Turunan Fungsi

- Definisi Turunan Fungsi

  Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat a. Turunan pertama fungsi f di x=a ditulis f'(a) didefinisikan dengan

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

asalkan limit ini ada.

❑Sepihak Definisi Turunan

(a) Turunan Kiri

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang setengah terbuka (t,a], nilai turunan kiri fungsi f di x=a ditulis $f'_-(a)$ *didefinisi-kan dengan*

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

asalkan limit ini ada

(b) Turunan kanan

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang setengah terbuka [a,t), nilai turunan kanan fungsi f di x=a ditulis $f'_{+}(a)$ *didefinisikan dengan*

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

asalkan limit ini ada

- **Hubungan Turunan dan Kekontinuan**

  Misalkan fungsi f terdefinisi di sekitar a.

  jika $f\,'(a)$ ada, maka f kontinu di a

- **Fungsi Turunan pada Selang Tertutup**

  Fungsi f dikatakan mempunyai turunan pada selang tertutup $I=[a,b]$, jika dan hanya jika $f'(x)$ ada untuk setiap $x\in(a,b)$, $f'_{+}(a)$ ada, dan $f'_{-}(b)$ ada

Rumus-rumus Turunan

(a) Turunan fungsi Konstan

Jika f(x)=c(suatu konstanta) untuk semua x, maka f '(x)=0 untuk semua x , yaitu

$D_x(c)=0$

(b) Turunan fungsi Linier

Jika $f(x) = ax + b, a \neq 0,$ *maka f'(x)=a,*

yaitu $D_x(ax+b)=a$

(c) Turunan fungsi Pangkat

Jika n bilangan bulat positif dan $f(x)=x^n$

maka $f'(x)=nx^{n-1}$ *atau* $D_x(x^n)=nx^{n-1}$

(d) Turunan dari Suatu Kompinasi Linear

Jika f dan g adalah fungsi yang terdefe-sialkan, a dan b adalah konstanta real, maka $D\left[af(x)+bg(x)\right]=aD\left[f(x)\right]+bD\left[g(x)\right]$

(e) Turunan Fungsi Hasil kali

Jika f dan g masing-masing adalah fungsi yang terdeferensialkan di x maka fg adalah terdeferensialkan di x , dan

$$
\begin{aligned}
D\left[f(x).g(x)\right] &= f'(x).g(x) + f(x).g'(x) \\
&= g(x)Df(x) + f(x)Dg(x)
\end{aligned}
$$

(f) Turunan Fungsi Kebalikan

Jika f terdeferensialkan di x dan $f(x) \neq 0$

maka $$D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$$

atau $$D\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{Df}{f^2}$$

(g) Turunan Fungsi Hasil Bagi

Jika f dan g terdeferensial di x dan $g(x) \neq 0$

maka f/g terdeferensial di x, dan

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D(f(x)).g(x) - f(x).D(g(x))}{\left[g(x)\right]^2}$$ *atau*

Bila u=f(x) dan v=g(x)maka $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Turunan Fungsi Trigonometri

$$D_x(\sin x) = \cos x$$

$$D_x(\cos x) = -\sin x$$

$$D_x(\tan x) = \sec x$$

$$D_x(\cot x) = -\csc x$$

$$D_x(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$D_x(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Aturan Rantai

Jika fungsi f terdeferensialkan di x dan g terdeferensialkan di f(x), maka fungsi komposisi h=gof yang didefinisikan dengan h(x)=g(f(x)) terdeferensialkan di x dan turunannya adalah

$$h'(x) = D\left[g\left(f(x)\right)\right] = g'\left(f(x)\right).f'(x)$$

Aturan Pangkat Yang Diperumum

Jika adalah bilangan rasional, maka

$$D_x[f(x)]^r = r[f(x)]^{r-1}.\, f'(x)$$

dimana terdefinisi dan terdiferensial.

Turunan Tingkat Tinggi

- ✓ $$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

  bila limit ini ada.

