BAHAN AJAR
PERKULIAHAN KALKULUS
PROGRAM KOMPETENSI GANDA DEPAG S1 KEDUA
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

Oleh:

Drs. Endang Dedy, M.Si.
Dr. Endang Cahya, M.Si.

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
2008

Minggu ke : I
Materi : 1. Sistem Bilangan Real
2. Pertidaksamaan

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

1. Sistem Bilangan Real

Lambang-lambang baku untuk himpunan-himpunan bilangan, yaitu:

$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ bilangan real}\}$

$\mathbf{N} = \{x \mid x \text{ bilangan asli}\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbf{Z} = \{x \mid x \text{ bilangan bulat}\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbf{Q} = \{x \mid x \text{ bilangan rasional}\}$

Sifat Lapangan

Operasi penjumlahan dan perkalian pada **R** memenuhi *sifat lapangan* atau *sifat medan* bilangan real. Adapun sifat lapangan bilangan real adalah sebagai berikut:
Untuk setiap $x, y, z \in \mathbf{R}$, berlaku

1. Sifat komutatif
   $x + y = y + x$
   $x \, . \, y = y \, . \, x$
2. Sifat asosiatif
   $x + (y + z) = (x + y) + z$
   $x(yz) = (xy)z$
3. Sifat distributif kali terhadap tambah
   $x(y + z) = xy + xz$
4. Unsur kesatuan
   Terdapat unsur 0 (unsur kesatuan tambah atau unsur nol) dan *1* (unsur kesatuan kali atau unsur satuan) yang memenuhi
   $x + 0 = 0 + x = x$ dan $x \, . \, 1 = 1 \, . \, x = x$
5. Unsur balikan (invers)
   (i) Untuk setiap $x \in \mathbf{R}$, terdapat $-x \in \mathbf{R}$ sehingga $x + (-x) = 0$ ($-x$ lawan dari x)
   (ii) Untuk setiap $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ terdapat $x^{-1} \in \mathbf{R}$ sehingga $x.x^{-1} = 1$ (x^{-1} kebalikan dari x)

Definisi (Pengurangan dan Pembagian Bilangan Real):

Misalkan $x, y \in \mathbf{R}$.

(a) Pengurangan dari bilangan real x dengan y ditulis $x - y$ *didefinisikan dengan* $x - y = x + (-y)$

(b) Pembagian dari bilangan real x oleh y $(y \neq 0)$ ditulis x : y didefinisikan dengan $x : y = \dfrac{x}{y} = x.y^{-1}$

Teorema (Sifat-sifat Aljabar Elementer Bilangan Real):

Misalkan a, b, c adalah bilangan real.

(a) *Jika* $a = b$, *maka* $a + c = b + c$ *dan* $ac = bc$
(b) *Jika* $a + c = b + c$, *maka* $a = b$
(c) *Jika* $ac = bc$ *dan* $c \neq 0$, *maka* $a = b$
(d) $-(-a) = a$
(e) $(a^{-1})^{-1} = a$, $a \neq 0$
(f) $a(b - c) = ab - ac$
(g) $a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0$
(h) $a(-b) = (-a)b = -ab$, *khususnya* $(-1)a = -a$
(i) $(-a)(-b) = ab$
(j) *Jika* $ab = 0$, *maka* $a = 0$ *atau* $b = 0$
(k) *Jika* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, *maka* $ad = bc$, $b \neq 0$, $d \neq 0$
(l) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$

Sifat Urutan pada Bilangan Real

Definisi:

Diberikan $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) $a < b$ *berarti* $b - a$ *positif atau* $b - a > 0$
(2) $a \leq b$ *berarti* $a = b$ *atau* $a < b$
(3) $b > a$ *berarti* $a < b$ *atau* $b - a$ *positif*

Aksioma(Aksioma urutan):

(1) *Jika* $a \in \mathbf{R}$, *maka salah satu dari pernyataan-penyataan berikut berlaku:* $a = 0$, *a positif, atau* $-a$ *negatif.*
(2) *Jumlah dua bilangan real positif adalah bilangan positif*
(3) *Perkalian dua bilangan real positf adalah bilanga positif*

Teorema (Sifat-sifat Urutan) :

Diberikan $x, y, z, c \in \mathbf{R}$.

(1) *Jika* $x < y$ *dan* $y < z$, *maka* $x < z$ *(Sifat Transitif)*
(2) *Jika* $x < y$, *maka* $x + c < y + c$ *(Sifat Penambahan)*
(3) *Jika* $x < y$ *dan* $c > 0$, *maka* $cx < cy$ *(Sifat Perkalian)*
(4) *Jika* $x < y$ *dan* $c < 0$, *maka* $cx > cy$ *(Sifat Perkalian)*

2. Pertidaksamaan

Pertidaksamaan adalah hubungan matematika yang mengandung tanda salah satu dari $<, >, \geq, \leq$, dan suatu variabel. Semua himpunan bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan dinamakan *himpunan penyelesaian.* Himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan dapat dituliskan dalam bentuk notasi himpunan atau dalam notasi interval.

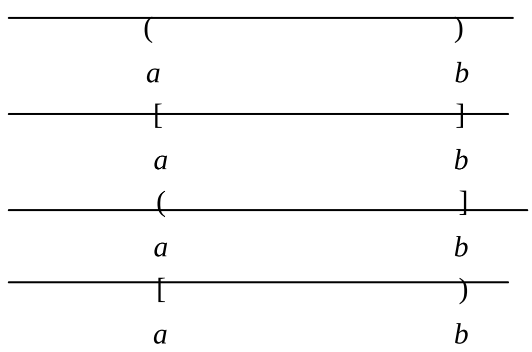
Definisi (Interval Terbatas):

$$(a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$$



Definisi (Interval Tak Terbatas):

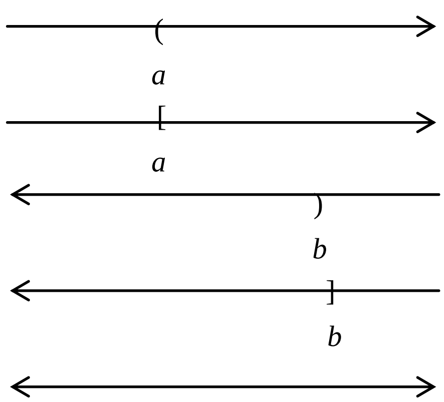
$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$$

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$$

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$$

$$(-\infty,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}$$



Perlu diingat bahwa lambang $+\infty$ berarti " membesar tanpa batas" dan lambang $-\infty$ berarti " mengecil tanpa batas"

Aturan Umum Menentukan Tanda Pertidaksamaan

Untuk pertidaksamaan yang terdiri dari sejumlah berhingga faktor linear di ruas kiri dengan ruas kanannya nol, tandanya dapat ditentukan dengan cara berikut:

- Tetapkan tanda dari suatu interval bagiannya.
- Bila melintasi nilai batas yang berasal dari faktor linear berpangkat bilangan ganjil, maka tanda interval bagian berikutnya berubah.
- Bila melintasi nilai batas yang berasal dari faktor linear berpangkat bilangan genap, maka tanda interval bagian berikutnya tetap.

