

Pertemuan 2 :  
Pengintegralan dengan Substitusi Trigonometri, dan  
Pengintegralan Fungsi Rasional

**TEKNIK INTEGRASI**

**A. Pengintegralan dengan Substitusi Trigonometri**

**Kasus 1:**

Integral yang memuat bentuk  $\sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $a > 0$ .

Dalam hal ini kita gunakan penggantian  $x = a \sin \theta$ ,  $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$   
(mengapa?)

Bentuk  $\sqrt{a^2 - x^2}$  terdefinisi pada selang tertutup  $[-a, a]$ . Karena itu untuk penggantian ini berlaku  $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq 0$ , bila  $-a \leq x \leq 0$ .  $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq 0$ , bila  $-a \leq x \leq 0$  (mengapa?)

**Kasus 2:**

Integral yang memuat bentuk  $\sqrt{a^2 + x^2}$ ,  $a > 0$ .

Dalam hal ini kita gunakan penggantian  $x = a \tan \theta$ ,  $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$   
(mengapa?)

Bentuk  $\sqrt{a^2 + x^2}$  terdefinisi pada  $\mathbb{R}$ . Karena itu untuk penggantian ini berlaku

$$0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi, \text{ bila } x \geq 0. \quad -\frac{1}{2}\pi < \theta < 0, \text{ bila } x < 0 \text{ (mengapa?)}$$

**Kasus 3:**

Integral yang memuat bentuk  $\sqrt{x^2 - a^2}$ ,  $a > 0$ .

Dalam hal ini kita gunakan penggantian  $x = a \sec \theta$ ,  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$  atau  $\pi \leq \theta < \frac{3}{2}\pi$  (mengapa?)

Bentuk  $\sqrt{x^2 - a^2}$  terdefinisi pada selang  $(-\infty, -a]$  atau  $[a, \infty)$ . Karena itu untuk penggantian ini berlaku

$$0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi, \text{ bila } x \geq a > 0. \quad \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi, \text{ bila } x < -a < 0 \text{ (mengapa?)}$$

Diskusikan!

Tentukan integral berikut :

$$1. \int \frac{\sqrt{-x^2}}{x^2} dx \quad 2. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} \quad 3. \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$$

Latihan 1:

1. Hitunglah integral berikut:

$$a. \int \sqrt{9-x^2} dx \quad b. \int_{-3}^0 \sqrt{9-x^2} dx \quad c. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$$

2. Bandingkan perhitungan integral berikut dengan penggantian aljabar dan penggantian trigonometri

$$a. \int x\sqrt{4-x^2} dx \quad b. \int_{-2}^0 x\sqrt{4-x^2} dx$$

## B. Pengintegralan Fungsi Rasional

Pengintegralan fungsi rasional berbentuk

$$f(x) = \frac{S(x)}{Q(x)}, Q(x) \neq 0$$

Dengan S,Q suku banyak dengan derajat S lebih kecil dari derajat Q.

Dalam menyelesaikan  $\int \frac{S(x)}{Q(x)} dx$ , bentuk  $\frac{S(x)}{Q(x)}$  perlu ditulis sebagai jumlah polinom-polinom parsial.

### 1. Faktor dari Q(x) linear dan Berbeda

Dalam hal ini, bila derajat  $Q(x)=n$ , maka  $Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$  dengan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  semua berbeda. Langkah penyelesaiannya adalah tulis fungsi f atas pecahan bagian yang berbentuk

$$f(x) = \frac{S(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

Diskusikan!

Tentukanlah  $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x} dx$

## 2. Faktor dari Q(x) linear dan ada yang Berulang

Untuk faktor linear berbeda diselesaikan seperti pada pasal 1. Andaikan faktor linear  $x_k$  berulang  $r$  kali, maka pecahan bagian untuk faktor ini adalah

$$\frac{B_1}{x - x_k} + \frac{B_2}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{B_r}{(x - x_k)^r}$$

Diskusikan!:

Tentukanlah  $\int \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx$

## 3. Faktor Q Memuat Bentuk Kuadrat Yang Tak Terulang

Untuk faktor linear dari Q diselesaikan seperti pada pasal 1 dan 2. Andaikan faktor kuadrat dari Q adalah  $px^2 + qx + r$  maka bentuk pecahan bagian untuk faktor ini adalah  $\frac{Ax+B}{px^2+qx+r}$ .

Diskusikan!:

Tentukanlah  $\int \frac{(x+6)dx}{(x+1)(x^2-2x+2)}$

## 4. Faktor Dari Q Memuat Bentuk Kuadrat Yang Berulang

Untuk faktor linear dan faktor kuadrat yang tak terulang dari Q, seperti pada pasal 1, pasal 2 dan pasal 3. Andaikan faktor kuadrat dari Q adalah  $px^2 + qx + r$  terulang  $m$  kali, maka bentuk pecahan bagian untuk faktor ini adalah

$$\frac{A_1x + B_1}{px^2 + qx + r} + \frac{A_2x + B_2}{(px^2 + qx + r)^2} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{(px^2 + qx + r)^m}$$

Diskusikan!:

Tentukanlah  $\int \frac{x^3 - x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$

## Latihan 1:

1. Hitunglah integral tak tentu berikut ini:

- a.  $\int \frac{(x-1)dx}{x^3-x^2-2x}$
- b.  $\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$
- c.  $\int \frac{x^5}{x^3-x} dx$
- d.  $\int \frac{x^3 dx}{x^2+1}$
- e.  $\int \frac{dx}{x^3+x}$
- f.  $\int \frac{x^3-4x}{(x^2+1)^2} dx$
- g.  $\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)} dx$

2. Hitunglah:

- a.  $\int_0^1 \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2-1)} dx$
- b.  $\int_{-3}^1 \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} dx$

## C. Integral Fungsi Rasional Dalam Sinus Dan Kosinus

Pada suatu integral yang integrannya berbentuk fungsi rasional dari sinus dan kosinusnya, penyelesaiannya dapat dilakukan dengan cara mengubah fungsi tersebut ke dalam fungsi rasional dengan perubah bebas  $z$ , dengan melalui penggantian  $z = \tan \frac{1}{2} x$ .

Teorema 1:

Jika  $z = \tan \frac{1}{2} x$ , maka  $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$  dan  $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

Diskusikan!

1. Buktikan teorema tersebut di atas (Petunjuk: gunakan identitas trigonometri)
2. Tentukanlah  $\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x}$

## Latihan2:

Tentukanlah integrasi tak tentu berikut ini:

1.  $\int \frac{dx}{1-\sin x}$
2.  $\int \frac{\cot x}{1+\cos x} dx$
3.  $\int \frac{2dx}{\sin x + \tan x}$
4.  $\int \frac{dx}{1+\sin 2x + \cos 2x}$
5.  $\int \frac{1-\sin 2x}{1-\cos 2x}$