BAB 6
PRINSIP INKLUSI DAN EKSKLUSI

Pada bagian ini akan didiskusikan topik berikutnya yaitu enumerasi yang dinamakan Prinsip Inklusi dan Eksklusi. Konsep dalam bab ini merupakan perluasan ide dalam Diagram Venn beserta oeprasi irisan dan gabungan, namun dalam bab ini konsep tersebut diperluas, dan diperkaya dengan ilustrasi penerapan yang bervariasi dalam matematika kombinatorik. Kita awali dengan sebuah ilustrasi:

Sebuah perkuliahan umum dihadiri oleh 20 mahasiswa yang memiliki kegemaran membaca dan 30 mahasiswa yang memiliki kegemaran menulis. Berapa mahasiswa di dalam perkuliahan tersebut yang memiliki kegemaran membaca atau menulis?

Dari permasalahan ini terlihat bahwa informasi yang diketahui belum memadai. Banyaknya mahasiswa yang memiliki kegemaran membaca atau menulis hanya dapat diketahui jika banyaknya mahasiswa yang menggemari kedua kegiatan tersebut diketahui.

6.1 Prinsip Inklusi-Eksklusi

Banyaknya anggota himpunan gabungan antara himpunan A dan himpunan B merupakan jumlah banyaknya anggota dalam himpunan tersebut dikurangi banyaknya anggota di dalam irisannya. Dengan demikian,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Contoh 6.1

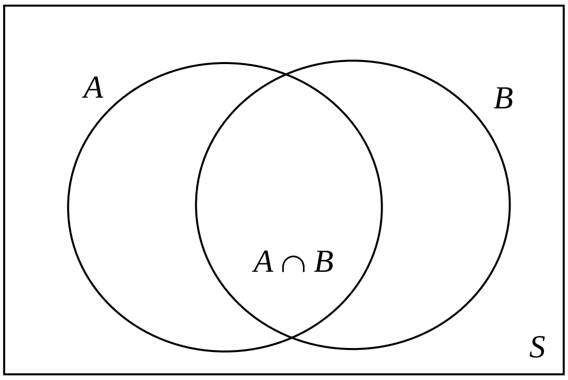
Dalam sebuah program studi pendidikan matematika yang terdiri atas 350 mahasiswa, terdapat 175 mahasiswa yang mengambil mata kuliah persamaan diferensial dan 225 mahasiswa yang mengambil mata kuliah analisis kompleks, dan 50 mahasiswa yang mengambil mata kuliah persamaan diferensial dan analisis kompleks. Ada berapa mahasiswa di dalam perkuliahan itu jika setiap mahasiswa mengambil mata kuliah persamaan diferensial, analisis kompleks, atau kedua-duanya?

Penyelesaian:

Misalkan A adalah banyaknya mahasiswa yang mengambil mata kuliah persamaan diferensial dan B menyatakan mahasiswa yang mengambil mata kuliah analisis kompleks. Maka $A \cap B$ merupakan himpunan mahasiswa yang mengambil kedua mata kuliah tersebut. Banyaknya mahasiswa di dalam kelas itu yang mengambil mata kuliah persamaan diferensial, analisis kompleks, atau kedua-duanya adalah

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 175 + 225 - 50 \\ &= 350. \end{aligned}$$

Ini berarti, terdapat 350 mahasiswa di dalam kelas yang mengambil mata kuliah persamaan diferensial, analisis kompleks, atau kedua-duanya. Karena banyaknya siswa keseluruhan di dalam kelas tersebut adalah 350 mahasiswa, artinya tidak terdapat mahasiswa yang tidak memilih salah satu dari kedua konsentrasi itu. Perhatikan diilustrasi berikut.



Gambar 6.1. Diagram himpunan mahasiswa peserta kuliah

Contoh 6.2

Di sebuah jurusan dalam suatu perguruan tinggi terdapat 134 mahasiswa tingkat 3. Dari sekian banyak mahasiswa tersebut, 87 di antaranya mengambil mata kuliah teori graf diskrit, 73 mengambil mata kuliah matematika ekonomi, dan 29 mengambil mata kuliah teori graf dan matematika ekonomi. Berapa banyak mahasiswa yang tidak mengambil sebuah mata kuliah baik dalam teori graf maupun dalam matematika ekonomi?