Minggu ke : II
Materi : 1. Nilai Mutlak
3. Fungsi dan Operasinya

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

1. Nilai Mutlak

Definisi (Nilai Mutlak):

Nilai mutlak dari bilangan real x, ditulis $|x|$*, didefinisikan sebagai*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Arti geometri $|x|$ adalah jarak dari x ke 0 pada garis bilangan yang diperlihatkan pada gambar berikut ini.

$x < 0$ 0 $x \ge 0$

$|x| = -x$ $|x| = -x$

Teorema (Sifat-sifat Nilai Mutlak) :

1. *Untuk setiap bilangan real x dan y berlaku*
   $|x| = |y|$ *jika dan hanya jika* $x = \pm y$ *dan* $x^2 = y^2$
2. *Jika* $a \ge 0$*, maka*
   a. $|x| \le a$ *jika dan hanya jika* $-a \le x \le a$ *dan* $x^2 \le a^2$

   b. $|x| \ge a$ *jika dan hanya jika* $x \ge a$ *atau* $x \le -a$*, dan* $x^2 \ge a^2$
3. *Untuk setiap bilangan real x dan y berlaku*
   a. $|x + y| \le |x| + |y|$
   b. $|x - y| \le |x| + |y|$
   c. $|x| - |y| \le |x - y|$
   d. $\big||x| - |y|\big| \le |x - y|$
4. *Untuk setiap bilangan real x dan y berlaku*
   (a) $|xy| = |x|.|y|$
   (b) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ y \ne 0$

2. Fungsi dan Operasinya

Definisi (Fungsi sebagai pasangan terurut):

Misalkan A dan B himpunan-himpunan tidak kosong. Suatu fungsi f dari A ke B ditulis $f : A \rightarrow B$ *adalah himpunan pasangan terurut* $f \subset A \times B$ *sehingga*

(i) *untuk setiap* $x \in A$, *ada* $y \in B$ *berlaku* $(x, y) \in f$

(ii) *Jika* $(x, y) \in f$ *dan* $(x, z) \in f$, *maka* $y = z$

Definisi (Fungsi sebagai pemetaan):

Misalkan A dan B himpunan-himpunan tidak kosong. Suatu fungsi f dari A ke B ditulis $f : A \rightarrow B$ *adalah suatu aturan yang memasangkan setiap* $x \in A$ *dengan tepat satu anggota* $f(x) \in B$.

Definisi :

Diberikan f,g adalah fungsi dan c suiatu konstanta. Fungsi-fungsi f+g, f-g, cf, f.g, dan $\frac{f}{g}$ *untuk setiap* $x \in D_f \cap D_g$ *didefinisikan sebagai*

(i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(ii) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

(iii) $(cf)(x) = cf(x)$

(iv) $(fg)(x) = f(x).g(x)$

(v) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

(vi) $(f^n)(x) = (f(x))^n$

Definisi (Peta dan Prapeta):

Diberikan y = f(x) suatu fungsi.

(ii) *Jika* $x \in D_f$, *maka* $f(x)$ *disebut peta dari x*

(ii) *jika* $y \in R_f$, *maka himpunan* $\{x \in Df \mid f(x) = y\}$ *disebut prapeta dari y, ditulis* $f^{-1}(y)$

Definisi (Peta dan Prapeta Suatu Himpunan):

Misalkan f suatu fungsi.

(i) *Jika* $A \subset D_f$, *maka himpunan* $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ *disebut peta dari himpunan A.*

(ii) *Jika* $B \subset R_f$, *maka himpunan* $f^{-1}(B) = \{x \in D_f \mid f(x) \in B\}$ *disebut prapeta dari himpunan B.*

Definisi (Fungsi Komposisi *g o f*):

Misalkan f dan g adalah fungsi dengan $R_f \cap D_g \neq \phi$. *Terdapat fungsi dari himpunan bagian* D_f *ke himpunan bagian* R_g . *Fungsi ini disebut komposisi dari f dan g, ditulis g o f (dibaca f bundaran g) dan persamaannya ditentukan oleh* (*g o f*) (*x*) = *g*(*f*(*x*))

Daerah asal *g o f* adalah prapeta $R_f \cap D_g$ terhadap *f*, ditulis

$$D_{gof} = f^{-1}(R_f \cap D_g) = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

Daerah nilai *g o f* adalah peta $R_f \cap D_g$ terhadap g, ditulis

$$R_{gof} = g(R_f \cap D_g) = \{g(x) \in R_g \mid x \in R_f\} = \{g(f(x)) \mid x \in D_{gof}\}$$

Definisi (Fungsi Identitas):

Diberikan i suatu fungsi dari A ke B. Jika i(x) = x untuk setiap x $\in$ *A , maka fungsi i disebut fungsi identitas di A.*

Definisi (Fungsi Invers):

Misalkan f suatu fungsi dari A ke B. Jika terdapat fungsi g dari R_f *ke A sehingga g*(*f*(*x*)) = *i*(*x*) = *x untuk semua* $x \in$ *A, maka g disebut fungsi invers untuk f dan ditulis* $g = f^{-1}$.

