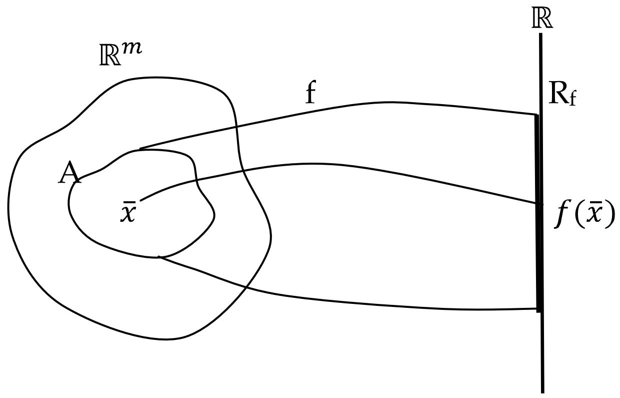
Pertemuan 16
Fungsi Skalar dan Operasinya

A. Fungsi Skalar

DEFINISI 1:

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Fungsi skalar $f: A \to \mathbb{R}$ adalah suatu aturan yang memasangkan setiap unsur $\bar{x} \in A$ dengan tepat satu unsur $u \in \mathbb{R}$. Aturan fungsi di tulis $u = f(\bar{x}), \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m$
Daerah definisi funsi f adalah D_f =A
Daerah nilai fungsi f adalah $R_f = \{f(\bar{x}) \in \mathbb{R} | \bar{x} \in A\}$



Lambang $u = f(\bar{x})$ menyatakan aturan fungsi yang seringkali diberikan telebih dahulu. Setelah daerah definisi fngsi scalar didefinisikan, barulah pemetaan yang sesuai definisi di atas dibentuk, Pada situasi ini

$$D_f = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m | f(\bar{x}) \in \mathbb{R}\}$$
$$R_f = \{f(\bar{x}) \in \mathbb{R} | \bar{x} \in D_f\}$$

Untuk m=2, fungsi skalar f disebut fungsi fungsi dua peubah real. Untuk m=3, fungsi skalar f disebut fungsi fungsi tiga peubah real. Secara umum fungsi skalar disebut fungsipeubah banyak.

Diskusikan!

Tentukan daerah definisi fungsi berikut:

a. $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{4-x^2-y^2} cos^{-1}(y-x^2)}$.
   Kemudian gambaran darah definisinya

b. $f(x,y,z) = \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$

Berbagai cara menentukan daerah definisi fungsi skalar:

1. Jika $u = f(\bar{x}),\ \bar{x}\ \in \mathbb{R}^m,$ maka $D_f = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m | f(\bar{x}) \in \mathbb{R}\}$ dan $R_f = \{f(\bar{x}) \in \mathbb{R} | \bar{x} \in D_f\}$
2. $u = \frac{h(\bar{x})}{g(\bar{x})};\ D_f = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m | g(\bar{x}) \neq 0\}$
3. $u = \sqrt[n]{g(\bar{x})}$, n genap positif, $D_f = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m | g(\bar{x}) \geq 0\}$
4. $u = \ln g(\bar{x})$, $D_f = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m | g(\bar{x}) > 0\}$
5. $u = arc\ sin\ g(\bar{x})$ atau $u = arc\ cos\ g(\bar{x})$;
   $D_f = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m | -1 \leq g(\bar{x}) \leq 1\}$
6. $u = cot\ g(\bar{x})$ atau $u = csc\ g(\bar{x})$; $D_f = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m | g(\bar{x}) \neq 0\}$

B. Operasi pada Fungsi Skalar

DEFINISI 2:

Misalkan $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^m$. Funsi $f: D_1 \to \mathbb{R}$, $u = f(\bar{x})$ dan $g: D_2 \to \mathbb{R}$, $v = g(\bar{x})$ adalah fungsi skalar. Operas aljabar dari f dan g pada himpunan $D = D_1 \cap D_2$ didefinisikan sebagai berikut

Penjumlahan	: $(f + g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) + g(\bar{x})$
Pengurangan	: $(f - g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) - g(\bar{x})$
Perkalian	: $(f.g)(\bar{x}) = f(\bar{x}).g(\bar{x})$
Perkalian dengan skalar	: $(cf)(\bar{x}) = cf(\bar{x})$, c konstanata
Pembagian	: $\left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})},\ g(\bar{x}) \neq 0$

Diskusikan!