Penyelesaian:

Untuk menentukan banyaknya mahasiswa tingkat 3 yang tidak mengambil mata kuliah teori graf ataupun matematika ekonomi, kurangilah banyaknya mahasiswa yang mengambil mata kuliah dari salah satu mata kuliah ini dari keseluruhan banyaknya mahasiswa tingkat 1. Misalkan A merupakan himpunan semua mahasiwa tingkat 3 yang mengambil mata kuliah teori graf, dan B adalah himpunan mahasiswa yang mengambil mata kuliah matematika ekonomi. Maka $|A|$=87, $|B|$=73, dan $|A \cap B|$ = 29. Banyaknya mahasiswa tingkat 3 yang mengambil mata kuliah teori graf atau matematika ekonomi adalah

$$
\begin{aligned}
|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\
&= 87 + 73 - 29 \\
&= 160-29 \\
&= 131.
\end{aligned}
$$

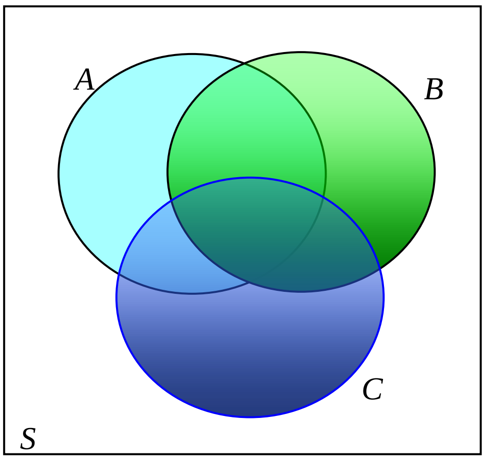
Ini artinya terdapat sebanyak 134–131 = 3 mahasiswa tingkat 3 yang tidak mengambil mata kuliah teori graf ataupun matematika ekonomi.

Dalam bagian berikutnya pada bab ini akan diuraikan bagaimana cara-cara menentukan banyaknya anggota dalam gabungan antara himpunan terhingga dari sebuah himpunan. Hasil ini kemudian akan dikembangkan menjadi sebuah prinsip yang dinamakan Prinsip Inklusi-Eksklusi.

Sebelum membicarakan gabungan dari *n* himpunan, dengan *n* sebagai bilangan bulat positif, sebuah rumusan bagi banyaknya anggota dalam gabungan 3 himpunan *A*, *B*, dan *C* akan diturunkan. Untuk menyusun rumus ini perlu diingat bahwa $|A|+|B|+|C|$ membilang tiap anggota tepat satu kali dari ketiga himpunan tersebut satu kali, anggota yang tepat 2 kali dari himpunan-himpunan itu adalah dua kali, dan anggota-anggota dalam 3 himpunan tersebut 3 kali. Ini diilustrasikan dalam Gambar 6.3.

Untuk membuang perhitungan yang berlebih dari banyaknya angota dalam lebih dari satu himpunan, kurangi banyaknya anggota dalam irisan semua pasangan 3 himpunan, sehingga memberikan hasil

$$|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C| - |B \cap C|$$



Gambar 6.3. Diagram tiga himpunan

Ekspresi ini masih mencakup anggota-anggota yang muncul tepat satu kali dari himpunan sebanyak satu kali. Sebuah anggota yang muncul tepat dua kali dari himpunan juga dihitung tepat satu kali, karena anggota ini akan muncul dalam satu dari 3 irisan himpunan terambil 2 dalam sekali waktu. Namun, semua anggota yang muncul dalam 3 himpunan itu akan terhitung nol kali dalam ekspresi ini, karena mereka muncul dalam keseluruhan dari 3 irisan himpunan yang diambil 2 kali dalam satu kali pengambilan.

Untuk memperbaiki kekurangan perhitungan ini, tambahkan banyaknya anggota dalam irisan seluruh 3 himpunan. Ekspresi final ini membilang tiap anggota satu kali, apakah itu 1, 2 atau 3 dalam 3 himpunan. Jadi,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Teorema 6.1 (Prinsip Inklusi-Eksklusi)

Misalkan $A_1, A_2, \cdots, A_n$ adalah himpunan terhingga. Maka

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum_{i \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Contoh 6.3.

