Limit Fungsi

- Definisi Limit Fungsi di sSatu Titik

  Misalkan fungsi f yang terdefinisi pada suatu selang terbuka I yang memuat x=a kecuali mungkin di a sendiri. Limit fungsi f untuk x mendekati a adalah L,

  L$\in$***R*** *ditulis* $\lim_{x \to a} f(x) = L$

jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan $\delta > 0$ sehingga berlaku

$|f(x) - L| < \varepsilon$ asalkan $0 < |x - a| < \delta$ atau

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \ni$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

❑ Sifat-Sifat Limit Fungsi

Diketahui n bilangan bulat positif, k suatu konstanta, dan fungsi f dan g masing-masing mempunyai limit di c, maka

(1) Jika $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *dan* $\lim_{x \to c} f(x) = M$ *maka L=M (Ketunggalan limit fungsi)*

(2) $$\lim_{x \to c} k = k$$

(3) $$\lim_{x \to c} x = c$$

(4) $$\lim_{x \to c} k.f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$$

(5) $$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$

(6) $$\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$$

(7) $$\lim_{x \to c} f(x).g(x) = \lim_{x \to c} f(x).\lim_{x \to c} g(x)$$

(8) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$ *asalkan* $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

(9) $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n$

(10) $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$ *asalkan untuk*

n genap

(11) a. Jika $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ maka $\lim\limits_{x \to c} \left| f(x) \right| = \left| L \right|$

b. Jika $\lim\limits_{x \to c} \left| f(x) \right| = 0$ maka $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$

- ***Teorema Penggantian***

  Jika f suatu fungsi polinom atau fungsi rasional maka $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ *asalkan nilai penyebut di c tidak nol untuk fungsi rasional*

❑ Teorema Apit

Diketahui fungsi f, g, dan h terdefinisi pada suatu selang terbuka I yang memuat c kecuali mungkin di c sendiri. Jika $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *untuk semua* $x \in I$*, kecuali mungkin di c dan*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{z \to c} h(x) = L \text{, maka } \lim_{x \to c} g(x) = L$$

Definisi Limit Sepihak

Diberikan fungsi f terdefinisi pada selang buka I = (a,b).

(1) *Limit fungsi f untuk x mendekati b dari sebelah kiri adalah L, ditulis*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = L$$

bila untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan* $\delta > 0$ *sehingga jika* $0 < b - x < \delta$ *berlaku* $|f(x) - L| < \varepsilon$

(2) *Limit fungsi* f *untuk* x *mendekati* a *dari sebelah kanan adalah* L*, ditulis*

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ *bila untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan* $\delta > 0$ *sehingga jika* $0 < x - a < \delta$ *berlaku* $|f(x) - L| < \varepsilon$

❑ Hubungan Limit Fungsi dengan Limit Sepihak

Fungsi f terdefinisi pada selang buka I yang memuat x = c, kecuali mungkin di c sendiri. Fungsi f dikatakan mempunyai limit di x = c jika

(i) $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ *ada (berhingga);*

(ii) $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$ *ada (berhingga); dan*

(iii) $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c+} f(x)$

Kekontinuan Fungsi

- **Definisi Kekontinuan Fungsi di Satu Titik**

  Diketahui fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c. Fungsi f dikatakan kontinu di c jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

❑ Definisi Kekontinuan Sepihak

Diberikan fungsi f terdefinisi pada selang tertutup I = [a,b].

(a) *Fungsi f dikatakan* ***kontinu kiri*** *di b*

bila $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

(b) *Fungsi f dikatakan* ***kontinu kanan*** *di a*

bila $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Definisi Kekontinuan Fungsi pada Suatu Selang

- ✓ *Fungsi f dikatakan kontinu pada selang terbuka* (*a*,*b*) *jika fungsi f kontinu di setiap titik pada selang* (*a*,*b*).
- ✓ *Fungsi f dikatakan kontinu pada selang setengah terbuka atau setengah tertutup* (*a*,*b*] *jika fungsi f kontinu pada selang terbuka* (*a*,*b*) *dan kontinu kiri di b.*

- *Fungsi f dikatakan kontinu pada selang setengah terbuka atau setengah tertutup [a,b) jika fungsi f kontinu pada selang terbuka (a,b) dan kontinu kanan di a.*
- *Fungsi f dikatakan kontinu pada selang terutup [a,b], jika fungsi f kontinu kanan di a, kontinu pada selang terbuka (a,b), dan kontinu kiri di b.*

❑ Teorema Kekontinuan Fungsi

(a) *Jika fungsi f dan g kontinu di c, maka fungsi* $f+g$, $f-g$, $f.g$, *dan* f/g *dengan* $g(c) \neq 0$ *kontinu di c*

(b) *Jika fungsi f dan g kontinu pada suatu selang I, maka fungsi* $f+g$, $f-g$, $f.g$, *dan* f/g *dengan* $g(c) \neq 0$ *kontinu di c untuk semua* $c \in I$

(c) Fungsi suku banyak, fungsi polinom, fungsi rasional, dan fungsi trigonometri kontinu pada daerah definisinya.

(d) Jika fungsi f kontinu di c dan fungsi g kontinu di $f(c)$ maka fungsi komposisi gof kontinu di c

(e) *Diberikan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c, kecuali mungkin di* c sendiri. Jika $\lim\limits_{x \to c} f(x) = k$ dan g kontinu di k, maka

$$\lim_{x\to c}(gof)(x) = g(k) \quad \text{atau}$$

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(\lim_{x\to c} f(x))$$