Perlu diperhatikan bahwa:

(1) Penulisan f^{-1} *menyatakan fungsi invers untuk f , bukan berarti* $\frac{1}{f}$

(2) Jika g fungsi invers untuk f, maka $D_g = R_f$, *sebab g didefinisikan oleh*

$$g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Teorema (Keberadaan Fungsi Invers) :

Jika f fungsi satu-satu , maka

(i) *fungsi invers* f^{-1} *ada , dan*

(ii) $D_{f^{-1}} = R_f$

Minggu ke : **III**
Materi : **1. Limit Fungsi**
2. Sifat-sifat Limit Fungsi

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

1. Limit Fungsi

Definisi (Limit Fungsi di Satu Titik):

Misalkan fungsi f yang terdefinisi pada suatu selang terbuka I yang memuat x=a kecuali mungkin di a sendiri. Limit fungsi f untuk x mendekati a adalah L,, L∈***R*** *ditulis* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ *terdapat suatu bilangan* $\delta > 0$ *sehingga berlaku* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *asalkan* $0 < |x - a| < \delta$ *atau*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \ni \; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

2. Sifat-sifat Limit Fungsi

Teorema :

Diketahui n bilangan bulat positif, k suatu konstanta, dan fungsi f dan g masing-masing mempunyai limit di c, maka

(1) Jika $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x\to c} f(x) = M$ maka L = M (Ketunggalan limit fungsi)

(2) $\lim\limits_{x\to c} k = k$

(3) $\lim\limits_{x\to c} x = c$

(4) $\lim\limits_{x\to c} k.f(x) = k \lim\limits_{x\to c} f(x)$

(5) $\lim\limits_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$

(6) $\lim\limits_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x)$

(7) $\lim\limits_{x\to c} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x). \lim\limits_{x\to c} g(x)$

(8) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$ asalkan $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$

(9) $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$

(10) $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ asalkan $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ untuk n genap

(11) a. Jika $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ maka $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |L|$

b. Jika $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = 0$ maka $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$

Teorema (Teorema Penggantian):

Jika f suatu fungsi polinom atau fungsi rasional maka $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ *asalkan nilai penyebut di c tidak nol untuk fungsi* rasional .

Definisi (Definisi Limit Sepihak):

Diberikan fungsi f terdefinisi pada selang buka I = (a,b).

(1) *Limit fungsi f untuk x mendekati b dari sebelah kiri adalah L, ditulis* $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = L$ *bila untuk setiap bilangan ε > 0 terdapat bilangan δ>0 sehingga jika* $0 < b - x < \delta$ *berlaku* $|f(x) - L| < \varepsilon$

(2) *Limit fungsi f untuk x mendekati a dari sebelah kanan adalah L, ditulis* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ *bila untuk setiap bilangan ε > 0 terdapat bilangan δ > 0 sehingga jika* $0 < x - a < \delta$ *berlaku* $|f(x) - L| < \varepsilon$

Teorema (Hubungan Limit Fungsi dengan Limit Sepihak):

Fungsi f terdefinisi pada selang buka I yang memuat x = c, kecuali mungkin di c sendiri. Fungsi f dikatakan mempunyai limit di x = c jika

(i) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ *ada (berhingga);*

(ii) $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$ *ada (berhingga); dan*

(iii) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c+} f(x)$

Minggu ke : IV

Materi : 1. Limit Takhingga dan di Takhinga

2. Kekontinuan Fungsi

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

1. Limit Tak Hingga dan Limit di Tak Hingga

Limit Tak Hingga

Definisi:

Diberikan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c kecuali mungkin di c sendiri. Limit fungsi f untuk x mendekati c sama dengan ∞, ditulis $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ *jika untuk setiap bilangan besar M > 0 terdapat suatu bilangan δ > 0 sehingga bila* $0 < |x - c| < \delta$ *berlaku f(x) > M, atau ditulis dengan menggunakan lambang sebagai berikut*

$$\forall\, M > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni\ 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Definisi:

Dberikan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c kecuali mungkin di c sendiri. Limit fungsi f untuk x mendekati c sama dengan -∞, ditulis $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$ *jika untuk setiap bilangan kecil N < 0 terdapat suatu bilangan δ > 0 sehingga bila* $0 < |x - c| < \delta$ *berlaku f(x) < N, atau ditulis dengan menggunakan lambang sebagai berikut* $\forall N < 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni$ $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < N$.

Definisi :

(a) Limit Kiri

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni 0 < c - x < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall N < 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni 0 < c - x < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < N$$

(b) Limit Kanan

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni 0 < x - c < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall N < 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni 0 < x - c < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < N$$

Teorema :

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = \infty$ *untuk r bilangan asli*

(b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = \infty$ *untuk r bilangan genap positif, dan*

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = -\infty$ *untuk r bilangan ganjil positif*

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^r} = \infty$ *untuk r bilangan genap positif*

Teorema :

Diketahui fungsi $h = \dfrac{f}{g}$ *terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c kecuali mungkin di c sendiri, dengan* $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \neq 0$ *dan* $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$.

(a) *Bila L > 0 dan g(x) > 0 maka* $\lim\limits_{x \to c} h(x) = \infty$

(b) *Bila L > 0 dan g(x) < 0 maka* $\lim\limits_{x \to c} h(x) = -\infty$

(c) *Bila L < 0 dan g(x) > 0 maka* $\lim\limits_{x \to c} h(x) = -\infty$

(d) *Bila L < 0 dan g(x) < 0 maka* $\lim\limits_{x \to c} h(x) = \infty$

Limit di Tak Hingga

Definisi :

*Diketahui fungsi f terdefinisi pada selang (c,∞). Jika f(x) mendekati suatu nilai L $\in$ **R** untuk x membesar tanpa batas, yang dinyatakan dengan lambang* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *Artinya, jarak f(x) ke L dapat dibuat sekecil mungkin dengan cara mengambil x cukup besar yaitu lebih besar dari suatu bilangan positif tertentu, atau*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \ni x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Secara sama, didefinisikan pula fungsi yang terdefinisi pada selang (-∞, c) sebagai berikut $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ *jika untuk setiap ε > 0 terdapat suatu N < 0 sehingga bila x < N berlaku* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *atau*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N < 0 \quad \ni x < N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Teorema :

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ *, r bilangan asli*

(b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ *, r bilangan asli*

Asimtot

Definisi :

(a) Garis y = b dikatakan asimtot datar dari grafik fungsi f bila

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

(b) Garis x = c dikatakan asimtot tegak grafik fungsi f bila paling sedikit satu dari syarat berikut dipenuhi.