- ✓ Lambang yang digunakan

  $$f^{n}(x) = \frac{d\left[f^{(n-1)}(x)\right]}{dx}$$

  artinya turunan ke n dari fungsi f

Turunan Fungsi Invers

Misalkan fungsi $y=f(x)$ *kontinu dan 1-1 pada selang I dan* $x=f^{-1}(y)$ *Jika* $f'(x)$ *ada pada I dan* $f'(x)\neq 0$*, maka fungsi* f^{-1} *mempunyai turunan pada I dengan aturan*

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \quad \text{atau} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Turunan Fungsi Invers Trigonometri

(1) $$D\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$$

(2) $$D\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$$

(3) $$D\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}, x \in R$$

(4) $D\left(\cot^{-1} x\right)=\dfrac{-1}{1+x^{2}}, x \in R$

(5) $D\left(\sec^{-1} x\right)=\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^{2}-1}}, |x|>1$

(6) $D\left(\operatorname{cosec}^{-1} x\right)=\dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^{2}-1}}, |x|>1$

❑ Definisi Diferensial

Misalkan fungsi f dengan persamaan
y= f(x) mempunyai turunan $\frac{dy}{dx} = f'(x).$

Diferensial dari x dinotasikan dengan dx dan diferensial dari y dinotasikan dengan dy, didefinisikan sebagai $dy = f'(x)\Delta x$ *dan* $dx = \Delta x$ *dimana* Δx *menyatakan pertambahan sebarang dari x.*

Bentuk-Bentuk Rumus Turunan

Fungsi	Turunan	Diferensial
y = k	$\frac{dy}{dx} = \frac{dk}{dx} = 0$	d(k)=0
y = ku	$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	d(ku)=kd(u)
y = u + v	$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	d(u+v)=d(u)+d(v)

Fungsi	Turunan	Diferensial
y = u.v	$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$	d(u.v) = udv+vdu
y = u/v	$\frac{dy}{dx} = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$	
		$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Fungsi Turunan Diferensial

$y = u^n$

$$\frac{d(u^{2})}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$d(u^n) = n\, u^{n-}$

${}^{1}du$

PENGGUNAAN TURUNAN

- **Definisi Nilai Minimum dan Maksimum**

  (a) *Jika c dalam interval tertutup* $[a,b]$,

  maka f dikatakan ***nilai minimum***

  dari $f(x)$ *pada* $[a.b]$ *jika* $f(c) \leq f(x)$

  untuk semua x dalam $[a,b]$.

(b) *Jika* d *dalam interval tertutup* $[a,b]$, *maka* $f(d)$ *dikatakan* ***nilai maksimum*** *dari* $f(x)$ *pada* $[a.b]$ *jika* $f(x) \leq f(d)$ *untuk semua* x *dalam* $[a,b]$.

❑ Teorema Sifat Nilai Minimum dan Maksimum

Jika fungsi f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$, maka terdapat nilai c dan d dalam $[a, b]$ sehingga $f(c)$ adalah nilai minimum dan $f(d)$ nilai maksimum dari f pada $[a,b]$.

Definisi Maksimum dan Minimum Lokal

(a) N*ilai* $f(c)$ *adalah* ***nilai maksimum lokal*** *dari fungsi* f *Jika* $f(x) \leq f(c)$ *untuk semua* x *yang cukup dekat ke* c.

(b) *Nilai* $f(c)$ *adalah* ***nilai minimum lokal*** *dari fungsi* f *jika* $f(x) \geq f(c)$ *untuk semua* x *yang cukup dekat ke* c.

(c) *Nilai maksimum lokal atau nilai minimum lokal dari* f *biasanya disebut* ***ekstrim lokal*** *dari* f.

Teorema Maksimum dan Minimum lokal

Jika f terdiferensialkan di c dan terdefinisi pada suatu interval buka yang memuat c dan jika $f(c)$ nilai maksimum lokal ataunilai minimum lokal dari f, maka $f'(c) = 0$

❑ Definisi Maksimum dan Minimum Mutlak (Global)

Misalkan f suatu fungsi dengan domain D. $f(c)$ dikatakan nilai maksimum mutlak atau nilai maksimum global dari f pada D jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x dalam D. Secara singkat, $f(c)$ merupakan nilai terbesar dari f pada D.

❑ Teorema Maksimum dan Minimum Mutlak

Misalkan bahwa $f(c)$ *adalah nilai maksimum mutlak* (*atau minimum mutlak*) *dari fungsi kontinu* f *pada interval tertutup* $[a,b]$. *Maka* c *adalah titik kritis dari* f *atau salah satu dari titik-titik ujung* a *dan* b.

- **Langkah-langkah mencari nilai maksimum dan minimum (mutlak) dari fungsi f pada interval tertutup [a,b]**

1. *Mencari titik-titik kritis dari f.*

   titik-titik itu diperoleh dari $f'(x)=0$ atau $f'(x)$ tidak ada.