Diketahui fungsi skalar $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ dan g(x)=ln(2x-y).

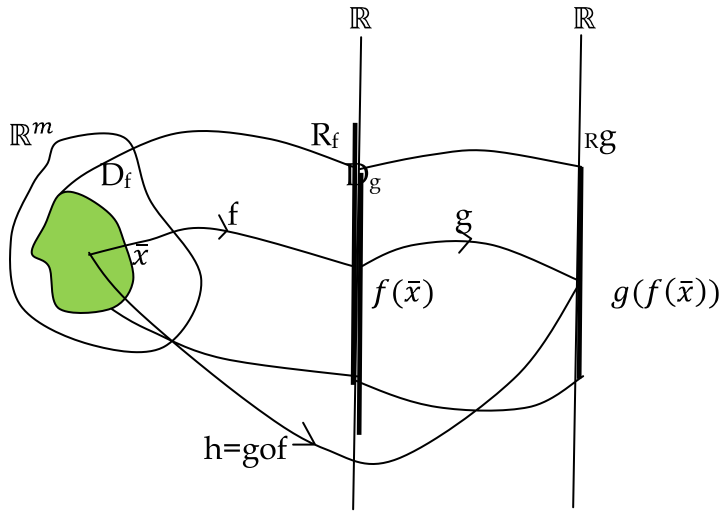
Tentukan:

a. D_f dan D_g, kemudian gambarkan $D = D_f \cap D_g$
b. Aturan fugsi f+g, f-g, fg, f/g, dan g/f beserta daerah definisinya.

DEFINISI 3:

Misalkan $f: D_f \to R_f, R_f \subseteq \mathbb{R}$ dan $g: D_g \to R_g, D_g \subseteq \mathbb{R},\ R_g \subseteq \mathbb{R}$. Jika $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka terdapat fungsi $h: E \to R_g, E \subseteq D_f \subseteq R^m$ sehingga

$h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$. Fungsi h dinamakan komposisi dari f dan g ditulis h=gof dan persamaaan fungsi h adalah $h(\bar{x}) = (gof)(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$



$$D_{gof} = f^{-1}(R_f \cap D_g) = \{\bar{x} \in D_f | f(\bar{x}) \in R_f \cap D_g\}$$
$$R_{gof} = g(R_f \cap D_g) = \{g(t) \in R_g | t \in R_f \cap D_g\}$$

DEFINISI 4:

Misalkan $f: D_f \to \mathbb{R}, D_f \in \mathbb{R}^m$ suatu fungsi skalar dengan $R_f \subseteq D_g \subseteq \mathbb{R}$ dan $g: D_g \to \mathbb{R}$ suatu fungsi real. Komposisi dari f dan g ditulis $g \circ f$ didefinisikan sebagai fungsi $(g \circ f): D_f \to \mathbb{R}, (g \circ f)(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$

Diskusikan!

1. Gambarkan secara geometri definisi 4 di atas.
2. Diketahui $f(x, y) = x^2 - y^2, g(t) = tan^{-1}t$ dan $h(s) = \sqrt{s}$
   a) Tentukan daerah definisi dan daerah nilai f, g, h.
   b) Perlihatkan bahwa fungsi $g \circ f$ terdefinisi, sebutlah p = gof, tentukan aturan fungsi p serta D_p dan R_p
   c) Perlihatkan fungsi $h \circ p$ terdefinisi, sebutlah $q = h \circ p$, tentukan aturan fungsi q serta D_q dan R_q. Kemudian gambarkan D_q sebagai daerah diarsir di bidang