1. $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$ *2.* $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$

3. $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$ *4.* $\lim_{x\to c-} f(x) = -\infty$

2. Kekontinuan Fungsi di Satu Titik

Definisi :

1. *Diketahui fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c. Fungsi f dikatakan kontinu di c jika* $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$
2. *Diberikan fungsi f terdefinisi pada selang tertutup* I = [a,b].
   (a) *Fungsi f dikatakan **kontinu kiri** di b bila* $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$
   *(b) Fungsi f dikatakan **kontinu kanan** di a bila* $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Kekontinuan Fungsi pada Suatu Selang

Definisi:

1. *Fungsi f dikatakan kontinu pada selang terbuka* (*a*,*b*) *jika fungsi f kontinu di setiap titik pada selang* (*a*,*b*).

2. *Fungsi f dikatakan kontinu pada selang setengah terbuka atau setengah tertutup* (*a*,*b*] *jika fungsi f kontinu pada selang terbuka* (*a*,*b*) *dan kontinu kiri di b.*

3. *Fungsi f dikatakan kontinu pada selang setengah terbuka atau setengah tertutup [a,b) jika fungsi f kontinu pada selang terbuka (a,b) dan kontinu kanan di a.*

4. *Fungsi f dikatakan kontinu pada selang terutup [a,b], jika fungsi f kontinu kanan di a,kontinu pada selang terbuka* (*a*,*b*), *dan kontinu kiri di b.*

Teorema :

(a) *Jika fungsi f dan g kontinu di c, maka fungsi f + g, f – g, f.g, dan* $\frac{f}{g}$ *dengan* $g(c) \neq 0$ *kontinu di c*

(b) *Jika fungsi f dan g kontinu pada suatu selang I, maka fungsi f + g, f – g, f.g, dan* $\frac{f}{g}$ *dengan* $g(c) \neq 0$ *kontinu di c untuk semua c* $\in I$

(c) Fungsi suku banyak, fungsi polinom, fungsi rasional, dan fungsi trigonometri kontinu pada daerah definisinya.

(d) Jika fungsi f kontinu di c dan fungsi g kontinu di f (c) maka fungsi komposisi gof kontinu di c

Minggu ke : V
Materi : 1. Turunan dan Aturannya

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

1. Turunan dan Aturannya

Masalah Gradien Garis Singgung

Definisi :

1. *Andaikan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat a, gradien (kemiringan) garis singgung pada kurva f di titik (a, f(a)) adalah:*

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{asal limit ini ada}$$

2. Misalkan m adalah gradien garis singgung pada kurva f di titik (a, f(a)) maka persamaan garis singgung pada kurva f di titik tersebut adalah:

$$y - f(a) = m(x - a)$$

3. *Misalkan f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat a, jika m adalah gradien garis singgung pada kurva f di titik (a, f(a)) dimana* $m = m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\sec}$ *dan l adalah garis singgungnya di titik P.*

   l horizontal jika dan hanya jika $m = m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\sec} = 0$ dan

   l vertikal jika dan hanya jika $|m| = |m_{\tan}| = \left|\lim_{h \to 0} m_{\sec}\right| = \infty$

Masalah Kecepatan Sesaat

Definisi :

Misalkan sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus , jika posisi benda pada saat t ditentukan oleh S= f(t) maka kecepatan rata-rata benda selama selang waktu t=a, sampai t= a+h adalah

$$Kecepatan\ rata\text{-}rata = V_{rata-rata} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

dan kecepatan sesaat benda pada saat t=a adalah

$$V = \lim_{h \to 0} V_{rata-rata} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Pengertian Turunan

Definisi :

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat a.
Turunan pertama fungsi f di x=a ditulis f'(a) didefinisikan dengan:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{asalkan limit ini ada.}$$

f' disebut fungsi turunan pertama dari fungsi asal f, nilai dari f' untuk sebarang x dalam I adalah f'(x) dengan $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ *asal limit ini ada.*
Domain dari fungsi f' adalah semua nilai x dimana limit diatas ada

Turunan Sepihak

Definisi :

2. *Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang setengah terbuka (t,a], nilai turunan kiri fungsi f di x=a ditulis* $f'_{-}(a)$ *didefinisikan dengan*

$$f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{asalkan limit ini ada}$$

2. *Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang setengah terbuka [a,t), nilai turunan kanan fungsi f di x=a ditulis* $f'_+(a)$ *didefinisikan dengan*

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ asalkan limit ini ada}$$

Hubungan Keterdiferensialan dengan Kekontinuan

Teorema (Keterdiferensialan mengakibatkan kekontinuan):

Misalkan fungsi f terdefinisi di sekitar a, jika f '(a) ada, maka f kontinu di a

Fungsi Turunan pada Selang Tertutup

Definisi:

Fungsi f dikatakan mempunyai turunan pada selang tertutup I=[a,b], jika dan hanya jika f'(x) ada untuk setiap $x \in (a,b)$ *,* $f'_+(a)$ *ada dan* $f'_-(b)$ *ada*

Rumus-rumus Turunan

Teorema :

1. *Jika* $f(x) = c$ *(suatu konstanta) untuk semua* x*, maka* $f'(x) = 0$ *untuk semua* x*, yaitu:* $D_x(c) = 0$.
2. *Jika* $f(x) = ax + b, a \neq 0,$ *maka* $f'(x) = a$*, yaitu* $D_x(ax+b) = a$
3. *Jika n bilangan bulat positif dan* $f(x) = x^n$ *maka* $f'(x) = nx^{n-1}$ *atau* $D_x(x^n) = nx^{n-1}$
4. *Jika f dan g adalah fungsi yang terdeferensialkan, a dan b adalah konstanta real, maka* $D[af(x) + bg(x)] = aD[f(x)] + bD[g(x)]$.
5. *Jika f dan g masing-masing adalah fungsi yang terdeferensialkan di x maka fg adalah terdeferensialkam di x, dan*
   $D[f(x).g(x)] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = g(x)Df(x) + f(x)Dg(x)$
   Jika $u = f(x)$ *dan* $v = g(x)$ *hasil kali di atas berbentuk:*
   $D(uv) = uDv + vDu$ *atau* $(uv)' = u'v + uv'$
6. *Jika f terdeferensialkan di x dan* $f(x) \neq 0$
   maka $D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ *atau* $D\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{D_f}{f^2}$
7. *Jika f dan g terdeferensial di x dan* $g(x) \neq 0$ *maka* f/g *terdeferensial di x, dan* $D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D(f(x)).g(x) - f(x).D(g(x))}{[g(x)]^2}$ *, atau*

Bila $u = f(x)$ *dan* $v = g(x)$ *maka* $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Minggu ke : VI
Materi : 1. Aturan Ranrai
2. Turunan Tingkat Tinggi
3. Penurunan Implisit