Berikan rumus bagi banyaknya anggota dalam gabungan 4 himpunan.

Penyelesaian: Prinsip Inklusi-Eksklusi membuktikan bahwa

Perhatikan bahwa rumus ini mengandung 15 suku yang berlainan, satu bagi tiap-tiap himpunan bagian tak kosong dari $|A_1, A_2, A_3, A_4|$.

6.2. Bentuk Alternatif Prinsip Inklusi-Eksklusi

Banyak sekali masalah pembilangan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Inklusi-Eksklusi. Sebagai contoh, kita dapat menggunakan prinsip ini untuk menentukan banyaknya bilangan prima yang kurang dari sebuah bilangan bulat positif. Banyaknya masalah pembilangan yang dapat diselesaikan dengan membilang banyaknya fungsi *onto* dari suatu himpunan terhingga ke himpunan lainnya. Prinsip Inklusi-Eksklusi dapat digunakan untuk menentukan banyaknya fungsi yang demikian. Masalah ini menunjukkan probabilitas bahwa tak ada orang yang mendapat topi yang tepat dari seorang penjaga topi yang memberikan topinya kembali secara acak.

Terdapat bentuk lain dari Prinsip Inklusi-Eksklusi yang berguna dalam masalah pembilangan. Secara khusus, bentuk ini dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang meminta banyaknya anggota dalam sebuah himpunan yang tidak memiliki sifat-sifat P_1, P_2, ... , P_n.

Misalkan bahwa A_i adalah himpunan bagian yang mengandung anggota-anggota yang memiliki sifat P_i. Banyaknya anggota dengan semua sifat-sifat

$$P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_n},$$

dinyatakan dengan

$$|(P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_n})|.$$

Dengan menulis kuantitas ini dalam bentuk suku-suku himpunan, kita peroleh

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right| = |(P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_k})|.$$

Jika banyaknya anggota yang tidak memiliki sifat-sifat P_1, P_2, ... , P_n dinyatakan dengan $|(P_1', P_2', \cdots, P_n')|$, maka berlaku

$$|(P_1', P_2', \cdots, P_n')| = |S| - \left|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right|.$$

Dari Prinsip Inklusi-Eksklusi, kita dapat melihat bahwa

$$|(P_1' P_2' \cdots P_n')| = |S| - \sum_{1 \le i \le n} |P_i| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |P_i P_j|$$
$$- \sum_{i \le i < j < k \le n} |P_i P_j P_k| + \cdots + (-1)^n |P_1 P_2 \cdots P_n|.$$

Contoh 6.1 memperlihatkan bahwa prinsip Inklusi-Eksklusi dapat digunakan untuk menentukan banyaknya penyelesaian dalam bilangan bulat dari sebuah persamaan dengan beberapa persyaratan.

Contoh 6.4.

Berapakah banyaknya penyelesaian dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, jika x_1, x_2, dan x_3 adalah bilangan bulat tak negatif dengan $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$, dan $x_3 \le 5$?

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikannya kita gunakan prinsip inklusi-eksklusi. Misalkan sebuah penyelesaian memiliki

(i) sifat P_1, yaitu $x_1 > 3$;

(ii) sifat P_2, yaitu $x_2 > 4$; dan

(iii) sifat P_3, yaitu $x_3 > 5$.

Untuk menentukan banyaknya penyelesaian yang memenuhi $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$, dan $x_3 \leq 5$, kita misalkan

$|S|$ = banyaknya seluruh penyelesaian = C(3+10-1,10)= 66.

$|P_1|$ = banyaknya penyelesaian yang memenuhi $x_1 \geq 4$ adalah C(3+6-1,6) =28.

$|P_2|$ = banyaknya penyelesaian yang memenuhi $x_2 \geq 5$ adalah C(3+5-1,5) =21.

$|P_3|$ = banyaknya penyelesaian yang memenuhi $x_3 \geq 6$ adalah C(3+4-1,4) = 15.

$|P_1P_2|$ = banyaknya penyelesaian yang memenuhi $x_1 \geq 4$ dan $x_2 \geq 5$ adalah 3.

