Pertemuan 7
Pusat Massa suatu Keping, Sentroid, dan Teorema Pappus

A. Pusat Massa Suatu Batang

Diskusikan!

1. Misalkan massa $m_1, m_2, ..., m_n$ terletak pada batang padat masing-masing di titik $x_1, x_2, ..., x_n$, dimana x_i = jarak berarah antara massa m_i ke suatu titik tetap 0 pada batang $i = 1,2,3,\ldots,n$. Massa n partikel, Momen n partikel terhadap titik 0, dan pusat massa n partikel masing-masing didefinisikan sebagai

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n$$

$$M = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + ... + m_nx_n \text{ dan}$$

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n}$$

m_3 m_2 m_1 m_4 m_n Batang Padat

x_3 x_2 0 x_1 x_2 x_n

Keterangan: Berat $= m.g$ Newton (kg meter/det^2), Massa = kg

2. Pada suatu garis terdapat massa $m_1 = 4$, $m_2 = 6$ dan $m_3 = 9$ yang terletak pada titik-titik $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ dan $x_3 = 1$. Tentukan pusat massanya.

Dari definisi di atas dapat dirumuskan bahwa apabila kita mempunyai suatu batang padat mendatar dengan massa yang tersebar secara kontinu, maka rapat massa dari batang di setiap titik pada batang tergantung dari letak titik tersebut. Dengan demikian, rapat massa suatu benda adalah

$$Rapat\ massa = \frac{massa}{panjang}$$

Diskusikan!

1. Misalkan kita mempunyai suatu batang yang padat dan ditempatkan mendatar diantara $x = a$ dan $x = b$, rapat massa di setiap titik $x \in [a,b]$ pada batang adalah $\rho(x)$, dimana ρ kontinu pada [a,b]. Kontruksilah massa total batang, momen massa batang terhadap titik O, dan pusat massa suatu batang.
2. Suatu batang padat ditempatkan diantara $x = a$ dan $x = b$. Jika rapat massa batang di titik x, $a \le x \le b$ adalah $\rho(x)$ ρ kontinu pada [a,b], tuliskan definisi massa total dari batang, momen massa batang terhadap titik 0, dan pusat massa batang.
3. Diketahui kerapatan massa suatu batang di setiap titik yang jaraknya x satuan dari ujung kiri batang adalah $4x + x^2$ gram/ sentimeter. Hitunglah massa total, momen massa dan titik pusat massa dari batang tersebut antara $x = 0$ dan $x = 3$

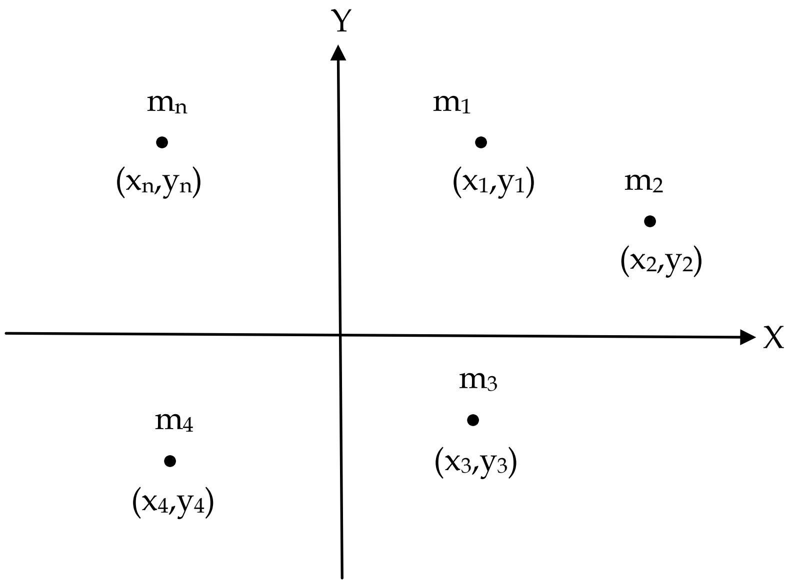
Latihan:

1. Diketahui kerapatan massa suatu batang di setiap yang jaraknya x satuan dari salah satu ujungnya adalah $(x^2 + 2x)$ gram/sentimeter. Hitunglah massa total dan titik pusat massa batang tersebut antara $x = 0$ dan $x = 2$.
2. Budi dan Ani beratnya masing-masing 150 dan 120 pon duduk pada ujung-ujung papan yang panjangnya 12 kaki dan disangga di tengah-tengah. Dimanakah Dudi dengan berat 80 pon harus duduk agar papan dalam keadaan seimbang.

3. Diketahui suatu batang panjangnya g satuan dan dengan kerapatan $\rho(x) = \sqrt{x}$ pada sebuah titik yang jaraknya x satuan dari salah satu ujungnya. Tentukan jarak dari ujung ini ke pusat massa batang tersebut.
4. Sama dengan soal no.4, bilamana $\rho(x) = 1 + x^2$.
5.

B. Pusat Massa Suatu Keping

Misalkan pada ruang berdimensi dua mempunyai n buah partikel (benda) dengan massa $m = m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n$ yang masing-masing terletak pada titik $(x_1, y_1), (x_2 y_2), ..., (x_n, y_n)$, seperti tampak pada gambar berikut.