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

1. Aturan Rantai

Persamaan $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ ini dinamakan aturan rantai, yang berlaku untuk dua fungsi terdeferensial $y = g(u)$ dan $u = f(x)$. Bentuk lain dari penulisan aturan rantai untuk kedua fungsi di atas adalah sebagai berikut $D_x y = D_u y.D_x u$

Teorema:

Andaikan bahwa f terdeferensialkan di x dan g terdeferensialkan di $f(x)$, maka fungsi komposisi $h = g \circ f$ yang didefinisikan dengan $h(x) = g(f(x))$ terdeferensialkan di a dan turunannya adalah

$$h'(x) = D[g(f(x))] = g'(f(x)).f'(x)$$

Aturan Pangkat yang Diperumum

Teorema :

Jika r adalah bilangan rasional, maka $D_x[f(x)]^r = r[f(x)]^{r-1}.f'(x)$ dimana f terdefinisi dan terdiferensial.

2. Turunan Tingkat Tinggi

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I dan I*={ $a \in$ I / $f'(a)$ ada}. Karena $f'(a)$ didefinisikan melalui proses limit yang tunggal, maka untuk setiap $a \in$ I* terdapat tepat satu nilai $f'(a)$. Ini mengakibatkan pengaitan antara $a \in$ I* dengan $f'(a) \in R$ merupakan suatu fungsi. Jika $f^{(k)}$ ada untuk $k = 1,2,\ldots,n$, maka fungsi turunan kedua, ketiga, dan seterusnya didefinisikan dengan cara yang sama seperti fungsi turunan pertama melalui proses limit. Yakni:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \text{ bila limit ini ada}$$

$$f'''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} \text{ bila limit ini ada}$$

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h} \text{ bila limit ini ada}$$

Lambang yang digunakan:

$f''(x) = \dfrac{d\left[f'(x)\right]}{dx}$ artinya turunan ke 2 dari fungsi f

$f'''(x) = \dfrac{d\left[f''(x)\right]}{dx}$ artinya turunan ke 3 dari fungsi f

$\vdots$

$f^{n}(x) = \dfrac{d\left[f^{(n-1)}(x)\right]}{dx}$ artinya turunan ke n dari fungsi f

Lambang turunan ke n dari suatu fungsi $y = f(x)$ dapat ditulis dalam bentuk:

$y^{(n)}$ atau $f^{(n)}(x)$ atau $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ atau $D_x^n(y)$ atau $D^n y$

3. Penurunan Implisit

Fungsi f yang dinotasikan dengan y=f(x) menyatakan x sebagai peubah bebas dan y sebagai peubah tak bebas, atau dengan kata lain peubah y dinyatakan dalam x secara eksplisit, yaitu y sebagai fungsi dari x.

Beberapa fungsi yang tidak dinyatakan secara eksplisit

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$3x^2 + 4xy + 2y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 t + xt^2 - 1 = 0$$

Persamaan-persamaan seperti contoh di atas adalah fungsi yang dinyatakan secara implisit.

Minggu ke : **VII**

Materi : **1. Diferensial**

2. Maksimum dan Minimum Mutlak

3. Maksimum dan Minimum Mutlak Relatif

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

1. Diferensial

Definisi:

Misalkan fungsi f mempunyai persamaan y = f(x) mempunyai turunan $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$. *Diferensial dari x dinotasikan dengan dx dan diferensial dari y dinotasikan dengan dy, didefinisikan sebagai*

$$dy = f'(x)\Delta x \quad dan \quad dx = \Delta x$$

dimana Δx *menyatakan pertambahan sebarang dari x.*

Dengan konsep diferensial ini kita dapat menyederhanakan bentuk-bentuk rumus turunan. Misalkan u dan v adalah dua fungsi yang terdiferensial maka berlaku:

Fungsi	Derivative	Diferensial
$y=k$	$\frac{dy}{dx}=\frac{dk}{dx}=0$	$d(k)=0$
$y=ku$	$\frac{dy}{dx}=k\frac{du}{dx}$	$d(ku)=k\,du$
$y=u+v$	$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$	$d(u+v)=du+dv$
$y=u.v$	$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dx}$	$d(u.v)=udv+vdu$
$y=\frac{u}{v}$	$\frac{dy}{dx}=\frac{v(du/dx)-u(dv/dx)}{v^2}$	$d(\frac{u}{v})=\frac{vdu-udv}{v^2}$
$y=u^n$	$\frac{d(u^n)}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$	$d(u^n)=nu^{n-1}du$

2. Maksimum dan Minimum Mutlak (Global)

Definisi (Nilai Minimum dan Maksimum):

a. Jika c dalam interval tertutup $[a,b]$, *maka* $f(c)$ *dikatakan* ***nilai minimum*** *dari* $f(x)$ *pada* $[a.b]$ *jika* $f(c)\le f(x)$ *untuk semua x dalam* $[a,b]$.

b. Jika d dalam interval tertutup $[a,b]$, *maka* $f(d)$ *dikatakan* ***nilai maksimum*** *dari* $f(x)$ *pada* $[a.b]$ *jika* $f(x)\le f(d)$ *untuk semua x dalam* $[a,b]$.

Teorema (Sifat Nilai Minimum dan Maksimum):

Jika fungsi f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$, *maka terdapat nilai c dan d dalam* $[a, b]$ *sehingga* $f(c)$ *adalah nilai minimum dan* $f(d)$ *nilai maksimum dari f pada* $[a,b]$.

Definisi:

Misalkan f suatu fungsi dengan domain D. $f(c)$ *dikatakan nilai maksimum mutlak atau nilai maksimum global dari f pada D jika* $f(c)\ge f(x)$ *untuk semua x dalam D. Secara singkat,* $f(c)$ *merupakan nilai terbesar dari f pada D.*

Teorema (*Maksimum dan Minimum Mutlak*):

Misalkan bahwa $f(c)$ *adalah nilai maksimum mutlak* (*atau minimum mutlak*) *dari fungsi kontinu* f *pada interval tertutup* $[a,b]$. *Maka c adalah titik kritis dari* f *atau salah satu dari titik-titik ujung* a *dan* b.

Cara mencari nilai maksimum dan minimum (mutlak) dari fungsi f pada interval tertutup [a,b] sebagai berikut.