2. *Daftarkan nilai-nilai dari x yang menghasilkan ekstrim dari f yang mungkin: kedua titik ujung a dan b dan titik-titik kritis yang terletak dalam $[a,b]$.*
3. *Evaluasi $f(x)$ di masing-masing titik dalam daftar yang diperoleh (2).*

4. *Tentukan nilai f yang terkecil dan yang terbesar.*

- **Definisi Fungsi naik dan turun**

Fungsi f naik pada interval $I = (a, b)$ jika $f(x_1) < f(x_2)$ untuk semua pasangan bilangan x_1 dan x_2 dalam I dengan $x_1 < x_2$.

Fungsi f turun pada I jika $f(x_1) < f(x_2)$ untuk semua pasangan bilangan x_1 dan x_2 dalam I dengan $x_1 < x_2$.

❑ Teorema Teorema Rolle

Misalkan fungsi f *kontinu pada interval tertutup* $[a, b]$ *dan terdiferensialkan dalam* $I = (a, b)$. *Jika* $f(a) = 0 = f(b)$, *maka ada suatu nilai c dalam* (a, b) *sehingga*

Teorema Teorema Nilai Rata-rata

Misalkan fungsi f kontinu pada interval tertutup [a, b] dan terdiferen-sialkan dalam interval buka (a, b).

Jika $f(a) = 0 = f(b)$, *maka*

$f(b) – f(a) = f'(c)\,(b – a)$ *untuk suatu bilangan c dalam (a, b)*

Teorema Teorema Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Jika $f'(x) > 0$ *untuk semua* x *dalam* (a, b), *maka* f *merupakan fungsi naik pada* $[a, b]$. *Jika* $f'(x) < 0$ *untuk semua* x *dalam* (a, b), *maka* f *merupakan fungsi turun pada* $[a, b]$

Teorema Uji Turunan Pertama untuk Ekstrim Lokal

Misalkan fungsi f kontinu pada interval *I* *dan terdiferensialkan di sana kecuali mungkin di titik interior c dari I.*

1. *Jika $f'(x) < 0$ di sebelah kiri dari c dan $f'(x) > 0$ di sebelah kanan dari c, maka $f(c)$ merupakan nilai minimum lokal dari $f(x)$ pada I.*

2. Jika $f'(x) > 0$ di sebelah kiri dari c dan $f'(x) < 0$ di sebelah kanan dari c, maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum lokal dari $f(x)$ pada I.

3. Jika $f'(x) > 0$ di sebelah kiri dan kanan dari c , atau $F'(x) < 0$ di sebelah kiri dan kanan dari c, maka $f(c)$ bukan merupakan nilai minimum atau nilai maksimum dari $f(x)$ pada I.

Uji Turunan Kedua untuk Tititk Ekstrim

Misalkan bahwa fungsi f dapat diturunkan dua kali pada interval buka I yang memuat titik kritis c di mana $f'(c)=0$.

(1) *Jika $f''(x) > 0$ pada I, maka $f(c)$ merupakan nilai minimum dari $f(x)$ pada I.*

(2) *Jika $f''(x) < 0$ pada I, maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum dari $f(x)$ pada I.*

❑ Teorema Uji Titik Belok

Misalkan fungsi f kontinu pada interval buka yang memuat titik a. Jika $f''(x) < 0$ *pada satu sisi dari a dan* $f''(x) > 0$ *pada sisi yang lain, maka dikatakan bahwa a adalah titik belok dari f.*

Menggambar Sketsa Grafik suatu Fungsi

1. *Menentukan perpotongan grafik fungsi dengan sumbu koordinat*. Perpotongan grafik dengan sumbu –x diperoleh dengan mensubstitusikan $y = 0$ pada fungsi yang diberikan. Sedangkan perpotongan grafik dengan sumbu-y diperoleh dengan mensubstitusikan $x = 0$.

2. *Menentukan interval di mana grafik itu naik dan di mana grafik itu turun*. Interval ini diperoleh dengan menyelesaikan pertidaksamaan f' > 0 untuk grafik naik, dan f'< 0 untuk grafik turun. Perubahan naik turunnya grafik dapat menentukan titik ekstrim dari fungsi yang diberikan.

3. *Menentukan interval di mana grafik cekung ke atas, dan di mana grafik itu cekung ke bawah*. Interval ini diperoleh dengan menyelesaikan pertidaksamaan $f''>0$ untuk grafik sekung ke atas, dan $f''<0$ untuk grafik cekung ke bawah. Titik belok dari grafik ditentukan dari perubahan kecekungan di suatu titik.

4. *Membuat sketsa grafik berdasarkan data-data yang diperoleh pada langkah* 1 *sampai dengan langkah* 3