DEFINISI :

Momen massa dari suatu partikel bermassa m yang berjarak ℓ satuan terhadap sumbu S didefinisikan sebagai $M_S = m.\ell$

Dengan menggunakan definisi di atas, massa n partikel, momen massa n partikel terhadap sumbu X dan sumbu Y, dan pusat massa n partikel berturut-turut adalah

(a) Massa n partikel (benda) adalah $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

(b) $M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$, y_i jarak berarah antara m_i ke sumbu X

(c) $M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$, x_i jarak berarah antara m_i ke sumbu Y

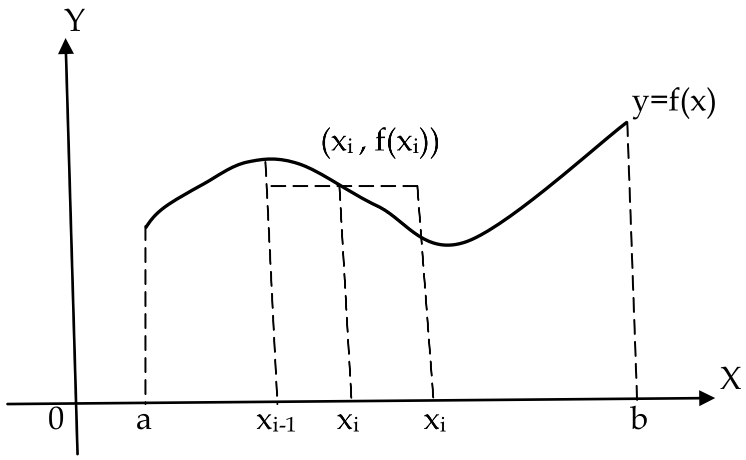
(d) Pusat massa n partikel adalah suatu titik dimana sistem tersebut dalam keadaan seimbang, yaitu titik $(\bar{x}, \bar{y})$ dengan

$\bar{x} = \frac{M_y}{m}$ dan $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$

Diskusikan!

1. Diketahui 5 buah partikel dengan massa sebenarnya 1, 4, 2, 3 dan 2 satuan massa yang masing-masing ada di titik $(6,-1), (2,3), (-4,2), (-7,4)$ dan tiitk $(2,-2)$. Tentukan pusat massanya.

2. Pusat massa n partikel di atas dapat diperluas untuk suatu keping homogen (lamina atau keping tipis yang rata) dengan rapat massa konstan sebesar k satuan rapat massa. Misalkan kita mempunyai suatu keping datar (lamina) berbentuk daerah yang dibatasi oleh kurva f kontinu pada [a,b], $f(x) \geq 0$ pada [a,b], garis $x = a$, garis $x = b$ dan sumbu X, dengan rapat massa. Keping tersebut diperlihatkan pada gambar berikut.



Kontruksilah massa, momen massa dan titik pusat massa suatu keping.

Catatan:

1. Dengan cara yang sama seperti di atas, kita dapat mendefinisikan yang serupa untuk suatu keping datar D yang dibatasi oleh grafik fungsi f dan g yang kontinu pada selang [a,b] dengan $f(x) > g(x)$, garis $x = a$, dan garis $x = b$, yaitu :

   (i) $m = k\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

   (ii) $Mx = \frac{1}{2}k\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$

   (iii) $My = k\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$

   (iv) Pusat massa keping $(\bar{x}, \bar{y})$ dimana

   $\bar{x} = \frac{My}{m}$ dan $\bar{y} = \frac{Mx}{m}$

2. Definisi yang serupa berlaku pula untuk kasus f atau g fungsi dari peubah y yang terdefinisi pada suatu selang tertutup di sumbu Y.

3. Masalah fisis pada definisi tersebut dapat pandang sebagai masalah geometri, dimana massa benda menyatakan luas daerah dengan mengambil $k = 1$, $\bar{x}$ menyatakan rata-rata absis dan $\bar{y}$ menyatakan

rata-rata ordinat dari daerah D. Pada kasus ini pusat massanya dinamakan sentroid, dimana

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Latihan:

1. Misalkan D suatu keping datar berbentuk daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi f(x)=√x, sumbu X dan $x=1$. Jika rapat massa keping tersebut konstan sebesar satuan rapat massa, tentukanlah
   a. Massa keping D
   b. Momen massa keping D terhadap sumbu X
   c. Momen massa keping D terhadap sumbu Y
   d. Pusat massa keping D
2. Misalkan D suatu keping datar berbentuk daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x^2$ dan $y = x + 2$. Jika rapat massa keping tersebut konstan sebesar satuan rapat massa, carilah:
   a. Massa keping D
   b. Momen massa keping D terhadap sumbu X
   c. Momen massa keping D terhadap sumbu Y
   d. Pusat massa keping D
3. Tentukan sentroid daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$

Diskusikan!

1. Buktikan Teorema Pappus berikut ini. Jika suatu daerah R yang terletak pada sebuah bidang datar diputar mengeilingi sebuah garis pada bidang tersebut yang tidak memotong daerah R, maka volume benda putar yang dibentuk oleh R sama dengan luas daerah R dikalikan dengan keliling yang ditempuh ole sentroid tersebut.
2. Buktikan kebenaran terema pappus untuk daerah di bawah kurva y=sinx, $0 \leq x \leq \pi$ dan di atas sumbu X, apabila aerah ini diputar pengelilingi sumbu x.

Latihan :

1. Diketahui suatu keping datar berbentuk daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 4x - x^2$, garis $x = 1$ dan sumbu X. Jika rapat massa dari keping itu tetap sebesar k satuan rapat massa; tentukan massa, momen massa terhadap sumbu-sumbu koordinat dan pusat massanya.
2. Tentukan sentroid daerah D yang dibatasi oleh
   a. Kurva $y = 4x - x^2$ dan garis $x + y = 2$
   b. Kurva $x = 4y - y^2$ dan garis $x = y$
   c. Kurva $y = 4x - x^2$, garis $y = 4$ dan sumbu Y
   d. Kurva $x = y^2$ dan garis $x = 4$
   e. Kurva $x = y^2 - 3y - 4$ dan garis $x = -y - 1$
   f. Kurva $y = 2x - 4$ dan garis $x = 0$