1. Mencari titik-titik kritis dari f: titik-titik itu diperoleh dari $f'(x)=0$ dan $f'(x)$ tidak ada.
2. Daftarkan nilai-nilai dari x yang menghasilkan ekstrim dari f yang mungkin: kedua titik ujung a dan b dan titik-titik kritis yang terletak dalam $[a,b]$.
3. Evaluasi $f(x)$ di masing-masing titik dalam daftar yang diperoleh (2).
4. Tentukan nilai f yang terkecil dan yang terbesar.

3. Maksimum dan Minimum Lokal (Relatif)

Definisi *:*

(a) *Nilai* $f(c)$ *adalah* ***nilai maksimum lokal*** *dari fungsi f jika* $f(x) \le f(c)$ *untuk semua x yang cukup dekat ke c*.

(b) *nilai* $f(c)$ *adalah* ***nilai minimum lokal*** *dari fungsi* f *jika* $f(x) \ge f(c)$ *untuk semua x yang cukup dekat ke c. Nilai maksimum lokal atau nilai minimum lokal dari* f *biasanya disebut* ***ekstrim lokal*** *dari f.*

Teorema (*Maksimum dan minimum lokal*):

Jika f *terdiferensialkan di* c *dan terdefinisi pada suatu interval buka yang memuat c dan jika* $f(c)$ *nilai maksimum lokal atau nilai minimum lokal dari f, maka* $f'(c)=0$

Minggu ke : VIII
Materi : 1. Kemonotonan
2. Kecekungan dan Titik Belok

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

1. Kemonotonan

Definisi (Fungsi naik dan turun):

Fungsi f *naik pada interval* $I = (a, b)$ *jika* $f(x_1) < f(x_2)$ *untuk semua pasangan bilangan* x_1 *dan* x_2 *dalam I dengan* $x_1 < x_2$.

Fungsi f *turun pada I jika* $f(x_1) < f(x_2)$ *untuk semua pasangan bilangan* x_1 *dan* x_2 *dalam I dengan* $x_1 < x_2$.

Teorema (Teorema Rolle):

Misalkan fungsi f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ *dan terdiferensialkan dalam interior-interior* $I = (a, b)$. *Jika* $f(a) = 0 = f(b)$, *maka ada suatu nilai c dalam* (a, b) *sehingga* $f'(c) = 0$

Teorema (Teorema Nilai Rata-rata)

Misalkan fungsi f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ *dan terdiferensialkan dalam interval buka* (a, b). *Jika* $f(a) = 0 = f(b)$, *maka* $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$ *untuk suatu bilangan c dalam* (a, b)

Teorema (Teorema Fungsi Naik dan Fungsi Turun)

Jika $f'(x) > 0$ *untuk semua x dalam* (a, b), *maka f merupakan fungsi naik pada* $[a, b]$. *Jika* $f'(x) < 0$ *untuk semua x dalam* (a, b), *maka f merupakan fungsi turun pada* $[a, b]$

Uji Turunan Pertama untuk titik Ekstrim

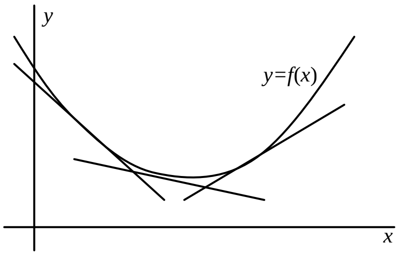
Teorema (Uji Turunan Pertama untuk Ekstrim Lokal):

Misalkan fungsi f kontinu pada interval *I dan terdiferensialkan di sana kecuali mungkin di titik interior c dari I.*

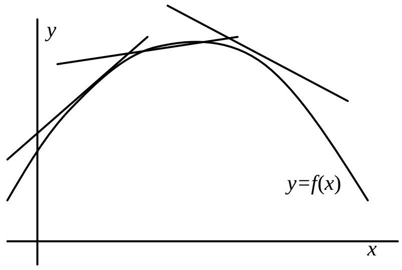
1. *Jika* $f'(x) < 0$ *di sebelah kiri dari c dan* $f'(x) > 0$ *di sebelah kanan dari c, maka* $f(c)$ *merupakan nilai minimum lokal dari* $f(x)$ *pada I.*
2. *Jika* $f'(x) > 0$ *di sebelah kiri dari c dan* $f'(x) < 0$ *di sebelah kanan dari c, maka* $f(c)$ *merupakan nilai maksimum lokal dari* $f(x)$ *pada I.*
3. *Jika* $f'(x) > 0$ *di sebelah kiri dan kanan dari c, atau* $f'(x) < 0$ *di sebelah kiri dan kanan dari c, maka f(c) bukan merupakan nilai minimum atau nilai maksimum dari f(x) pada I.*

2. Kecekungan

Sekarang kita akan menyelidiki makna dari tanda turunan kedua. Jika $f''(x) > 0$ pada interval *I*, maka turunan pertama f' adalah fungsi naik pada *I*, sebab turunan*nya* $f''(x)$ adalah positif. Dengan demikian, jika kita menggambar grafik $y = f(x)$ dari kiri ke kanan, kita lihat bahwa garis singgung di titik-titik pada kurva itu akan bergerak berlawanan arah dengan perputaran jarum jam (Gambar 1). Kita menggambarkan situasi ini dengan mengatakan bahwa kurva $y = f(x)$ **cekung ke atas.**



Gb.1 Grafik cekung ke atas



Gb.2 Grafik cekung ke bawah

Jika $f''(x) < 0$ pada interval I, maka turunan pertama f' turun pada I, sehingga garis singgung akan bergerak searah dengan perputaran jarum jam jika x bertambah besar. Kita katakan hal ini bahwa kurva $y = f(x)$ **cekung ke bawah**. Gambar 2 memperlihatkan bagaimana posisi garis singgung pada kurva dengan $f''(x) < 0$. Kedua kasus di atas dirangkum secara singkat dalam tabel pada Gambar 3.

$f''(x)$	$y = f(x)$
Positif Negatif	Cekung ke atas Cekung ke bawah

Gb. 3 Pentingnya tanda $f''(x)$ pada interval

Teorema (Uji Turunan Kedua):

Misalkan bahwa fungsi f dapat diturunkan dua kali pada interval buka I yang memuat titik kritis c di mana $f'(c) = 0$. Maka

(1) *Jika $f''(x) > 0$ pada I, maka $f(c)$ merupakan nilai minimum dari f(x) pada I.*

(2) *Jika $f''(x) < 0$ pada I, maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum dari f(x) pada I.*

Teorema (Uji Titik Belok):

Misalkan fungsi f kontinu pada interval buka yang memuat titik a. Jika $f''(x) < 0$ pada satu sisi dari a dan $f''(x) > 0$ pada sisi yang lain, maka dikatakan bahwa a adalah titik belok dari f.