$|P_1P_3|$ = banyaknya penyelesaian yang memenuhi $x_1 \geq 4$ dan $x_3 \geq 6$ adalah 1.

$|P_2P_3|$ = banyaknya penyelesaian yang memenuhi $x_2 \geq 5$ dan $x_3 \geq 6$ adalah 0.

$|P_1P_2P_3|$ = banyaknya penyelesaian yang memenuhi $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 5$, dan $x_3 \geq 6$ adalah 0.

Maka banyaknya penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$, dan $x_3 \leq 6$ adalah

$$
\begin{aligned}
|P_1'P_2'P_3'| &= |S| - |P_1| - |P_2| - |P_3| + |P_1P_2| \\
&\quad + |P_1P_3| + |P_2P_3| - |P_1P_2P_3| \\
&= 66 - 28 - 21 - 15 + 3 + 1 + 0 + 0 \\
&= 5.
\end{aligned}
$$

6.3. Aplikasi Prinsip Inklusi-Eksklusi

Prinsip Inklusi-Eksklusi memiliki banyak aplikasi, di antaranya dalam penyelidikan banyaknya bilangan prima dalam yang tidak meliebihi suatu bilangan bulat positif tertentu. Perhitungan ini dapat dimanfaatkan dalam menjawab permasalahan saringan Eratosthenes. Dalam saringan Eratosthenes, kita membuat suatu saringan yang mampu menyaringg bilangan-bilangan, demikian sehingga yang tersisi setelah disaring hanyalah bilangan prima yang dimaksud.

Untuk memahami prinsip ini, pertama-tama kita kaji pengertian bilangan bulat komposit. Bilangan komposit adalah bilangan yang habis dibagi oleh bilangan prima yang tidak melebihi akar kuadratnya. Sebagai contoh, 50 adalah bilangan komposit. Bilangan ini dapat dibagi habis oleh bilangan prima yang tidak lebih dari $\sqrt{50} = 7$. Dalam hal ini 50 habis dibagi 2 dan 5.

Untuk mencari banyaknya bilangan prima yang tidak lebih dari 100, kita perlu mencari bilangan komposit yang tidak melebihi 100. Karena $\sqrt{100} = 10$, maka bilangan-biangan prima yang kurang dari 10 adalah 2, 3, 5, 7. Dengan demikian banyaknya bilangan rpima yang tidak lebih dari 100 adalah 4 ditambah dengan banyaknya bilangan bulat positif antara 100 yang habis dibagi 2, 3, 5, atau 7.

Untuk memecahkan masalah ini akan kita gunakan prinsip Inklusi-Eksklusi. Kita misalkan

P_1: sifat bahwa sebuah bilangan bulat habis dibagi 2;

P_2: sifat bahwa sebuah bilangan bulat habis dibagi 3;

P_3: sifat bahwa sebuah bilangan bulat habis dibagi 5;

P_4: sifat bahwa sebuah bilangan bulat habis dibagi 7.

Maka banyaknya bilangan prima yang tidak melebihi 100 adalah

$$4 + \left|P_1^{'}P_2^{'}P_3^{'}P_4^{'}\right|.$$

Mengingat bahwa bilangan positif antara 1 dan 100 seluruhnya ada 99, maka

$$\begin{aligned}
\left|P_1^{'}P_2^{'}P_3^{'}P_4^{'}\right| &= 99 - |P_1| - |P_2| - |P_3| + |P_1P_2| + |P_1P_3| + |P_1P_4| + |P_2P_3| + |P_2P_4| \\
&\quad - |P_1P_2P_3| - |P_1P_2P_4| - |P_1P_3P_4| - |P_2P_3P_4| + |P_1P_2P_3P_4| \\
&= 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor \\
&\quad + \left\lfloor \frac{100}{2\times 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\times 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\times 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\times 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\times 7} \right\rfloor \\
&= - \left\lfloor \frac{100}{2\times 3\times 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\times 3\times 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\times 5\times 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3\times 5\times 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\times 3\times 5\times 7} \right\rfloor \\
&= 21.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terdapat 4 + 21 = 25 bilangan prima yang tidak melebihi 100.