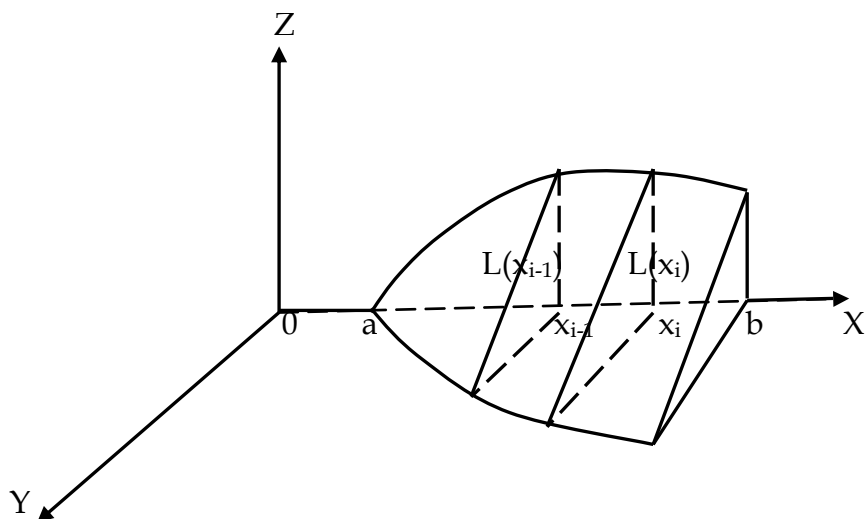
melalui titik $(0, 1)$ dan $(1, \frac{1}{e})$

2. Luas daerah yang dibatasi oleh $y = 0$, $x = 9$, dan $y = 3x^{-\frac{1}{3}}$

3. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \ln x$, sumbu X, dan garis $x = e$

B. Menghitung Volume Benda Padat dengan Metode Bidang Irisan Sejajar

Misalkan sebuah benda padat terletak diantara dua bidang yang tegak lurus terhadap sumbu X pada selang tertutup $[a, b]$. Situasi tersebut diperlihatkan pada gambar berikut.



- Buatlah partisi P pada selang tertutup $[a, b]$, yaitu dengan cara membagi selang $[a, b]$ menjadi n bagian sehingga diperoleh partisi

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

- Selang bagian ke-i dari partisi P adalah $[x_{i-1}, x_i]$; panjang partisi P adalah $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$.

- Pilihlah $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Pada selang bagian ke-i, irisan antara benda padat dengan bidang yang tegak lurus sumbu x berbentuk prisma yang tingginya Δx_i dan luas penampang $L(c_i)$. Karena itu volume benda padat bagian ke-i adalah

$$\Delta v_i = \text{Luas alas} \times \text{tinggi} = L(c_i) \Delta x_i$$

- Volume benda padat tersebut dihamperi oleh volume n buah prisma bagian ke-i. Jadi, volume benda padat tersebut adalah

$$V \approx \sum_{i=1}^n \Delta v_i = \sum_{i=1}^n L(c_i) \Delta x_i$$

- Nilai eksak volume benda padat tersebut tercapai bila $\|P\| \rightarrow 0$. Karena itu volume adalah

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta v_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n L(c_i) \Delta x_i = \int_a^b L(x) dx$$

Diskusikan!

1. Misalkan suatu benda padat terletak diantara dua bidang yang tegak lurus sumbu X dari $x = a$ ke $x = b$. Jika luas penampang irisan antara bidang yang tegak lurus sumbu X dengan benda padat itu adalah dengan L kontinu pada $[a,b]$, tuliskan definisi volume benda padat tersebut
2. Diketahui suatu benda yang alas bidangnya xoy kuadran I yang dibatasi oleh sumbu X, sumbu Y dan kurva $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$. Jika irisan bidang tegak lurus sumbu X merupakan bujur sangkar. Berapa volume benda itu?

Latihan 2:

1. Suatu benda alasnya d bidang XOY, dibatasi oleh sumbu X, $y = \sin x$, $x=0$, dan $x = \frac{1}{2}\pi$. Jika irisan benda denagn bidang tegak lurus sumbu X merupakan segitiga sama sisi. Berapa volume benda itu?
2. Alas suatu benda padat adalah lingkaran yang berjari-jari $r > 0$. jika irisan sejajar antara bidang yang tegak lurus pada garis tengah yang tetap berbentuk segitiga sama sisi. Hitung volume benda padat itu.
3. Alas suatu benda padat adalah suatu daerah D yang dibatasi daerah D yang dibatasi oleh parabola $x = y^2$ dan $x = 3 - 2y^2$. Jika irisan sejajar antara bidang tegak lurus sumbu y dengan benda padat itu berbentuk bujur sangkar yang rusuknya terletak pada daerah D. Hitung volume benda itu.
4. Alas suatu benda padat adalah suatu daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = \sin x$ dan $x=0$ sampai dengan $x = \pi$. Jika irisan sejajar antara bidang yang tegak lurus sumbu X dengan benda padat itu berbentuk bujursangkar yang rusuknya terletak pada daerah D. Hitung volume benda padat itu.