Minggu ke : IX
Materi : Ujian Tengah Semester

Minggu ke : X
Materi : 1. Grafik Fungsi
2. Integral Tak tentu
3. Pengantar per-samaan diferen-sial

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

1. Grafik Fungsi

Langkah-langkah mensketsa grafik suatu fungsi adalah sebagai berikut:

1. *Menentukan perpotongan grafik fungsi dengan sumbu koordinat*. Perpotongan grafik dengan sumbu –x diperoleh dengan mensubstitusikan $y = 0$ pada fungsi yang diberikan. Sedangkan perpotongan grafik dengan sumbu-y diperoleh dengan mensubstitusikan $x = 0$.

2. *Menentukan interval di mana grafik itu naik dan di mana grafik itu turun.* Interval ini diperoleh dengan menyelesaikan pertidaksamaan $f' > 0$ untuk grafik naik, dan $f' < 0$ untuk grafik turun. Perubahan naik turunnya grafik dapat menentukan titik ekstrim dari fungsi yang diberikan.
3. *Menentukan interval di mana grafik cekung ke atas, dan di mana grafik itu cekung ke bawah*. Interval ini diperoleh dengan menyelesaikan pertidaksamaan $f'' > 0$ untuk grafik sekung ke atas, dan $f'' < 0$ untuk grafik cekung ke bawah. Titik belok dari grafik ditentukan dari perubahan kecekungan di suatu titik.
4. *Membuat sketsa grafik berdasarkan data-data yang diperoleh pada langkah* 1 *sampai dengan langkah* 3.

2. Intergral Tak Tentu

Definisi:

Diberikan fungsi f terdifinisi pada selang terbuka S. Funsi F yang memenuhi $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in S$ dinamakan fungsi anti turunan atau fungsi frimitif dari f pada S.

Definisi:

Diberikan fungsi f terdifinisi pada selang terbuka S. y = F(x) + C dengan C konstanta sebarang dikatakan anti diferensial dari f pada S bila y' = f(x) untuk setiap $x \in S$.

Definisi:

Diberikan fungsi f terdifinisi pada selang terbuka S dan F fungsi anti turunan dari f pada S. Proses menentukan anti diferensial dari fungsi f pada S dinamakan integral tak tentu dari f pada S dan ditulis dengan lambang $\int f(x)dx = F(x) + C$, C konstanta sebarang.

Teorema Dasar Integral Tak Tentu:

1. $\int x^r dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \in Q, \ r \neq 1$
2. $\int \dfrac{d\left[f(x)\right]}{dx} dx = \int d\left[f(x)\right] = f(x) + C$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ konstanta
4. $\int \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
5. $\int \left[f(x) - g(x)\right]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

9. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

10. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

11. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C = -\cos^{-1} x + C$

13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C = -\cot^{-1} x + C$

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}|x| + C = -\csc^{-1}|x| + C$

Minggu ke : XI
Materi : 1. Notasi Sigma
2. Integral Tentu
3. Pengantar per-samaan diferen-sial

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

1. Notasi Sigma

Definisi:

1. *Diberikan* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in R$. *Penjumlahan dari berhingga bilangan* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *dapat disingkat dengan menggunaka lambing "*$\sum$*"yang didefinisikan dengan* $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Teorema:

1. *Jika* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in R$ *dan* $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n \in R$, *maka*
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$
2. *Jika* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in R$ *dan k konstanta real, maka* $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

2. Integral Tentu

Misalkan f suatu fungsi yang terdefinisi pada selang [a,b]. Definisi integral tentu dapat dibangun dengan cara sebagai berikut:

(1) Buatlah partisi P ={x_0, x_1, x_2,..., x_n} pada selang [a,b] dengan a = x_0 <x_1 <x_2 <...<x_{i-i} <x_i<...< x_n=b. Selang bagian ke-i dari partisi P adalah [x_{i-1}, x_i] dan panjang selangnya adalah $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Panjang partisi P ditulis $\|P\|$ dan didefinisikan sebagai $\|P\| = \underset{1 \le i \le n}{maks}\, \Delta x_i$

(2) Pilih $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ untuk i = 1, 2, 3, ..., n.

(3) Definisikan bentuk jumlah $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ yang dinamakan jumlah Riemann dari fungsi f pada selang [a,b].

(4) Perhatika bentuk limit jumlah Riemann $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

(a) Jika limit ini ada, maka fungsi f terintegralkan pada selang [a,b] dan ditulis $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

(b) Jika limit initidak ada, maka fungsi f tidak terintegralkan pada selang [a,b]

DEFNISI:

Integral tentu (integral Riemann) dari fungsi f pada selang tertutup [a,b] ditulis dengan lambang $\int_a^b f(x)dx$ *dan ddefinisikan sebaga* $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ *bila limt ini ada.*

Teorema:

1. Teorema Keterintegralan. *Jika f terbatas dan kontinu pada selang [a,b] kecuali pada sejumlah terhinga titik, maka f terintegralkan pada [a,b]. Khususnya jika f kontinu pada selang [a,b], maka f terintegralkan pada [a,b].*
2. Teorema Dasar Kalkulus. *Jika f kontinu pada [a,b] dan F anti turunan dari f, maka* $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$
3. Teorema Kelinearan

(a) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(b) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(c) $\int_a^b (f(x)-g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

4. Teorema Penambahan Selang. *Jika F terintegralkan pada suatu selang yang memuat tiga titik a, b, dan c, maka* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
5. Teorema Pembanding. *Jika f dan g terintegralkan pada [a,b] dan* $f(x) \le g(x)$ *untuk setiap* $x \in [a,b]$, *maka* $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
6. Teorema Keterbatasan. *Jika f terintegralkan pada [a,b] dan* $m \le f(x) \le M$ *untuk setiap* $x \in [a,b]$, *maka* $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$
7. Teorema Nilai Rata-rata untuk Integral. *Jika fungsi f kontinu pada selang [a,b], maka terdapat suatu* $c \in [a,b]$ *sehingga* $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Definisi:

Jika fungsi f terintegralkan pada selang [a,b], maka nilai rata-rata dari f pada selang [a,b] didefinisikan dengan $f(c) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Teorema (Pendiferensialan Integral Tentu):

Misalkan fungsi f kontinu pada selang [a,b]. Jika fungsi dengan variabel $x \in [a,b]$ *didefinisikan dengan* $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, *maka*

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x).$$

Minggu ke : XII

Materi: 1. Pengintegralan dgn Substitusi
2. Pengintegralan Parsial
3. Pengintegralan Fungsi Rasional

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

1. Pengintegralan degfan Substitusi

Teorema:

Diberikan fungsi y = f(x) mempunyai turunan pada D_g dan R_g termuat pada selang S. Jika fungsi y = f(x) terdefinisi pada selang S dan F'(x) = f(x) pada S, maka dengan penggantian u = g(x) diperoleh

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

2. Pengintegralan Parsial

Teorema:

Jika u dan vadalah suatu fungs dengan variabel x, maka

a. $\int udv = uv \int vdu$

b. $\int_a^b udv = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b vdu$

3. Pengintegralan Fugsi Rasional

Penintegralan fungsi rasional berbentuk $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, dimana P dan Q merupakan suatu polinom denga derajat P kurang dari Q. Penyelesaian $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ adalah sebagai berikut:

1. Faktor Q(x) linear dan berbeda

Bila derajat Q(x)=n, maka Q(x)=$(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ dengan x_1, x_2, ..., x_n semua berbeda. Langkah penyelesaannya adalah $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *ditulis dalam bentuk pecahan bagian ayng berbentuk* $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \frac{An}{x-x_n}$

2. Faktor Q(x) linear dan ada yang berulang

Jika faktor linear x_k berulang r kali, maka pecahan bagiannya berbentuk

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_2)^2} + ... + \frac{Ar}{(x-x_k)^r}$$

3. Faktor Q(x) memuat bentuk kuadrat yang tak berulang

Jika faktor kuadrat adalah px^2+qx+r, maka pecahan bagia untku faktor ini adalah $\frac{Ax+B}{px^2+qx+r}$

5. Faktor Q(x) memuat bentuk kuadrat yang berulang

Jika faktor kuadrat adalah px^2+qx+r terulang m kali, maka pecahan bagian untuk faktor ini adalah

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r}+\frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2}+\ldots+\frac{A_mx+B_m}{(px^2+qx+r)m}$$

Minggu ke : XIII

Materi: 1. Luas daerah bidang datar
2. Volume benda-benda lempengan

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

1. Luas Daerah Bidang Datar

DEFINISI

1. Misalkan D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ yang kontinu pada $[a,b]$ dengan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, sumbu X, garis $x = a$, dan garis $x = b$. Luas daerah D adalah

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_1)\,\Delta x_1 = \int_a^b f(x)\,dx$$

2. Misakan D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ yang kontinu pada $[a,b]$ dengan $f(x < 0)$ untuk setiap $x \in [a,b]$, sumbu X, garis $x = a$, dan garis $x = b$. Luas daerah D adalah

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_1)\,\Delta x_1 = -\int_a^b f(x)\,dx$$

3. Misalkan fungsi f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$. Luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = f(x)$, sumbu X, garis $x = a$, dan garis $x = b$ adalah

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(x_1)|\,\Delta x_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

4. Misalkan f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$. Maka Luas daerah yang dibatasi grafik fungsi $x = f(y)$, sumbu Y, garis $y = a$, dan garis $y = b$ adalah

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(x_1)|\,\Delta y_1 = \int_a^b |f(y)|\,dy$$

2. Luas Daerah Bidang Datar Antara Dua Kurva

DEFINISI

Misalkan fungsi f dan g kontinu pada $[a,b]$ *dan* $f(x) \geq g(x)$ *pada* $[a,b]$. *Luas daerah L yang dibatasi oleh grafik fungsi* $y = f(x)$, $y = g(x)$, *garis* $x = a$, *dan garis* $x = b$ *adalah*

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

3. Volume Benda Lempengan

Definisi:

Misalkan suatu benda padat terletak diantara dua bidang yang tegak lurus sumbu X dari x = a ke x = b. Jika luas penampang irisan antara bidang yang tegak lurus sumbu X dengan benda padat itu adalah L(x), a<x<b dengan L kontinu pada [a,b],maka volume benda padat itu adalah

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} L(c_i)\Delta x_i = \int_a^b L(x)\,dx$$

Minggu ke : XIV

Materi: 1. Volume benda dengan metod cakram
2. Volume benda dengan metode cincin
3. Volume benda dengan metode kulit tabung

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

1. Volume Benda dengan Metode Cakram

Definisi:

Misalkan f fungsi yang kontinu pada selang tertutup [a,b] *dengan f(x)≥0 untuk setiap* $x \in$[a,b]. *Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi y=f(x), sumbu X, garis x = a,dan garis x = b diputar mengelilingi sumbu X adalah*

$$V = \pi \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

2. Volume Benda dengan Metode Cincin

Definisi:

Misalkan f dan g fungsi yang kontinu pada selang tertutup [a,b] *dengan f(x)≥g(x)≥0 untuk setiap x*∈[a,b]. *Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi y=f(x), y = g(x), garis x = a, dan garis x = b diputar mengelilingi sumbu X adalah*

$$V = \pi \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[f^2(c_i) - g^2(c_i) \right] \Delta x_i = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx$$

3. Volume Benda dengan Metode Kulit Tabung

Definisi:

Misalkan f fungsi yang kontinu pada selang tertutup [a,b]. Daerah R adalah daerah di kuadran I yang dibatasi oleh oleh grafik fungsi y=f(x), sumbu X, garis x = a,dan garis x = b. Jika R diputar mengelilingi diputar mengelilingi sumbu Y, maka volume benda putar yang terjadi adalah adalah

$$V = 2\pi \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} c_i f(c_i) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Minggu ke : XV
Materi : Ujian Akhir Semester

DAFTAR PUSTAKA

Purcell, E.J. (1995). *Kalkulus dan Geometri Analitik* (terjemahan I.N. Susila, dkk). Jilid I, edisi V, Jakarta: Erlangga

Leithold, L. (1989). *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik* (terjemahan Hutahaean, dkk). Jilid I, edisi V, Jakarta: Erlangga

Edward And Venney (1994). *Calculus With Analytic Geometry by Prentice-Hill Inc.*